Aplikace matematiky

Rudolf Krautstengl

K problému urychlování konvergence jednoduchého iteračního procesu pro řešení soustavy lineárních rovnic

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 6, 399–409

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102918`

K PROBLÉMU URYCHLOVÁNÍ KONVERGENCE JEDNODUCHÉHO ITERAČNÍHO PROCESU PRO ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

RUDOLF KRAUTSTENGL

(Došlo dne 25. ledna 1964.)

V práci se diskutuje proces postupných aproximací pro řešení soustavy lineárních rovnic. Na základě vyslovených a dokázaných vět o posloupnostech vektorů chyby se dochází k urychlovací formuli iteračního procesu, která nevyžaduje znalosti vlastních hodnot matice vystupující ve výrazu definujícím iterační proces.

Mějme dán systém n-lineárních rovnic o n-neznámých

$$AX = F, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{A}$ je regulární reálná matice soustavy, $\boldsymbol{X}$-vektor neznámých a $\boldsymbol{F}$-reálný vektor pravých stran.

Systém (1) zapíšeme ve tvaru

$$X = BX + G, \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{E}$ je jednotková matice. Postupné aproximace nacházíme podle formule

$$X^{(k)} = BX^{(k-1)} + G, \tag{3}$$

kde vektor počátečního přiblížení $\boldsymbol{X}^{(0)}$ volíme libovolně. Limitním přechodem v (3) a srovnáním s (2) se ukáže, že když iterační proces (3) konverguje, tak konverguje k přesnému řešení soustavy (1). Dále se dá dokázat ([1]), že proces (3) je konvergentní pro libovolný počáteční vektor právě tehdy, když všechna vlastní čísla matice $\boldsymbol{B}$ jsou v absolutní hodnotě menší než jedna.

Dále budeme předpokládat, že vlastní čísla λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, matice $\boldsymbol{B}$ jsou očíslována v nerostoucím pořádku podle absolutní hodnoty

$$|\lambda_1| \geqq |\lambda_2| \geqq \ldots \geqq |\lambda_n| \tag{4}$$

a že

$$1 > |\lambda_1|. \tag{5}$$

Potom iterační proces (3) konverguje při libovolném počátečním vektoru $\boldsymbol{X}^{(0)}$ k přesnému řešení soustavy (1), které všude budeme označovat $\boldsymbol{X}^*$.

Nejprve budeme předpokládat, že matice $\boldsymbol{B}$ má jednoduchou strukturu, tj. existuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů matice $\boldsymbol{B}$. Nechť vlastní hodnotě λ_i odpovídá vlastní vektor $\boldsymbol{Z}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Označíme komponenty vektoru $\boldsymbol{Z}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jako z_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nechť počáteční aproximace $\boldsymbol{X}^{(0)}$ je zvolena tak, že ve vyjádření vektoru $\boldsymbol{R}^{(0)} = \boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{X}^{(0)}$

$$\boldsymbol{R}^{(0)} = \alpha_1 \boldsymbol{Z}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{Z}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{Z}_n \tag{6}$$

je

$$\alpha_1 \neq 0 . \tag{7}$$

Označme dále vektor

$$\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{X}^{(k)} = \boldsymbol{R}^{(k)} , \tag{8}$$

kde $\boldsymbol{X}^{(k)}$ je k-tá aproximace vypočtená podle formule (3).

Nechť Ω je množina těch indexů $j = 1, 2, \ldots, n$, pro něž platí

$$z_{1j} \neq 0 . \tag{9}$$

Dále předpokládejme

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| . \tag{10}$$

Věta 1. *K tomu, aby od určitého indexu k_0 počínaje byly posloupnosti $\{r_i^{(k)}\}$, $i \in \Omega$, alternující, tj. aby existoval index k_0 tak, že*

$$\operatorname{sgn} r_i^{(k+1)} = - \operatorname{sgn} r_i^{(k)} \tag{11}$$

pro všechna $k \geqq k_0$, $i \in \Omega$, je nutné a stačí, aby

$$\lambda_1 < 0 . \tag{12}$$

Důkaz. Především si uvědomíme, že množina Ω je neprázdná, neboť v opačném případě by vlastní vektor $\boldsymbol{Z}_1$ matice $\boldsymbol{B}$ byl nulový. Poněvadž vektor $\boldsymbol{X}^*$ jako přesné řešení soustavy (1) vyhovuje ekvivalentnímu zápisu (2), plyne z (2), (3) a (8) vyjádření pro vektor $\boldsymbol{R}^{(k)}$

$$\boldsymbol{R}^{(k)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{(k-1)} ; \tag{13}$$

odsud a z (6) dostáváme

$$\boldsymbol{R}^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k \boldsymbol{Z}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \boldsymbol{Z}_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k \boldsymbol{Z}_n . \tag{14}$$

