Petr Mandl

O optimálním řízení jednorozměrných difusních procesů

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 6, 412–420

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102920

O OPTIMÁLNÍM ŘÍZENÍ JEDNOROZMĚRNÝCH DIFUSNÍCH PROCESŮ

Petr Mandl

(Došlo dne 30. prosince 1963.)

V článku je vypracována pro procesy s obecnou okrajovou podmínkou teorie optimálního řízení, analogická teorii uvedené v [2]. Přitom se využívá specifických vlastností jednorozměrného případu.

Práce je věnována homogenním difusním procesům na ohraničeném intervalu $\langle r_0, r_1 \rangle$. Takový proces je popsán koeficientem difuse, koeficientem lokálního posuvu a dvěma okrajovými podmínkami, určujícími chování procesu při dosažení hranic intervalu $\langle r_0, r_1 \rangle$. Předpokládáme, že koeficienty závisejí na parametru y, jehož velikost můžeme v závislosti na hodnotě procesu měniti. Parametr y nechť nabývá hodnot z ohraničeného intervalu $\langle y_0, y_1 \rangle$.

Jsou tedy zadány dvě funkce na $\langle r_0, r_1 \rangle \times \langle y_0, y_1 \rangle$: koeficient difuse $a(x, y)$, koeficient lokálního posuvu $b(x, y)$ – předpokládáme je spojité, $a(x, y) > 0$ – a dvojice okrajových podmínek

$$\vartheta_0\, u(r_0) - \varrho_0\, u(r_1) = \tau_0 \int_{r_0}^{r_1} u(x)\, \mathrm{d}p_0(x) + \pi_0\, u'(r_0)\,, \tag{1}$$

$$\vartheta_1\, u(r_1) - \varrho_1\, u(r_0) = \tau_1 \int_{r_0}^{r_1} u(x)\, \mathrm{d}p_1(x) - \pi_1\, u'(r_1)\,.$$

Zde konstanty $\vartheta_i, \varrho_i, \tau_i, \pi_i$ jsou vesměs nezáporné,

$$\begin{aligned} \vartheta_0 - \varrho_0 - \tau_0 &= \Delta_0 \geqq 0\,, \\ \vartheta_1 - \varrho_1 - \tau_1 &= \Delta_1 > 0\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Funkce $p_i(x)$ jsou distribuční funkce $\int_{r_0+}^{r_1-} \mathrm{d}p_i(x) = 1$, a zadávají rozložení přeskoků z hranice dovnitř intervalu $\langle r_0, r_1 \rangle$. Členy s první derivací charakterisují odražení, členy s koeficienty ϱ_i přeskok na druhou hranici. $\Delta_i > 0$ značí, že na hranici může dojít k zániku procesu. V (2) tedy předpokládáme, že alespoň na jedné z hranic dochází k zániku. Difusní procesy s obecnou hraniční podmínkou byly podrobně vyšetřeny v [1]. Podmínka (2) je nejobecnější podmínka, nezávisející na řízení, při níž $p_i(x)$ jsou distribuční funkce.

Každá spojitá funkce $\eta(x)$, zobrazující $\langle r_0, r_1 \rangle$ do $\langle y_0, y_1 \rangle$, představuje řízení procesu. Udává, jakou hodnotu parametru y volíme, nachází-li se proces v poloze x. Množinu všech řízení budeme označovati M. Každému $\eta \in M$ odpovídá difusní proces s koeficienty $a(x, \eta(x))$, $b(x, \eta(x))$ a s hraniční podmínkou (1).

Výsledek řízení nechť je měřen prostřednictvím spojité funkce $c(x, y)$ takto: Když proces nabývá v době od t do $t + \mathrm{d}t$ hodnoty x a parametr řízení hodnoty y, zisk vzroste o hodnotu $c(x, y)\,\mathrm{d}t$. Volíme-li tedy určité řízení $\eta \in M$ a počáteční polohu x, očekávaný zisk $v(x; \eta)$ je roven

$$v(x; \eta) = E_\eta \left\{ \int_0^T c(X_t, \eta(X_t))\,\mathrm{d}t \mid X_0 = x \right\}.$$

Zde T je okamžik ukončení procesu, který vzhledem k podmínce $\Delta_1 > 0$ je konečný. Snažíme se voliti řízení η tak, aby $v(x, \eta)$ bylo co největší.

