STABILITA ANALOGOVÉHO ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

JOSEF MATYÁŠ

(Došlo dne 25. dubna 1961.)

V článku je popsán nový jednoduchý způsob řešení soustav lineárních algebraických rovnic na analogových počítačích.

1. ÚVOD

Je všeobecně známo, že velmi mnoho výzkumných problémů i úloh z technické praxe vede na řešení soustav lineárních algebraických rovnic

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{1}$$

kde $\mathbf{A}$ je čtvercová regulární matice řádu n

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & \ldots, & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & \ldots, & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2}$$

a $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$ jsou vektory

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

přičemž $\mathbf{b}$ je dáno a vektor $\mathbf{x}$ představuje řešení soustavy (1). Protože předpokládáme regulární matici soustavy $\mathbf{A}$, platí

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\,. \tag{4}$$

Výpočet inversní matice $\mathbf{A}^{-1}$ je však velmi pracný a proto byla navržena celá řada metod řešení soustav tvaru (1), které nevyžadují inversi matice soustavy $\mathbf{A}$; jsou to především numerické metody.

Řešení soustav tvaru (1) pro větší počet neznámých je prakticky neproveditelné bez použití samočinných počítacích strojů. Používají se především číslicové počítače, kde se řešení provádí podrobně vypracovanými numerickými metodami. Je však možno (viz např. [3, 4, 5, 8]) řešení provádět rovněž na analogových počítačích.

Základní otázkou při číslicovém řešení postupnými aproximacemi je otázka jejich konvergence. Při analogovém řešení je to otázka stability počítací sítě. Podrobný popis numerických metod řešení včetně rozboru konvergence postupných aproximací je v [1].

Při analogovém řešení se obvykle nahradí daná soustava (1) soustavou diferenciálních rovnic

$$(5) \qquad (\boldsymbol{A} + p\mathbf{E})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}\,,$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice a p je diferenciální operátor $p = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$. Za předpokladu, že charakteristická rovnice matice $\boldsymbol{A}$ má kořeny pouze v levé polorovině, je soustava (5) stabilní a v důsledku konstantního vektoru $\boldsymbol{b}$ platí

$$(6) \qquad \lim_{t \to \infty} p\mathbf{E}\,\boldsymbol{u}(t) = \lim_{t \to \infty} p\,\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0}\,,$$

takže řešení $\boldsymbol{u}$ soustavy (5) je v ustáleném stavu rovno právě řešení soustavy (1), tj. platí

$$(7) \qquad \lim_{t \to \infty} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{x}\,.$$

Tato metoda je tedy omezena na případy, kdy (5) je stabilní soustava. Jestliže matice $\boldsymbol{A}$ nemá tuto vlastnost, potom je třeba [4, 5] řešit místo soustavy (1) např. soustavu

$$(8) \qquad \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{b}\,.$$

Všechny kořeny charakteristické rovnice matice $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ jsou reálné záporné, což zaručuje stabilitu soustavy

$$(9) \qquad (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} + p\mathbf{E})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{b}\,.$$

K tomu je však třeba vypočítat součin matic $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ a vektor na pravé straně $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{b}$, takže příprava úlohy je velmi pracná a zdlouhavá.

Potřebné maticové součiny je však možno provádět také přímo na počítači [3, 4, 5] tím, že řešíme např. soustavy

$$(10) \qquad \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\,, \quad \boldsymbol{A}'\boldsymbol{y} = p\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}\,.$$

V tomto případě je příprava úlohy jednoduchá. Zato je však složitá počítací síť. Řeší se vlastně dvě soustavy o n neznámých, což vyžaduje dvojnásobné množství počítacích obvodů.

V knize [3] se navrhuje nahradit soustavu (1) soustavou diferenciálních rovnic

$$(11) \qquad (\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{b}\,,$$

kde $\boldsymbol{C}$ je diagonální matice, takže soustava (11) obsahuje n konstantních parametrů c_i. Autor této metody tvrdí, že variací parametrů c_i lze vždycky dosáhnout stability soustavy (11); tvrzení však nedokazuje. Obecně toto tvrzení neplatí.

K dosažení stability počítací sítě je tedy třeba (i za předpokladu pravdivosti uvedeného tvrzení) měnit velikosti parametrů c_i tak dlouho, až dosáhneme stabilního stavu počítací sítě. Takové určování parametrů by patrně bylo velmi zdlouhavé.

2. FORMULACE ÚLOHY

Jestliže $\mathbf{C}$ je libovolná regulární matice, potom vynásobením zleva maticí $\mathbf{C}$ se soustava (1) transformuje na

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{d}\,, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{CA}\,, \quad \mathbf{d} = \mathbf{Cb}\,. \tag{12}$$

Matici $\mathbf{C}$ nazveme transformační maticí nebo krátce transformací soustavy (1) (resp. transformací matice $\mathbf{A}$).

Determinant

$$|\mathbf{D} + p\mathbf{E}| = K_n \tag{13}$$

nazveme charakteristickým mnohočlenem a rovnici

$$|\mathbf{D} + p\mathbf{E}| = K_n = 0 \tag{14}$$

charakteristickou rovnicí matice $\mathbf{D}$.