Označme vektor

$$\boldsymbol{R}^{(k)} - \alpha_1 \lambda_1^k \boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{U}^{(k)} \tag{15}$$

a vektor

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \boldsymbol{U}^{(k)} = \boldsymbol{V}^{(k)} . \tag{16}$$

Z (14) a (16) vyplývá

(17) $$\boldsymbol{R}^{(k)} = \lambda_1^k\{\alpha_1 \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{V}^{(k)}\}\,.$$

Označme

(18) $$\sum_{i=2}^{n} |\alpha_i|\, \|\boldsymbol{Z}_i\| = \eta\,,$$

kde jako normu bereme maximum z modulů komponent, tj. první normu.

Z (18) a vlastností normy plyne

(19) $$\|\boldsymbol{U}^{(0)}\| \leqq \eta\,.$$

Indukcí snadno dokážeme za použití (4), (14) a (15)

(20) $$\|\boldsymbol{U}^{(l)}\| \leqq |\lambda_2|^l \,.\, \eta\,.$$

Odsud a z (16) dostáváme

(21) $$\|\boldsymbol{V}^{(l)}\| \leqq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^l .\, \eta\,.$$

Označme

(22) $$\min_{j \in \Omega} |\alpha_1| \,.\, |z_{1j}| = c\,.$$

Zřejmě platí

(23) $$c > 0\,.$$

Nyní jestliže

(24) $$\eta = 0\,,$$

pak všechny vektory $\boldsymbol{U}^{(k)}$ a tedy i $\boldsymbol{V}^{(k)}$ jsou nulové. Tvrzení věty pak plyne z (17), přičemž $k_0 = 0$.

Zbývá tedy rozebrat případ

(25) $$\eta > 0\,.$$

Z (21) a (10) plyne, že vektory $\boldsymbol{V}^{(l)}$ konvergují k nulovému vektoru.

Označme l_0 první index l, pro který je splněno

(26) $$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{l_0} .\, \eta < c\,.$$

Z (26) vyplývá

(27) $$l_0 > \frac{\ln \dfrac{c}{\eta}}{\ln \left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|}\,;$$

je tedy

$$(28)\qquad l_0 = \max\left(0, \left[\frac{\ln \frac{c}{\eta}}{\ln \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|}\right] + 1\right).$$

Poněvadž vztah (26) je splněn i pro všechna $l > l_0$, plyne ze (17) tvrzení věty, přičemž pro index k_0, vyskytující se ve formulaci věty, platí

$$(29)\qquad 0 \leqq k_0 \leqq l_0 .$$

Věta je dokázána.

Poznámka 1. V průběhu důkazu jsme zjistili, že když platí (24), pak

$$(30)\qquad k_0 = 0 .$$

Je-li

$$(31)\qquad 0 < \eta < c ,$$

pak z (28) a (10) plyne, že

$$(32)\qquad l_0 = 0 .$$

Spojením (32) a (29) rovněž dostáváme (30). To tedy znamená, že (30) je splněno pro

$$(33)\qquad 0 \leqq \eta < c .$$

Obdobně můžeme vyslovit a dokázat následující větu:

Věta 1'. *K tomu, aby od určitého indexu k_0 počínaje platilo, že všechny posloupnosti $\{r_i^{(k)}\}$, $i \in \Omega$, mají vlastnost*

$$(34)\qquad \operatorname{sgn} r_i^{(k+1)} = \operatorname{sgn} r_i^{(k)}$$

pro všechna $k \geqq k_0$, je nutné a stačí, aby

$$(35)\qquad \lambda_1 > 0 .$$

Poznámka 2. V průběhu důkazu věty 1 jsme nepoužívali podmínky (5), věta tedy platí i bez tohoto předpokladu, to znamená i pro ne vždy konvergentní procesy tvaru (3).