Označme $P_\eta(t, x; E)$ pravděpodobnosti přechodu procesu, který dostaneme, zvolíme-li řízení η. Platí

$$v(x; \eta) = \int_0^\infty \int_{r_0}^{r_1} P_\eta(t, x; \mathrm{d}s)\, c(s, \eta(s))\,\mathrm{d}t\,. \tag{3}$$

Je známo (bez nároků na přesnost se o tom můžeme přesvědčiti prointegrováním difusní rovnice), že v je jediným řešením rovnice

$$a(x, \eta(x)) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} v + b(x, \eta(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v + c(x, \eta(x)) = 0 \tag{4}$$

splňujícím podmínky (1).

Věta. *Položme* $u(x) = \sup_{\eta \in M} v(x; \eta)$. *Potom* $u(x)$ *je jediným řešením rovnice*

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u + \max_y \left[b(x, y)\, a(x, y)^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u + c(x, y)\, a(x, y)^{-1} \right] = 0 \tag{5}$$

vyhovujícím podmínkám (1).

Nejprve provedeme některé pomocné úvahy. Důkaz věty bude obsažen v tvrzeních 1, 2.

Budeme označovati

$$\beta(x, y) = b(x, y)\, a(x, y)^{-1}\,, \quad \varphi(x, y) = c(x, y)\, a(x, y)^{-1}$$

a pro $w \in (-\infty, \infty)$

$$\Phi(x, w) = -\max_y \left[\beta(x, y)\, w + \varphi(x, y) \right]. \tag{6}$$

V případě, že $u(x)$ splňuje (5), (1), pak

$$u(x) = c_0 + \int_{r_0}^x w(s; \gamma_0)\,\mathrm{d}s\,, \tag{7}$$

kde $w(x, \gamma_0) = (d/dx)\, u(x)$ je řešením rovnice

$$\frac{d}{dx}\, w = \Phi(x, w) \tag{8}$$

s počáteční podmínkou $w(r_0; \gamma_0) = \gamma_0 = (d/dx)\, u(r_0)$. Označili jsme $u(r_0) = c_0$.

Dosaďme vyjádření (7) do (1). Dostáváme

$$\begin{aligned} &\Delta_0 c_0 - \varrho_0 \int_{r_0}^{r_1} w(s; \gamma_0)\, ds = \tau_0 \int_{r_0}^{r_1} \int_{r_0}^{x} w(s; \gamma_0)\, ds\, dp_0(x) + \pi_0 \gamma_0\,, \\ &\Delta_1 c_0 + \vartheta_1 \int_{r_0}^{r_1} w(s; \gamma_0)\, ds = \tau_1 \int_{r_0}^{r_1} \int_{r_0}^{x} w(s; \gamma_0)\, ds\, dp_1(x) - \pi_1\, w(r_1, \gamma_0)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Po vyloučení c_0 obdržíme pro γ_0 rovnici $\psi(w(.\,; \gamma_0)) = 0$, kde

$$\begin{aligned} \psi(f(.)) = {} & (\Delta_0 \vartheta_1 + \Delta_1 \varrho_0) \int_{r_0}^{r_1} f(s)\, ds + \Delta_1 \tau_0 \int_{r_0}^{r_1} \int_{r_0}^{x} f(s)\, ds\, dp_0(x) + \\ & + \Delta_1 \pi_0\, f(r_0) + \Delta_0 \pi_1\, f(r_1) - \Delta_0 \tau_1 \int_{r_0}^{r_1} \int_{r_0}^{x} f(s)\, ds\, dp_1(x)\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Lemma 1. *Funkce $\Phi(x, w)$ je spojitá v (x, w) a platí*

$$|\Phi(x, w_0) - \Phi(x, w_1)| \leqq K_1 |w_0 - w_1|\,, \tag{11}$$

kde $K_1 = \max\limits_{x,y} |b(x, y)\, a(x, y)^{-1}|$.