Poznámka. Obvyklejší definici charakteristické rovnice dostaneme substitucí $p = -\lambda$ (viz např. [1, 2]). V tomto článku se přidržíme definice (14) z toho důvodu, že soustava diferenciálních rovnic se považuje za stabilní, jestliže všechny kořeny charakteristické rovnice leží v levé polorovině.

Matici $\mathbf{C}$ nazveme stabilní transformací matice $\mathbf{A}$ (resp. soustavy (1)), jestliže charakteristický mnohočlen (13) matice $\mathbf{D} = \mathbf{CA}$ je Hurtwitzův mnohočlen. V tomto případě leží všechny kořeny charakteristické rovnice (14) v levé polorovině, což zaručuje stabilitu počítací sítě pro řešení soustavy

$$(\mathbf{D} + p\mathbf{E})\,\mathbf{u} = \mathbf{d}\,. \tag{15}$$

Matice $\mathbf{C} = \mathbf{A}'$ je příkladem takové stabilní transformace. Jak jsme již ukázali, vyžaduje použití této transformace buď pracnou a zdlouhavou přípravu úlohy nebo dvojnásobný počet počítacích obvodů pro řešení.

Lze očekávat, že ke každé regulární matici $\mathbf{A}$ existuje velké množství stabilních transformací. Pro praktické použití však budou mít největší význam transformace co nejjednodušší. Takovou velmi jednoduchou transformací je transformace diagonální

$$^0\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & c_2, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & c_n \end{bmatrix} = \{c_i\} \tag{16}$$

nebo transformační matice $\mathbf{C}$, kterou dostaneme z matice ${}^0\mathbf{C}$ (viz 16)) permutací řádků nebo sloupců. $\mathbf{C}$ je tedy regulární matice, která má pouze n od nuly různých prvků.

Definice 1. *Regulární matici $\mathbf{C}$, která má pouze n od nuly různých prvků (n je řád matice $\mathbf{C}$) nazveme prostou maticí (popř. prostou transformací).*

Naši úlohu si nyní formulujeme takto: K libovolné regulární matici $\mathbf{A}$ je třeba určit stabilní prostou transformaci $\mathbf{C}$ (pokud existuje).

V odstavci 3 je dokázána existence takové stabilní prosté transformace $\mathbf{C}$ pro každou regulární matici $\mathbf{A}$. Hodnoty c_k nenulových prvků této transformace je možno určit při sestavování počítací sítě na analogovém počítači bez jakýchkoli pomocných výpočtů, což popisuje odstavec 4.

3. VĚTY O STABILITĚ

Definice 2. *Regulární matici $\mathbf{B}$, jejíž všechny postupné hlavní subdeterminanty (v levém horním rohu)*

(17) $$|\mathbf{B}_1| = b_{11}\,,\quad |\mathbf{B}_2| = \begin{vmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{vmatrix},\quad \ldots,\quad |\mathbf{B}_n| = |\mathbf{B}|$$

jsou různé od nuly, tj. platí

(18) $$|\mathbf{B}_k| \neq 0\,,\quad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

nazveme uspořádanou maticí.

Věta 1. *Z každé regulární matice $\mathbf{A}$ lze vhodnou permutací řádků (popř. sloupců) vytvořit uspořádanou matici $\mathbf{B}$.*

Důkaz. Determinant $|\mathbf{A}|$ rozvineme podle posledního sloupce. Protože platí $|\mathbf{A}| \neq 0$, existuje nejméně jeden prvek a_{in} takový, že k němu příslušný doplněk je různé od nuly. Pokud takových prvků existuje několik, potom vybereme libovolný z nich ($a_{i_0,n}$) a doplněk k němu příslušný označíme $|\mathbf{A}_{n-1}^{(i_0)}|$. Potom považujeme i_0-tý řádek matice $\mathbf{A}$ za n-tý řádek matice $\mathbf{B}$, tj. položíme

(19) $$a_{i_0,k} = b_{nk}\,.$$

Matice $\mathbf{A}_{n-1}^{(i_0)}$ je regulární čtvercová matice řádu $n - 1$. Její determinant rozvineme rovněž podle posledního $(n - 1)$-ního sloupce a dále postupujeme jako v bodě 1, tj. určíme prvek $a_{i_1,k}$, jehož doplněk v tomto determinantu je nenulový, a položíme

(20) $$a_{i_1,k} = b_{n-1,k}\,.$$

Stejným způsobem pokračujeme dále, až určíme postupně všechny řádky matice $\mathbf{B}$ dle vzorce

(21) $$a_{i_r,k} = b_{n-r,k}\,.$$

Postupné hlavní subdeterminanty $|\mathbf{B}_{n-r}|$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$ matice $\mathbf{B}$ jsou zřejmě nenulové a odtud je vidět, že $\mathbf{B}$ je uspořádaná matice.

Důsledek věty 1. *Matici* $\mathbf{B}$ *můžeme zřejmě zapsat ve tvaru*

$$\mathbf{B} = {}^{1}\mathbf{C}\mathbf{A}, \tag{22}$$

kde ${}^{1}\mathbf{C}$ *je prostá transformace s jednotkovými prvky, která vznikne z jednotkové matice* $\mathbf{E}$ *permutací řádků nebo sloupců.*

Věta 2. *Ke každé uspořádané matici* $\mathbf{B}$ *existuje stabilní diagonální transformace* ${}^{0}\mathbf{C}$ (viz rovnice (16)).