Dále je možné větu 1 zesílit vypuštěním předpokladu jednoduché struktury u matice $\mathbf{B}$. Z (10) totiž vyplývá existence vlastního vektoru $\mathbf{Z}_1$ matice $\mathbf{B}$ příslušného k λ_1, takže (17) zůstane v platnosti, kde opět posloupnost $\{\|\mathbf{V}^{(k)}\|\}$ je klesající a konverguje k nule. Obecně je ovšem konvergence posloupnosti k nulovému vektoru pomalejší než za předpokladu jednoduché struktury matice $\mathbf{B}$.

Zatím jsme nechali otevřenou otázku chování posloupností $\{r_i^{(k)}\}$ odpovídajících složek posloupnosti vektorů $\{\mathbf{R}^{(k)}\}$ pro $i \notin \Omega$. Toho si všimneme v další větě.

Budiž Ω_n množina všech indexů

$$1, 2, \ldots, n .$$

Věta 2. *Nechť **B** je matice jednoduché struktury. Nechť množina $\Omega_n \setminus \Omega$ je neprázdná a nechť s je libovolný prvek této množiny. Nechť t je nejmenší prvek množiny Ω_n, pro který je*

$$z_{ts} \neq 0 . \tag{36}$$

Budiž dále v rozložení (6)

$$\alpha_t \neq 0 \tag{37}$$

a nechť λ_t je reálné, pro které:

je-li $t < n$, platí

$$|\lambda_t| > |\lambda_{t+1}| \tag{38}$$

a je-li $t = n$, pak

$$|\lambda_n| > 0 . \tag{38'}$$

Potom nutná a postačující podmínka pro to, aby existoval index k_0 tak, že

$$\operatorname{sgn} r_s^{(k+1)} = - \operatorname{sgn} r_s^{(k)} \tag{39}$$

pro všechna $k \geqq k_0$, je

$$\lambda_t < 0 . \tag{40}$$

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že takové t, pro něž platí (36), opravdu existuje. V opačném případě by s-tá složka všech vektorů $\mathbf{Z}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, byla nulová, což je spor s jejich předpokládanou lineární nezávislostí.

Nechť nejprve je $t < n$.

Pro složku $r_s^{(k)}$ plyne z (14)

$$r_s^{(k)} = \alpha_t \lambda_t^k z_{ts} + \alpha_{t+1} \lambda_{t+1}^k z_{t+1\,s} + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k z_{ns} . \tag{41}$$

Je-li $t = n$, pak

$$r_s^{(k)} = \alpha_n \lambda_n^k z_{ns} . \tag{42}$$

Uvědomíme-li si rozklad (41) a rozklad (42), pak zbytek důkazu probíhá analogicky jako u věty 1.

Poznámka 3. U věty 2 jsme předpokládali, že λ_t je reálné, zatímco u věty 1 jsme toto pro λ_1 nepředpokládali. U věty 1 však pro λ_1 tento fakt plynul přímo z podmínky (10), kdežto u analogické podmínky (38) ve formulaci věty 2 by mohlo být $|\lambda_{t-1}| = |\lambda_t|$ a tudíž nebylo by vyloučeno, že λ_t je komplexní vlastní číslo. Naprosto analogicky jako u věty 1 můžeme vyslovit a dokázat větu:

Věta 2'. *Za týchž předpokladů, za nichž jsme dokázali větu 2, platí, že pro existenci indexu k_0 tak, aby*

$$\operatorname{sgn} r_s^{(k+1)} = \operatorname{sgn} r_s^{(k)} \tag{43}$$

pro všechna $k \geqq k_0$, je nutné a stačí, aby

$$\lambda_t > 0\,. \tag{44}$$

Nyní se vrátíme k původnímu tématu – problému zrychlování konvergence iteračního procesu (3), od kterého jsme se zdánlivě poněkud vzdálili. Věta 1 ve spojení s (8) nás přivádí na myšlenku vzít pro iterační proces (3) po $k + 1$ krocích za nový počáteční vektor

$$\beta(\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{X}^{(k+1)})\,. \tag{45}$$

Koeficient β určíme ihned z podmínky, že (45) musí v limitě být rovno $\mathbf{X}^*$; tedy

$$\beta = \tfrac{1}{2} \tag{46}$$

a (45) přejde v

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{X}^{(k+1)})\,. \tag{47}$$

Vyšetříme, za jakých podmínek vektor (47) bude blíže k vektoru přesného řešení $\mathbf{X}^*$ soustavy (1) než vektor $\mathbf{X}^{(k+1)}$, neboli kdy tím, že vezmeme místo vektoru $\mathbf{X}^{(k+1)}$ jako nový počáteční vektor iteračního procesu (3) vektor (47), proces (3) urychlíme.