D ů k a z. Mějme libovolné (x_0, w_0), (x_1, w_1). Nechť pro y_i platí

$$-\Phi(x_i, w_i) = \beta(x_i, y_i)\, w_i + \varphi(x_i, y_i)\,, \quad i = 0, 1\,.$$

Budiž např. $\Phi(x_0, w_0) \leqq \Phi(x_1, w_1)$. Potom dle (6)

$$-\Phi(x_0, w_0) \geqq -\Phi(x_1, w_1) \geqq \beta(x_1, y_0)\, w_1 + \varphi(x_1, y_0)\,,$$

tedy

$$\begin{aligned} |\Phi(x_0, w_0) - \Phi(x_1, w_1)| &\leqq \beta(x_0, y_0)\, w_0 - \beta(x_1, y_0)\, w_1 + \\ + \varphi(x_0, y_0) - \varphi(x_1, y_0) &\leqq \max_y |\beta(x_0, y) - \beta(x_1, y)|\, |w_0| + \\ &+ K_1 |w_0 - w_1| + \max_y |\varphi(x_0, y) - \varphi(x_1, y)|\,. \end{aligned}$$

Jelikož β, φ jsou spojité v x stejnoměrně v y, vyplývá odtud snadno spojitost $\Phi(x, w)$ a pro $x_0 = x_1$ nerovnost (11).

Lemma 2. *Rovnice* (8) *má pro každé* $\gamma \in (-\infty, \infty)$ *na intervalu* $\langle r_0, r_1 \rangle$ *jediné řešení* $w(x, \gamma)$, *splňující* $w(r_0, \gamma) = \gamma$. *Označíme-li* $\beta_-(x) = \min_y \beta(x, y)$, $\beta_+(x) = \max_y \beta(x, y)$,

$$Q_-(x) = \exp \int_{r_0}^{x} \beta_-(s)\, ds\,, \quad Q_+(x) = \exp \int_{r_0}^{x} \beta_+(s)\, ds\,,$$

potom

$$\lim_{\gamma \to -\infty} \gamma^{-1}\, w(x, \gamma) = Q_-(x)^{-1}\,, \quad \lim_{\gamma \to +\infty} \gamma^{-1}\, w(x, \gamma) = Q_+(x)^{-1} \tag{12}$$

stejnoměrně v x.

Důkaz. Z vlastnosti funkce $\Phi(x, w)$ uvedených v lemmatu 1 vyplývá (viz např. [4]), že $w(x, \gamma)$ existuje jednoznačně v nějakém okolí bodu r_0. Položme

$$K_2 = \max_{x, y} |\varphi(x, y)|\,.$$

V případě, že je $w(x, \gamma) \geqq 0$ pro $x \in \langle r_0, r_0 + h \rangle$, máme v tomto intervalu

$$-\beta_+(x)\, w + K_2 \geqq \frac{d}{dx}\, w = \Phi(x, w) \geqq -\beta_+(x)\, w - K_2\,,$$

tj.

$$K_2\, Q_+(x) \geqq \frac{d}{dx}\, Q_+(x)\, w \geqq -K_2\, Q_+(x)\,,$$

odkud

$$|w(x, \gamma) - \gamma\, Q_+(x)^{-1}| \leqq K_2\, Q_+(x)^{-1} \int_{r_0}^{x} Q_+(s)\, ds\,. \tag{13}$$

Vidíme, že pro dostatečně velké kladné γ, $w(x, \gamma) > 0$. Obdobně pro dostatečně velká záporná γ

$$|w(x, \gamma) - \gamma\, Q_-(x)^{-1}| \leqq K_2\, Q_-(x)^{-1} \int_{r_0}^{x} Q_-(s)\, ds\,. \tag{14}$$

Dále platí

$$w(x, \gamma_1) < w(x, \gamma_2) \quad \text{pro} \quad \gamma_1 < \gamma_2\,, \tag{15}$$

neboť řešení, která nabudou pro nějaké x stejné hodnoty, jsou totožná. Nerovnosti (13), (14) dávají tedy pro všechna x odhad, který zaručuje, že řešení $w(x, \gamma)$ lze rozšířiti na celý interval $\langle r_0, r_1 \rangle$. Z nich také plyne jednoduše (12).

Lemma 3. *Pro každou spojitou funkci* $f(x)$ *na intervalu* $\langle r_0, r_1 \rangle$, *která je všude kladná* (*záporná*), *je*

$$\Psi(f(.)) > 0 \quad (\Psi(f(.)) < 0)\,.$$

Důkaz. Nechť $f(x) > 0$ pro $x \in \langle r_0, r_1 \rangle$. V případě, že $\Delta_0 = 0$ z (10) je patrné, že $\Psi(f(.)) > 0$. Když $\Delta_0 > 0$, potom

$$\Psi(f(.)) \geqq \Delta_0 \vartheta_1 \int_{r_0}^{r_1} f(s)\,\mathrm{d}s - \Delta_0 \tau_1 \int_{r_0}^{r_1} \int_{r_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}p_1(x) \geqq$$

$$\geqq \Delta_0(\vartheta_1 - \tau_1) \int_{r_0}^{r_1} f(s)\,\mathrm{d}s > 0\,,$$

neboť z (2) vidíme, že je $\vartheta_1 - \tau_1 > 0$.