Důkaz. Větu dokážeme úplnou indukcí podle řádu matice $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n$ s použitím metody geometrického místa kořenů (root locus method) [6, 7]. Charakteristický mnohočlen matice ${}^{0}\mathbf{C}_n\mathbf{B}_n$ označíme K_n ve shodě se vzorcem (13). Indexem u mnohočlenu budeme označovat jeho stupeň a indexem u matice její řád.

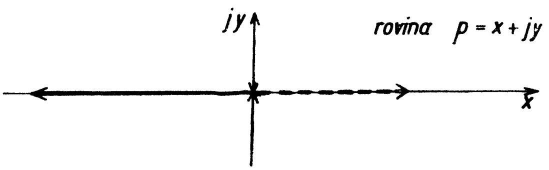
1. Pro $n = 1$ má charakteristická rovnice (14) tvar

$$K_1 = c_1 b_{11} + p. \tag{23}$$

Vyšetříme geometrické místo kořenu této rovnice v závislosti na parametru c_1. Tento kořen se bude pohybovat spojitě po reálné ose podle obr. 1, přičemž bude platit $p = 0$ pro $c_1 = 0$. Kořen bude záporný pro $c_1 b_{11} > 0$, to je v případě

$$\operatorname{sign} c_1 = \operatorname{sign} b_{11}. \tag{24}$$

Vzorec (24) je podmínka, aby ${}^{0}\mathbf{C}_1 = c_1$ byla stabilní transformace.



Obr. 1. Geometrické místo kořenu charakteristické rovnice $K_1 = p + c_1 b_{11} = 0$. ——— $\operatorname{sign} c_1 = \operatorname{sign} b_{11}$; – – – $\operatorname{sign} c_1 = -\operatorname{sign} b_{11}$.

2. Charakteristický mnohočlen K_2 je roven

$$\begin{aligned} K_2 &= p^2 + p(c_1 b_{11} + c_2 b_{22}) + c_1 c_2 |\mathbf{B}_2| = \\ &= p(p + c_1 b_{11}) + c_2(p b_{22} + c_1 |\mathbf{B}_2|). \end{aligned} \tag{25}$$

Předpokládejme, že parametr c_1 jsme již pevně zvolili podle (24). Dosazením ze vzorce (23) dostaneme

$$K_2 = pK_1 + c_2(p b_{22} + c_1 |\mathbf{B}_2|) = pK_1 + c_2 Q_1. \tag{26}$$

Geometrická místa kořenů budou mít různý tvar v závislosti na kořenu mnohočlenu Q_1. Na obr. 2 jsou uvedeny všechny tři možné případy. Pro $c_2 = 0$ má K_2 jeden záporný reálný kořen a druhý kořen nulový. Z rovnice (26) je ihned vidět, že musí platit

$$c_2 c_1 |\mathbf{B}_2| > 0,$$

čili

$$\operatorname{sign} c_2 = \operatorname{sign} \{c_1 |\mathbf{B}_2|\}, \tag{27}$$

aby se kořen z počátku pohyboval po záporné části reálné osy. Kořen mnohočlenu Q_1 je na obr. 2 značen jako kroužek. V případě, že je tento kořen záporný (obr. 2a, 2b), je vzorec (27) jedinou podmínkou pro parametr c_2. V případě kladného kořenu mnohočlenu Q_1 (viz obr. 2c) existuje kladné číslo q_2 takové, že pro

(28) $$|c_2| < q_2$$

leží oba kořeny mnohočlenu K_2 v levé polorovině a pro

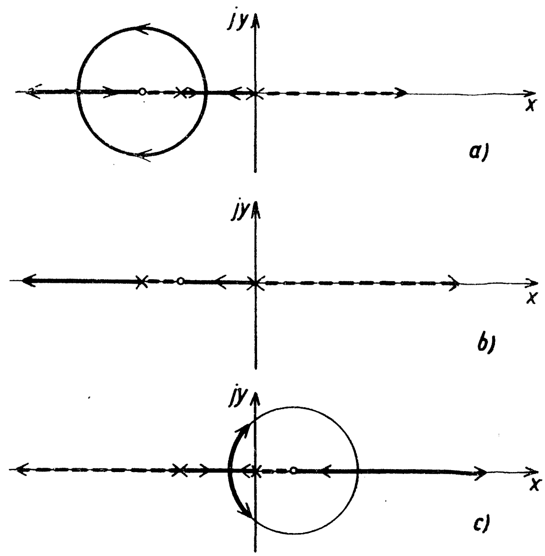
$$|c_2| \geqq q_2$$

v pravé polorovině nebo na imaginární ose.

Aby ${}^0\boldsymbol{C}_2$ byla stabilní diagonální transformace, musí tedy parametr c_2 splňovat podmínky (27) a (28). (Je-li kořen mnohočlenu Q_1 záporný, potom můžeme v nerovnosti (28) položit $q_2 = +\infty$.) Věta tedy platí pro $n = 2$.