Věta 3. *Nechť jsou splněny předpoklady věty* 1 *a nechť platí*

$$\lambda_1 < -\tfrac{1}{3}\,. \tag{48}$$

Potom existuje index k_0 tak, že pro všechna $k > k_0$ platí:

Vezmeme-li za nový počáteční vektor v iteračním procesu (3) *vektor* (47), *dosáhneme urychlení procesu* (3).

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$\|\mathbf{Z}_i\| = 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{49}$$

Odhadneme shora normu

$$\|\mathbf{X}^* - \tfrac{1}{2}(\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{X}^{(k+1)})\|\,. \tag{50}$$

Využijeme (8) a (15) a dostaneme

$$\|\mathbf{X}^* - \tfrac{1}{2}(\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{X}^{(k+1)})\| = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{R}^{(k)} + \mathbf{R}^{(k+1)}\| \leqq |\alpha_1| \frac{1 + \lambda_1}{2} |\lambda_1|^k + \tag{51}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\|\mathbf{U}^{(k)} + \mathbf{U}^{(k+1)}\| \leqq |\alpha_1| \frac{1 + \lambda_1}{2} |\lambda_1|^k + \|\mathbf{U}^{(k)}\|\,.$$

Dále odhadneme zdola normu

$$\|X^* - X^{(k+1)}\| = \|R^{(k+1)}\|. \tag{52}$$

Využitím (8) a (15) máme

$$\|R^{(k+1)}\| \geqq |\alpha_1|\,|\lambda_1|^{k+1} - \|U^{(k+1)}\| \geqq |\alpha_1|\,|\lambda_1|^{k+1} - \|U^{(k)}\|. \tag{53}$$

Jestliže bude splněna podmínka

$$|\alpha_1|\,\frac{1+\lambda_1}{2}\,|\lambda_1|^k + \|U^{(k)}\| \leqq -\|U^{(k)}\| + |\alpha_1|\,|\lambda_1|^{k+1}, \tag{54}$$

pak je z (53) a (51) zřejmé, že bude platit

$$\|X^* - X^{(k+1)}\| \geqq \|X^* - \tfrac{1}{2}(X^{(k)} + X^{(k+1)})\|. \tag{55}$$

Avšak podmínka (54) je ekvivalentní vztahu

$$\|U^{(k)}\| \leqq \tfrac{1}{2}|\alpha_1|\,|\lambda_1|^k \{|\lambda_1| - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + 1)\}, \tag{56}$$

neboli vzhledem k (48)

$$\|U^{(k)}\| \leqq \tfrac{1}{4}|\alpha_1|\,|\lambda_1|^k \{3|\lambda_1| - 1\}. \tag{57}$$

Poněvadž platí

$$\|U^{(k)}\| \leqq |\lambda_2|^k \sum_{i=2}^{n} |\alpha_i|, \tag{58}$$

stačí vzít za k_0 index k takový, že

$$|\lambda_2|^k \sum_{i=2}^{n} |\alpha_i| < \tfrac{1}{4}|\alpha_1|\,|\lambda_1|^k \{3|\lambda_1| - 1\}. \tag{59}$$

Případ $\lambda_2 \sum_{i=2}^{n} |\alpha_i| = 0$ je triviální, poněvadž pak máme $k_0 = 0$.

V případě $\lambda_2 \sum_{i=2}^{n} |\alpha_i| \neq 0$ dostáváme

$$k_0 = \max \left\{ 0, \left[\frac{\ln \dfrac{4 \sum_{i=2}^{n} |\alpha_i|}{|\alpha_1|\,\{3|\lambda_1| - 1\}}}{\ln \left|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|} \right] + 1 \right\}. \tag{60}$$

Poněvadž (59) je splněno i pro všechna $k > k_0$, je důkaz proveden.

Poznámka 4. Tvrzení věty 3 můžeme analogickým způsobem dokázat i bez předpokladu o jednoduché struktuře matice $\boldsymbol{B}$; pak ale v (58) a dále vystupuje jako faktor index k, takže vzorce se stávají méně přehlednými.