Tvrzení 1. *Existuje jediné řešení $\hat{u}(x)$ rovnice* (5) *splňující* (1).

Důkaz. Dokážeme, že ve vztahu

$$\hat{u}(x) = c_0 + \int_{r_0}^{x} w(s, \gamma_0)\,\mathrm{d}s \tag{16}$$

možno voliti jednoznačným způsobem c_0 a γ_0 tak, aby platilo (9). $\Psi(w(.,\gamma))$ je rostoucí funkcí γ. Neboť pro $\gamma_1 < \gamma_2$ platí (15) a tedy dle lemmatu 3

$$\Psi(w(.,\gamma_2)) - \Psi(w(.,\gamma_1)) = \Psi(w(.,\gamma_2) - w(.,\gamma_1)) > 0\,.$$

Jelikož w závisí spojitě na počáteční podmínce γ, je také $\Psi(w(.,\gamma))$ spojitá. Dále máme z lemmatu 2

$$\lim_{\gamma \to -\infty} \gamma^{-1}\, \Psi(w(.,\gamma)) = \Psi(Q_-(.)^{-1}) > 0\,,$$

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \gamma^{-1}\, \Psi(w(.,\gamma)) = \Psi(Q_+(.)^{-1}) > 0\,.$$

Celkem vidíme, že $\Psi(w(.,\gamma))$ je rostoucí, spojitá funkce, blížící se k $\pm\infty$, když $\gamma \to \pm\infty$. Existuje tedy jediné γ_0, pro které platí $\Psi(w(.,\gamma_0)) = 0$. Hodnota c_0 je jednoznačně určena druhou z podmínek (9).

Tvrzení 2. $\hat{u}(x) = u(x) = \sup\limits_{\eta \in M} v(x, \eta)$.

Důkaz. Zvolme $\eta \in M$. Označme

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\hat{u}(x) - v(x,\eta)) + \beta(x, \eta(x)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\hat{u}(x) - v(x,\eta))\,. \tag{17}$$

Máme dle (4), (5)

$$\psi(x) \leqq \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\hat{u}(x) + \max_y \left\{\beta(x,y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\hat{u}(x) + \varphi(x,y)\right\} -$$

$$- \left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} v(x,\eta) + \beta(x,\eta(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} v(x,\eta) + \varphi(x,\eta(x))\right\} = 0\,.$$

Funkce $\hat{u}(x) - v(x, \eta)$ splňuje (17) s podmínkou (1). Je tedy jako v (4) a (3)

$$\hat{u}(x) - v(x, \eta) = - \int_0^\infty \int_{r_0}^{r_1} P_\eta(t, x, \mathrm{d}s)\, \psi(s)\, \mathrm{d}t \geqq 0 .$$

Vidíme, že pro $\eta \in M$

(18) $$\hat{u}(x) \geqq v(x, \eta) .$$

Vyjděme nyní z (16). Položme

(19) $$y_-(x) = \min \{y : \beta(x, y)\, w(x, \gamma_0) + \varphi(x, y) = - \Phi(x, w(x, \gamma_0))\} .$$

Platí dle (8)

(20) $$w(x, \gamma_0) = \gamma_0 - \int_{r_0}^x \beta(s, y_-(s))\, w(s, \gamma_0)\, \mathrm{d}s - \int_{r_0}^x \varphi(s, y_-(s))\, \mathrm{d}s .$$

Není obtížné nahlédnouti (viz [2]), že $y_-(x)$ je zdola polospojitá funkce (tj. platí pro $x \in \langle r_0, r_1 \rangle$ $\liminf_{y \to x} f(y) \geqq f(x)$). Existuje tedy (viz [3]) posloupnost

$$\{\eta_n\}_{n=1}^\infty, \ \eta_n \in M \ \text{taková, že} \ \lim_{n \to \infty} \eta_n(x) = y_-(x) .$$

Označme $w_n(x) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}x)\, v(x, \eta_n)$. Platí $\Psi(w_n(.)) = 0$, a tedy dle lemmatu 3 existuje bod x_n tak, že $w_n(x_n) = 0$. Potom máme z (4)

$$w_n(x) = - \int_{x_n}^x \beta(s, \eta_n(s))\, w_n(s)\, \mathrm{d}s - \int_{x_n}^x \varphi(s, \eta_n(s))\, \mathrm{d}s ,$$

tj.