3. Předpokládejme nyní, že věta platí pro $n = r - 1$. Protože je

(29) $$|\boldsymbol{B}_r| \neq 0\,,$$
$$|\boldsymbol{B}_{r-1}| \neq 0\,,$$



Obr. 2. Geometrická místa kořenů charakteristické rovnice $K_2 = pK_1 + c_2Q_1 = 0$. a) Kořen mnohočlenu Q_1 záporný a menší než kořen mnohočlenu K_1. b) Kořen mnohočlenu Q_1 záporný a větší než kořen mnohočlenu K_1. c) Kořen mnohočlenu Q_1 kladný. —— $\operatorname{sign} c_2 = \operatorname{sign}\{c_1|A_2|\}$; — — — $\operatorname{sign} c_2 = -\operatorname{sign}\{c_1|A_2|\}$.

existuje k matici $\boldsymbol{B}_{r-1}$ podle předpokladu stabilní diagonální transformace ${}^0\boldsymbol{C}_{r-1}$. Transformaci ${}^0\boldsymbol{C}_r$ budeme hledat ve tvaru:

(30) $${}^0\boldsymbol{C}_r = \begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{C}_{r-1}, & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} &, c_r \end{bmatrix},$$

takže obsahuje jediný neznámý parametr c_r. Charakteristický mnohočlen K_r matice ${}^0\boldsymbol{C}_r\boldsymbol{B}_r$

(31) $$K_r = |{}^0\boldsymbol{C}_r\boldsymbol{B}_r + p\boldsymbol{E}_r|$$

je možno upravit na tvar

(32) $$K_r = pK_{r-1} + c_rQ_{r-1}\,,$$

kde Q_{r-1} je mnohočlen stupně $r - 1$. Budeme vyšetřovat geometrická místa kořenů mnohočlenu K_r v závislosti na parametru c_r. Protože je podle předpokladu K_{r-1} Hurwitzův mnohočlen, má K_r pro $c_r = 0$ $r - 1$ kořenů v levé polorovině a jeden kořen v počátku. Z rovnice (31) je ihned vidět, že nerovnost

$$|{}^0\mathbf{C}_r| \, |\mathbf{B}_r| > 0 \tag{33}$$

je nutnou podmínkou pro to, aby K_r byl Hurwitzův mnohočlen. Odtud odvodíme pro c_r

$$\operatorname{sign} c_r = \operatorname{sign} \{|\mathbf{C}_{r-1}| \, |\mathbf{B}_r|\} \, . \tag{34}$$

Začneme-li zvětšovat $|c_r|$ od nuly tak, aby byla splněna podmínka (34), potom se kořen z počátku začne pohybovat doleva, podobně jako v bodě 2. Vzhledem k tomu, že všechny ostatní kořeny mnohočlenu K_r ležely v levé polorovině při $c_r = 0$, vidíme odtud ihned, že pro dostatečně malé $|c_r|$ bude K_r Hurwitzův mnohočlen. Jestliže při zvětšování $|c_r|$ protínají geometrická místa některých dvojic kořenů imaginární osu, potom označíme q_r takové nejmenší kladné číslo, že pro $|c_r| = q_r$ leží nejméně jedna dvojice kořenů na imaginární ose. V tomto případě bude zřejmě K_r Hurtwitzův mnohočlen, jestliže parametr c_r bude splňovat podmínku (34) a nerovnost

$$0 < |c_r| < q_r \, . \tag{35}$$

Jestliže při zvětšování $|c_r|$ neprotne geometrické místo žádné dvojice kořenů imaginární osu, potom v podmínce (35) můžeme opět položit $q_r = +\infty$.

Věta tedy platí i pro $n = r$ a podle úplné indukce musí věta platit pro libovolné přirozené n. Tím je důkaz skončen.

Důsledek věty 2. *Matici* $\mathbf{D}$ (viz vzorec (12)) *můžeme zapsat ve tvaru*

$$\mathbf{D} = {}^0\mathbf{C}\mathbf{B} \, . \tag{36}$$

Věta 3. *Ke každé regulární matici* $\mathbf{A}$ *existuje stabilní prostá transformace* $\mathbf{C}$.

Důkaz. Podle věty 1 existuje ke každé regulární matici $\mathbf{A}$ prostá transformace s jednotkovými prvky ${}^1\mathbf{C}$ taková, že matice

$$\mathbf{B} = {}^1\mathbf{C}\mathbf{A}$$

(viz vzorec (22)) je uspořádaná matice. Podle věty 2 existuje ke každé uspořádané matici $\mathbf{B}$ stabilní diagonální transformace ${}^0\mathbf{C}$, tak, že charakteristický mnohočlen $K_n(p)$ matice

$$\mathbf{D} = {}^0\mathbf{C}\mathbf{B}$$

je Hurwitzův mnohočlen.

Matici $\mathbf{D}$ můžeme podle vzorce (22) zapsat ve tvaru

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}\mathbf{A} \, , \tag{37}$$

kde

$$\mathbf{C} = {}^0\mathbf{C}\,{}^1\mathbf{C} \, . \tag{38}$$

Z těchto vzorců je ihned vidět, že $\mathbf{C}$ je prostá stabilní transformace matice $\mathbf{A}$. Protože $\mathbf{A}$ je libovolná regulární matice, je tím důkaz této věty skončen.