Poznámka 5. V tomto článku jsme se zabývali urychlováním konvergence iteračního procesu (3) za předpokladu, že matice $\boldsymbol{B}$ má vlastní číslo λ_1 vyhovující podmínce (4), (5) a (10). Tento případ diskutuje metoda L. A. Ljusternika, jejíž výhodou je to, že pomocí ní se prakticky vyanuluje koeficient při λ_1^k v rozkladu vektoru $\boldsymbol{R}^{(k)}$ a nevýhodou to, že vyžaduje znalost vlastního čísla λ_1.

Zde jsme došli k urychlovací formuli (47) použitelné pro λ_1 vyhovující podmínce (48). Případ λ_1, pro něž

$$-\tfrac{1}{3} \leqq \lambda_1 < 0\,, \tag{57}$$

není tak zajímavý, poněvadž proces (3) pak konverguje dostatečně rychle i bez urychlování.

Urychlovací formule (47) je speciálním případem formule

$$\alpha \boldsymbol{X}^{(k)} + (1 - \alpha)\, \boldsymbol{X}^{(k+1)}\,, \tag{58}$$

kde $\alpha = \frac{1}{2}$.

Obecnější případ – formule (58) – bude diskutován v práci, která se připravuje do tisku.

Praktické výsledky s urychlováním konvergence iteračního procesu (3) podle formule (47) potvrzují teorii.

Literatura

[1] *Д. К. Фаддеев* и *В. Н. Фаддеева:* Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, Москва 1960.

[2] *И. С. Березин* и *Н. П. Жидков:* Методы вычислений, т. 2., Физматгиз, Москва 1960.

Резюме

К ПРОБЛЕМЕ УСКОРЕНИЯ СХОДИМОСТИ ПРОСТОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

РУДОЛЬФ КРАУТШТЕНГЛ (Rudolf Krautstengl)

В работе рассматривается процесс последовательных приближений

$$\boldsymbol{X}^{(k)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{(k-1)} + \boldsymbol{G} \tag{1}$$

для решения системы линейных уравнений

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}\,. \tag{2}$$

У матрицы $\mathbf{B}$ предполагается наличие единственного максимального по модулю собственного числа λ_1. Вводится последовательность векторов

$$\mathbf{R}^{(k)} \equiv \mathbf{X}^* - \mathbf{X}^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{Z}_1 + \mathbf{U}^{(k)}, \tag{3}$$

где $\mathbf{X}^*$ — точное решение системы (2), и доказываются теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\alpha_1 \neq 0$ и пусть Ω — множество тех индексов $j = 1, 2, \ldots, n$, для которых $z_{1j} \neq 0$, где z_{1l} — компоненты вектора $\mathbf{Z}_1$ матрицы $\mathbf{B}$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Тогда существует индекс k_0 так, что $\operatorname{sgn} r_i^{(k+1)} = -\operatorname{sgn} r_i^{(k)}$ для всех $k \geqq k_0$, $i \in \Omega$, в том и только в том случае, когда $\lambda_1 < 0$.*

Теорема 1'. *Для того, чтобы существовал индекс k_0 так, что $\operatorname{sgn} r_i^{(k+1)} = \operatorname{sgn} r_i^{(k)}$ для всех $k \geqq k_0$, $i \in \Omega$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_1 > 0$.*

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{B}$ — матрица простой структуры. Пусть множество $\Omega_n \setminus \Omega$ непустое, причем Ω_n — множество всех индексов $1, 2, \ldots, n$, и пусть s — любой элемент этого множества. Пусть t = наименьший элемент множества Ω_n, для которого $z_{ts} \neq 0$, где z_{ij} — компоненты собственного вектора $\mathbf{Z}_i$ матрицы $\mathbf{B}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Пусть в*

$$\mathbf{R}^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{Z}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{Z}_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{Z}_n \tag{4}$$

коэффициент $\alpha_t \neq 0$. Предположим, что λ_t — действительное число, для которого имеет место: если $t < n$, то $|\lambda_t| > |\lambda_{t+1}|$ и если $t = n$, то $|\lambda_n| > 0$. Тогда необходимым и достаточным условием для существования индекса k_0 такого, что $\operatorname{sgn} r_s^{(k+1)} = -\operatorname{sgn} r_s^{(k)}$ для всех $k \geqq k_0$, является $\lambda_t < 0$.