(21) $$w_n(x) = Q_n(x)^{-1} \int_{x_n}^x \varphi(s, \eta_n(s))\, Q_n(s)\, \mathrm{d}s ,$$

kde

$$Q_n(x) = \exp \int_{r_0}^x \beta(s, \eta_n(s))\, \mathrm{d}s .$$

Můžeme předpokládati, že existuje $\lim_{n \to \infty} x_n = \hat{x}$. Pak existuje, jak plyne z (21), pro $x \in \langle r_0, r_1 \rangle$ $\lim_{n \to \infty} w_n(x) = \hat{w}(x)$. Platí

(22) $$\hat{w}(x) = \hat{w}(r_0) - \int_{r_0}^x \beta(s, y_-(s))\, \hat{w}(s)\, \mathrm{d}s - \int_{r_0}^x \varphi(s, y_-(s))\, \mathrm{d}s$$

a

$$\Psi(\hat{w}(.)) = 0 .$$

Porovnáme-li (22) a (20) zjistíme, že musí být

$$\hat{w}(x) - w(x, \gamma_0) = (\hat{w}(r_0) - \gamma_0) \exp \int_{r_0}^x \beta(s, y_-(s))\, \mathrm{d}s .$$

Vidíme, že $\hat{w}(x) - w(x, \gamma_0)$ nemění znaménko, jelikož však $\Psi(\hat{w}(.) - w(., \gamma_0)) = 0$, z lemmatu 3 plyne, že musí být $\hat{w}(r_0) = \gamma_0$, tedy $w(x, \gamma_0) = \hat{w}(x)$. Dokázali jsme, že

$$\lim_{n \to \infty} w_n(x) = w(x, \gamma_0) . \tag{23}$$

Platí

$$v(x, \eta_n) = v(r_0, \eta_n) + \int_{r_0}^{x} w_n(s) \, ds .$$

Vyjádříme-li $v(r_0, \eta_n)$ prostřednictvím w_n s použitím druhé z podmínek (9), nahlédneme z (23), že je $\lim_{n \to \infty} v(r_0, \eta_n) = c_0$. Celkem tedy vidíme, že je

$$\lim_{n \to \infty} v(x, \eta_n) = \hat{u}(x) . \tag{24}$$

(24) spolu s (18) dává $\hat{u}(x) = \sup_{\eta \in M} v(x, \eta) = u(x)$.

Poznámka 1. Dochází-li k zániku procesu při prvním dosažení hranic, tj. má-li podmínka (1) speciální tvar

$$u(r_0) = 0 , \quad u(r_1) = 0 ,$$

možno úlohu o optimálním řízení rozšířiti o předpoklad, že zisk se zvýší o veličinu C_0 resp. C_1, skončil-li proces na hranici r_0 resp. r_1. Při zvoleném $\eta \in M$ vyhovuje očekávaná hodnota $v_0(x, \eta)$ zvýšení zisku za podmínky $X_0 = x$ rovnici

$$a(x, \eta(x)) \frac{d^2}{dx^2} v_0 + b(x, \eta(x)) \frac{d}{dx} v_0 = 0$$

s podmínkami $v_0(r_0, \eta) = C_0$, $v_0(r_1, \eta) = C_1$. Celkový očekávaný zisk $v(x, \eta)$ splňuje tedy (4) s podmínkami $v(r_0, \eta) = C_0$, $v(r_1, \eta) = C_1$.