Důkaz uvedené věty 2 zároveň ukazuje jednoduchý způsob konstrukce požadované stabilní transformace $\boldsymbol{C}$. Prvky c_i matice $\boldsymbol{C}$ je totiž možno určovat postupně, což je velmi výhodné. Tyto prvky c_i musí splňovat podmínky (29) a (30). Nejsou tedy určeny jednoznačně, z čehož plyne, že při jejich určování není požadována velká přesnost. V odstavci 4 bude ukázáno, jak je možno parametry c_i určovat přímo na analogovém počítači, aniž by bylo třeba provádět jakékoli pomocné výpočty.

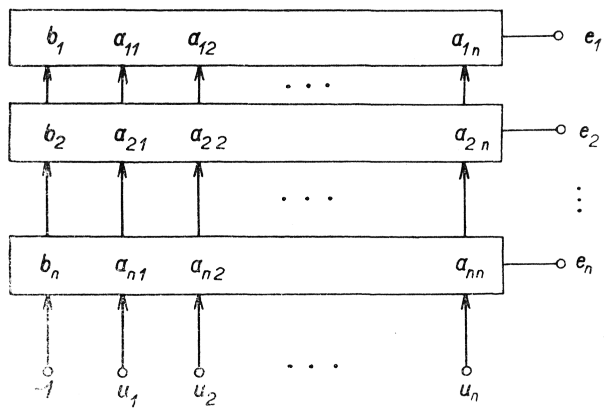
4. ŘEŠENÍ NA ANALOGOVÝCH POČÍTAČÍCH

Z dokázaných vět plyne, že charakteristický mnohočlen matice $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{CA}$ je Hurwitzův mnohočlen. Zřejmě tedy bude počítací síť k řešení soustavy diferenciálních rovnic

(39) $(\boldsymbol{CA} + p\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Cb}$

stabilní. Budou tedy platit vzorce (6) a (7), takže v ustáleném stavu bude určeno řešení soustavy (1).

Předpokládejme nejprve, že matice soustavy $\boldsymbol{A}$ je uspořádaná ($\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$). Diagonální matici ${}^0\boldsymbol{C}$ předem sice neznáme, ale skutečnost, že jednotlivé její diagonální prvky je možno určovat postupně dovoluje použít analogového počítače i při určování všech c_i.



Obr. 3. Blokové schéma počítací sítě pro řešení soustavy (33).

Nejprve na analogovém počítači vytvoříme model soustavy

(40) $$\boldsymbol{Au} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}\,,$$

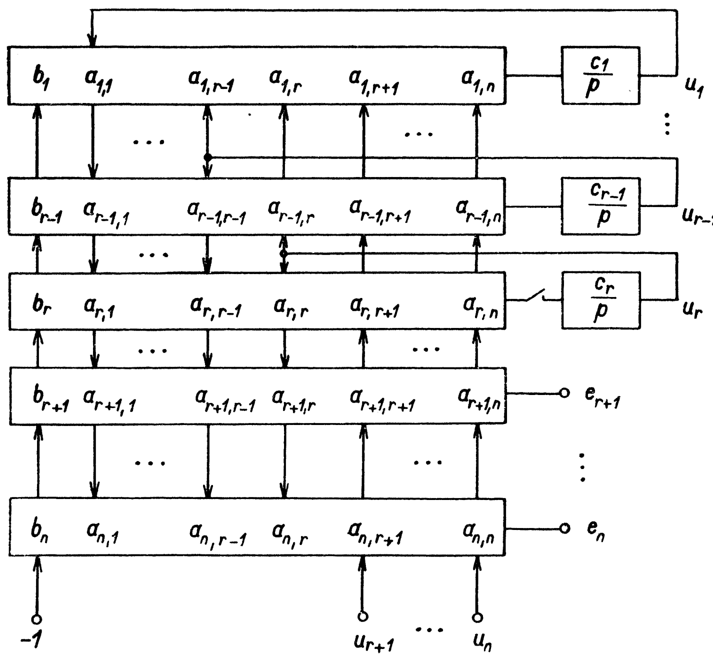
kde $\boldsymbol{u}$ je libovolný vektor (např. nulový). Blokové schéma tohoto modelu je uvedeno na obr. 3. Jednotlivé složky vektoru $\boldsymbol{u}$ jsou zde, podobně jako pravé strany, vstupní veličiny. Každý blok přísluší jedné rovnici soustavy (33) a znázorňuje schematicky vytvoření potřebné lineární kombinace vstupních veličin. Koeficienty soustavy a_{ik} a pravé strany rovnic b_i jsou do počítače vloženy např. nastavením potenciometrů. Na výstupech jednotlivých bloků jsou složky e_i vektoru $\boldsymbol{e}$ to je právě chyby v jednotlivých rovnicích. Celá počítací síť podle obr. 3 je bez zpětných vazeb a proto vždy stabilní.[1])

[1]) Na analogovém počítači je možno vytvořit např. součet čtverců nebo součet absolutních hodnot chyb e_i a změnou vstupů u_i hledat minimum tohoto součtu. Toto minimum je nulové a při jeho dosažení musí být všechny chyby e_i také nulové, takže vektor vstupů $\boldsymbol{u}$ tvoří pak řešení soustavy (1). Tato metoda je popsána např. v [8].