Теорема 2'. *Пусть выполнены предположения теоремы 2. Тогда для того, чтобы существовал индекс k_0 так, что $\operatorname{sgn} r_s^{(k+1)} = \operatorname{sgn} r_s^{(k)}$ для всех $k \geqq k_0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_t > 0$.*

Наконец доказывается, что если мы возьмем в качестве нового исходного вектора для процесса (1) вектор

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{X}^{(k+1)}), \tag{5}$$

добьемся ускорения процесса (1) в случае

$$-1 < \lambda_1 < -\tfrac{1}{3} \tag{6}$$

для достаточного больших k.

В конце работы помещена заметка, что (5) является частным случаем формулы

$$\alpha \mathbf{X}^{(k)} + (1 - \alpha)\, \mathbf{X}^{(k+1)}, \tag{7}$$

которая будет разобрана в работе, готовящейся к печати.

Summary

A NOTE ON INCREASING CONVERGENCE RATE OF AN ITERATIVE SOLUTION OF LINEAR SYSTEMS

RUDOLF KRAUTSTENGL

The iterative process

$$\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{X}^{(k-1)} + \mathbf{G} \tag{1}$$

for solving a system of simultaneous linear equations

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{F} \tag{2}$$

is discussed.

Let $\mathbf{B}$ be a matrix with a dominant eigenvalue λ_1. Let $\mathbf{R}^{(k)}$ be a vector of the following form

$$\mathbf{R}^{(k)} \equiv \mathbf{X}^* - \mathbf{X}^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{Z}_1 + \mathbf{U}^{(k)} \tag{3}$$

where the vector $\mathbf{X}^*$ is the solution of (2) and $\mathbf{Z}_1$ is the eigenvector corresponding to λ_1.

The following theorems are proved:

Theorem 1. *Let $\alpha_1 \neq 0$ and Ω be a set of indices $j = 1, 2, \ldots, n$ for which $z_{1j} \neq 0$; z_{1_l}, $l = 1, 2, \ldots, n$, are components of the eigenvector $\mathbf{Z}_1$ of the matrix $\mathbf{B}$. Then there exists an index k_0 such that $\operatorname{sgn} r_i^{(k+1)} = -\operatorname{sgn} r_i^{(k)}$ for all $k \geqq k_0$, $i \in \Omega$, if and only if $\lambda_1 < 0$.*

Theorem 1'. *If and only if $\lambda_1 > 0$ then there exists such an index k_0 that $\operatorname{sgn} r_i^{(k+1)} = \operatorname{sgn} r_i^{(k)}$ for all $k \geqq k_0$, $i \in \Omega$.*

Theorem 2. *Let $\mathbf{B}$ be a matrix with a simple structure. Let Ω_n be the set $1, 2, \ldots, n$, and assume $s \in \Omega_n - \Omega$. Let t be the smallest element of the set Ω_n for which $z_{ts} \neq 0$; z_{ij} are the components of the eigenvector $\mathbf{Z}_i$ of the matrix $\mathbf{B}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Let us suppose that in the following decomposition*

$$\mathbf{R}^{(k)} = \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{Z}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{Z}_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{Z}_n \tag{4}$$

the coefficient $\alpha_t \neq 0$. Let λ_t be a real eigenvalue for which the following relations hold:

(a) *if $t < n$, then $|\lambda_t| > |\lambda_{t+1}|$;*
(b) *if $t = n$, then $|\lambda_n| > 0$.*

Then there exists an index k_0 such that $\operatorname{sgn} r_s^{(k+1)} = -\operatorname{sgn} r_s^{(k)}$ for all $k \geqq k_0$ if and only if $\lambda_t < 0$.

Theorem 2'. *Under the assumptions of theorem* 2, *there exists an index* k_0 *such that* $\operatorname{sgn} r_s^{(k+1)} = \operatorname{sgn} r_s^{(k)}$ *for all* $k \geqq k_0$, *if and only if* $\lambda_t > 0$.

In the present paper it is proved that by taking the vector

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{X}^{(k)} + \mathbf{X}^{(k+1)})\,, \tag{5}$$

the convergence rate of the process (1) is increased if

$$-1 < \lambda_1 < -\tfrac{1}{3} \text{ for sufficiently large } k\,. \tag{6}$$

Formula (5) is a special case of the more general

$$\alpha\mathbf{X}^{(k)} + (1 - \alpha)\,\mathbf{X}^{(k+1)}\,. \tag{7}$$

Formula (7) will be discussed in a later paper.

Adresa autora: *Rudolf Krautstengl*, Centrum numerické matematiky Karlovy university, Malostranské nám. 25, Praha 1.