Tato úloha (také v nehomogenním a vícerozměrném případě) je studována v [2]. K jejímu řešení je třeba klásti $c_0 = C_0$ a najíti γ_0 tak, aby platilo

$$\int_{r_0}^{r_1} w(s, \gamma_0) \, ds = C_1 - C_0 .$$

Poznámka 2. Při numerickém řešení úlohy možno zvoliti tento postup: Dle lemmatu 3 existuje $z_0 \in \langle r_0, r_1 \rangle$, pro které $w(z_0, \gamma_0) = 0$. Jelikož z_0 zpravidla představuje extrémní hodnotu funkce $u(x)$, můžeme jeho přibližnou polohu odhadnouti z reálné interpretace podmínek (1). Najdeme tedy řešení $\hat{w}(x, z)$ rovnice (8), splňující $\hat{w}(z, z) = 0$ a potom postupnými aproximacemi hodnotu z_0, pro níž $\Psi(\hat{w}(., z_0)) = 0$. V případě, kdy $\beta(x, y)$ a $\varphi(x, y)$ nezávisejí na x, platí $\hat{w}(x, z_2) = \hat{w}(x + z_1 - z_2, z_1)$.

Příklad. Předpokládejme, že u soustavy, která koná náhodný pohyb v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, $a(x, y) \equiv 1$, můžeme měnit koeficient lokálního posunutí v mezích $\langle -1, 1 \rangle$, tj. $b(x, y) = y$. Když soustava dosáhne hodnoty -1, s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ zanikne a s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ začne svůj pohyb znovu v bodě 0. Když dosáhne hodnoty $+1$, je částečně odražena s rovnými intensitami pro odražení a absorpci. Podmínky (1) mají tedy tvar

$$4u(-1) = 3u(0)\,, \quad u(1) = -\,u'(1)\,.$$

Chceme minimalisovati očekávanou dobu zániku soustavy v případě, že náklad na působení y po dobu $\mathrm{d}t$ je $y^2\,\mathrm{d}t$. Máme tedy $c(x, y) = -\,y^2 - 1$. Dále

$$\Phi(x, w) = -\max_y yw - y^2 - 1 = 1 - \frac{w^2}{4}$$

pro $|w| \leqq 2$, při čemž maxima je dosaženo pro $y = \frac{1}{2}w$. Řešením (8) dostáváme optimální řízení

$$y_-(x) = \tfrac{1}{2}\hat{w}(x, z_0) = (e^x - e^{z_0})\,(e^x + e^{z_0})^{-1}\,.$$

Z podmínky $\Psi(w(., z_0)) = 0$ byla vypočtena přibližná hodnota $z_0 = 0{,}0954$.

Literatura

[1] *W. Feller*: The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. Ann. of Mathematics 55 (1952), 468–519.

[2] *W. H. Fleming*: Some Markovian Optimization Problems. J. of Math. and Mech. 12 (1963), 131–140.

[3] *E. Kamke*: Das Lebesgue-Stieltjes-Integral. Leipzig, 1956.

[4] *V. V. Stěpanov*: Kurs diferenciálních rovnic. Praha, 1950.

Резюме

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ОДНОМЕРНЫМИ ДИФФУЗИОННЫМИ ПРОЦЕССАМИ

ПЕТР МАНДЛ (Petr Mandl)

Работа посвящена однородным одномерным диффузионным процессам на интервале $\langle r_0, r_1 \rangle$, коэффициент локального сноса и коэффициент диффузии которых зависит от параметра y. Поведение процесса при достижении границ определяется условиями (1). Задача состоит в выбирании значения $\eta(x)$ параметра y в зависимости от значения x процесса таким образом, чтобы максимализировать (3). Максимум (3) удовлетворяет уравнению (5) с условиями (1). Одно из оптимальных управлений задается с помощью (19).

Zusammenfassung

ÜBER DIE OPTIMALE REGELUNG EINDIMENSIONALER DIFFUSIONSPROZESSE

PETR MANDL

Die Arbeit befasst sich mit homogenen eindimensionalen Diffusionsprozessen auf dem Intervalle $\langle r_0, r_1 \rangle$, deren lokale Verschiebungskoeffizient, sowie der Diffusionskoeffizient von einem Parameter y abhängen. Der Verlauf des Prozesses bei Erreichung der Grenzen ist durch die Bedingungen (1) gegeben. Die Aufgabe besteht darin, den Wert $\eta(x)$ des Parameters y in Abhängigkeit von dem Werte x des Prozesses so zu wählen, dass (3) maximal wird. Das Maximum von (3) erfüllt die Gleichung (5) mit den Bedingungen (1). Eine optimale Regelung wird durch (19) gegeben.

Adresa autora: C. Sc. *Petr Mandl*, Ústav teorie informace a automatizace ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.