Nyní budeme postupně v jednotlivých blocích počítací sítě uzavírat zpětné vazby přes integrátory podle obr. 4. Zisky c_i integrátorů v jednotlivých zpětných vazbách jsou právě hledané prvky diagonální transformace ${}^0\mathbf{C}$. Uzavřením i-té zpětné vazby položíme vlastně

(41) $$c_i e_i = - p u_i \, .$$

Podle dokázané věty 2 je možno pro libovolný počet uzavřených zpětných vazeb dosáhnout stabilní počítací sítě.



Obr. 4. Postupné uzavírání zpětných vazeb.

Budeme tedy předpokládat, že jsme již uzavřeli $r - 1$ zpětných vazeb a dostali stabilní počítací síť. Tím je již určeno $r - 1$ nenulových parametrů c_i $(i = 1, 2, \ldots, r - 1)$. Nyní popíšeme podrobně postup při uzavírání zpětné vazby pro r-tou rovnici:

1. Nastavíme koeficient $c_r = 0$ a uzavřeme příslušnou r-tou zpětnou vazbu.

2. Koeficient c_r začneme pomalu měnit spojitě od nuly do kladných hodnot. Při tom pozorujeme (např. na obrazovce osciloskopu) výstup r-tého integrátoru, čímž zjišťujeme stabilitu počítací sítě. Je-li počítací síť nestabilní již při velmi malých kladných hodnotách parametru c_r, začneme tento parametr měnit od nuly do záporných hodnot. Podle dokázané věty bude pro jedno znaménko parametru c_r počítací síť jistě stabilní (platí-li $|\mathbf{A}_r| \neq 0$).

3. Po zjištění znaménka c_r (sign c_r) při kterém je počítací síť stabilní zvětšujeme $|c_r|$

a hledáme hranici stability, to znamená hledáme číslo q_r takové, že počítací síť je stabilní pouze je-li splněna podmínka (35).

4. Pokud najdeme takové q_r, potom volíme absolutní hodnotu c_r podle vzorce

$$|c_r| = \frac{q_r}{2} \tag{42}$$

nebo podle pozorování osciloskopu tak, aby přechodový jev dozněl co nejdříve. Pokud v rámci možností analogového počítače takové číslo nenajdeme, potom volíme c_r co největší.

Podle bodů 1. až 4. lze uzavřít postupně všechny zpětné vazby a tak sestavit stabilní počítací síť pro řešení soustavy (1).

Je-li některý subdeterminant nulový ($|\boldsymbol{A}_r| = 0$) – tj. není-li $\boldsymbol{A}$ uspořádaná matice – jeví se po uzavření příslušné zpětné vazby počítací síť jako nestabilní (na hranici stability, neboť má její charakteristická rovnice jeden pól v nule nezávisle na hodnotě zisku příslušného integrátoru) pro obě znaménka parametru c_r. V takovém případě tuto zpětnou vazbu opět rozpojíme a uzavřeme zpětnou vazbu odpovídající jiné rovnici. Pokud existuje mezi hlavními subdeterminanty alespoň jeden nenulový pro každý řád r ($r = 1, 2, \ldots, n$), lze tímto způsobem zkusmo sestavit stabilní počítací síť (viz odst. 3).

Pokud jsou všechny hlavní subdeterminanty určitého řádu nulové, je třeba podle věty 1 zaměnit pořadí rovnic dané soustavy. V počítací síti potom z chyby i-té rovnice nebudeme počítat i-tou, ale jinou (např. k-tou) neznámou, tj. bude platit

$$c_i e_i = - p u_k \,. \tag{43}$$

Index i v této rovnici probíhá čísla $1, 2, \ldots, n$; index k rovněž, ale v jiném pořadí. Rovnici (43) můžeme zapsat zřejmě v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{e} = - p\boldsymbol{u} \,, \tag{44}$$

kde $\boldsymbol{C}$ je prostá transformace.

Podle věty 3 existuje taková prostá transformace $\boldsymbol{C}$, že bude odpovídající počítací síť stabilní. Po uzavření všech zpětných vazeb budou v ustáleném stavu všechny derivace pu_k nulové, takže podle (43) i všechny chyby e_i budou nulové. Daná soustava rovnic tedy bude splněna a odtud je vidět, že na výstupech integrátorů budou právě hodnoty neznámých x_k.

Pokud existují nulové hlavní subdeterminanty, je třeba rovnice dané soustavy přiřazovat jednotlivým neznámým zkusmo. Zkušenosti ukazují, že v převážné většině případů není vůbec třeba měnit pořadí rovnic; pokud je to třeba, lze popsaným způsobem zkusmo sestavit poměrně rychle stabilní počítací síť.

Po uzavření všech zpětných vazeb dostaneme podle (40) a (44)

$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{b} \,. \tag{45}$$

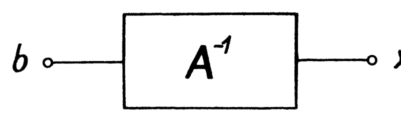
Odtud plyne, že počítací síť řeší skutečně soustavu diferenciálních rovnic (39).

Viděli jsme, že zjišťování, jsou-li všechny hlavní subdeterminanty nenulové, a případná záměna pořadí neznámých nebo pořadí rovnic se velmi snadno provádí na analogovém počítači. Rovněž velikosti jednotlivých parametrů c_r určíme na počítači bez jakýchkoli pomocných výpočtů. Po uzavření všech zpětných vazeb tedy počítač provádí transformaci $\boldsymbol{C}$ na soustavu (1) takovou, že počítací síť pro řešení soustavy (39) je stabilní, takže v ustáleném stavu dostaneme řešení soustavy (1). Transformační matice $\boldsymbol{C}$ je tedy jen pomocný operátor pro zajištění stability počítací sítě. Jestliže předpokládáme, že bude třeba častěji řešit soustavy s toutéž maticí $\boldsymbol{A}$, pak je výhodné prvky c_i, tj. zisky jednotlivých integrátorů zapsat (pokud se nebude opakovat úloha se stejnou maticí, není to třeba).

Popsaným způsobem tedy vždy jednoduše sestavíme na analogovém počítači stabilní síť pro řešení soustavy (1). Je zřejmé že stabilita počítací sítě nezávisí na pravých stranách rovnic, tj. na vektoru $\boldsymbol{b}$. Změnou tohoto vektoru tedy dostaneme ihned nové řešení.

5. INVERSE MATIC

Analogová počítací síť popsaná v odstavci 4 má jako vstupní veličiny pravé strany a výstupní veličiny jsou hledané řešení dané soustavy (1). Vzhledem k rovnici (4) můžeme zjednodušené blokové schéma analogové počítací sítě znázornit podle obr. 5, kde $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{x}$ jsou vektory z rovnice (1) resp. (4).



Obr. 5. Zjednodušené blokové schéma analogové počítací sítě pro řešení soustavy lineárních algebraických rovnic.

Jestliže nepřihlížíme k přechodovým jevům, můžeme si počítací síť pro řešení soustavy (1) představit jako blok, který provádí transformaci $\boldsymbol{A}^{-1}$ na vstupní vektor $\boldsymbol{b}$ podle rovnice (4). Vidíme tedy, že na rozdíl ode všech numerických výpočtových metod a na rozdíl od číslicových počítačích strojů, kde se inversi matic snažíme vyhnout, lze si analogovou počítací síť představit právě jako inversní operátor $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Na analogových počítačích můžeme však velmi snadno také určit přímo všechny prvky inversní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$. Volíme-li totiž složky b_i vektoru $\boldsymbol{b}$ na pravé straně (1) $b_1 = 1$, $b_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$, dostaneme podle (4) jako řešení $\boldsymbol{x}$ první sloupec matice $\boldsymbol{A}^{-1}$. Jestliže obecně volíme $b_r = 1$, $b_i = 0$, $i \neq r$, dostaneme jako řešení právě r-tý sloupec matice $\boldsymbol{A}^{-1}$. Tato řešení dostáváme na analogovém počítači prakticky okamžitě, takže tímto způsobem určíme velmi rychle a jednoduše všechny prvky inversní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$.

6. ZÁVĚR

V článku je popsána jednoduchá metoda analogového řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Metoda je založena na prosté transformaci dané soustavy (1). Je dokázána existence takové prosté transformace $\boldsymbol{C}$, že příslušná analogová počítací síť je vždycky stabilní. Dále je popsán návod na postupné určování jednotlivých prvků této transformace. Na analogovém počítači je možno tyto prvky určovat bez veškerých pomocných výpočtů.

Zcela obdobným způsobem je možno na analogových počítačích řešit i soustavy s komplexními koeficienty a pravými stranami. Každou takovou soustavu je totiž možno nahradit soustavou s reálnými koeficienty a reálnými pravými stranami o dvojnásobném počtu neznámých [5].

Hlavním omezením při analogovém řešení soustav lineárních algebraických rovnic je požadovaná kapacita stroje. Na rozdíl od číslicových počítačů, které provádějí jednotlivé výpočty postupně, provádějí analogové počítače všechny operace současně a ihned dávají řešení. Proto musí analogové počítače obsahovat potřebné množství počítacích obvodů pro řešení dané úlohy.

Dosud známé metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic na analogových počítačích vyžadují pro zajištění stability počítací sítě pro řešení jedné rovnice čtyři operační zesilovače (řeší vlastně soustavu o dvojnásobném počtu neznámých). Použijeme-li popsanou metodu, vystačíme se dvěma zesilovači na jednu rovnici, takže se snižuje požadované množství zesilovačů na polovinu. Vzhledem k tomu, že v obecném případě může každá rovnice obsahovat kladné i záporné koeficienty, nelze tento počet potřebných zesilovačů již dále zmenšovat. Popsaná metoda tedy snižuje požadovanou kapacitu počítacích obvodů na minimum. Při tom není třeba provádět žádné pomocné výpočty. Do stroje se vloží přímo koeficienty matice soustavy $\boldsymbol{A}$ a pravé strany $\boldsymbol{b}$.

Dosažitelná přesnost řešení je kolem 1% z maximálního napětí, což je pro většinu praktických úloh postačující přesnost.

Článek ukazuje, že jsou analogové počítače vhodné pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic. Vzhledem k tomu, že stabilita počítací sítě nezávisí na pravých stranách, je zvláště výhodné řešení několika soustav se společnou maticí soustavy. Tak můžeme jednoduchým způsobem na analogovém počítači určit postupně všechny prvky inversní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$. Analogovou počítací síť si můžeme představit jako operátor $\boldsymbol{A}^{-1}$ prováděný na vstupním vektoru $\boldsymbol{b}$.

Literatura

[1] *Березин И. С., Жидков Н. П.:* Методы вычислений. Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва 1959.

[2] *Гантмахер Ф. Р.:* Теория матриц. Гос. изд. тех.-теор. литературы, Москва 1954.

[3] *Этерман И. И.:* Математические машины непрерывного действия. Машгиз, Москва 1957.

[4] *Korn G. A., Korn T. M.*: Electronic Analog Computers. McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1956.
[5] *Jackson A. S.*: Analog Computation. McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1960.
[6] *Evans W. R.*: Control Systems Dynamics. McGraw-Hill, New York 1954.
[7] *Weiss J.*: Řešení regulačních obvodů metodou geometrického místa kořenů. Slaboproudý obzor 18 (1957), No. 11, 806–811.
[8] *Matyáš J.*: Řešení speciálních úloh. Sborník referátů ze Dnů nové techniky 1960, Tesla Pardubice 1961.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

ЙОСЕФ МАТЫАШ (Josef Matyáš)

Статья посвящена решению систем линейных алгебраических уравнений

$$\text{(A)} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

при помощи моделирующих устройств. Систему (A) заменим системой дифференциальных уравнений

$$\text{(B)} \qquad (\mathbf{C}\mathbf{A} + p\mathbf{E})\,\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{b}\,,$$

которую получим из (A) применением простой трансформации $\mathbf{C}$.

Если система (B) устойчива, будет

$$\text{(C)} \qquad \lim_{t \to \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{x}\,.$$

Таким образом, достигнув устойчивого состояния, получим на моделирующем устройстве желаемое решение системы (A).

Для любой неособенной матрицы $\mathbf{A}$ доказывается существование такой простой матрицы $\mathbf{C}$ (т.е. неособенной матрицы, обладающей только n ненулевыми элементами) что все корни характеристического уравнения

$$\text{(D)} \qquad |\mathbf{C}\mathbf{A} + p\mathbf{E}| = 0$$

лежат в левой полуплоскости (имеют отрицательные вещественные части). Следовательно, система (B) устойчива, и соответствующая решающая цепь на моделирующем устройстве для решения системы (B) также устойчива. Описывается простый способ определения элементов c_i матрицы $\mathbf{C}$ шаг за шагом при помощи модели без всяких вспомогательных вычислений.

На моделирующем утройстве настраиваются прежде всего все элементы матрицы $\mathbf{A}$ и нектора $\mathbf{b}$ (коэффициенты и правые части уравнений). Затем при-

водятся шаг за шагом обратные связи для отдельных уравнений системы с такими коэффициентами усиления, чтобы схема (решающая цепь) осталась устойчивой. Найденные коэффициенты усиления являются элементами c_i матрицы $\boldsymbol{C}$. Таким образом на моделирующем устройстве можно составить устойчивую схему набора для решения данной системы без всяких вспомогательных вычислений.

$$\text{(E)} \qquad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

можно эту схему набора рассматривать как оператор $\boldsymbol{A}^{-1}$, примененный к вектору $\boldsymbol{b}$, так как элементы вектора $\boldsymbol{b}$ являются входными и элементы вектора $\boldsymbol{x}$ выходными величинами этой схемы набора.

Решение на моделирующих устройствах имеет большие преимущества прежде всего в тех случаях, когда требуется решить несколько систем с общей матрицей $\boldsymbol{A}$. Таким образом можно определить, например, все элементы обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Из статьи следует, что моделирующие устройства являются очень пригодным средством для решения систем алгебраических уравнений.

Zusammenfassung

STABILITÄT DER LÖSUNG VON SYSTEMEN LINEARER ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN MIT HILFE DER ANALOGRECHNER

Josef Matyáš

Dieser Artikel ist der Lösung des Systems von linearen algebraischen Gleichungen

$$\text{(A)} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

mit Hilfe der Analogrechner gewidmet. Das System (A) wird durch das System

$$\text{(B)} \qquad (\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{b}\,, \quad p = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$$

linearer Differentialgleichungen ersetzt, welches mit Anwendung einer einfachen Transformation $\boldsymbol{C}$ abgeleitet wird. Wenn das System (B) stabil ist, dann gilt

$$\text{(C)} \qquad \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{x}\,,$$

sodass wir im eingeschwungenen Zustande die gesuchte Lösung $\boldsymbol{x}$ des Systems (A) bekommen.

Es ist bewiesen, dass für jede regulare Matrix $\boldsymbol{A}$ eine solche einfache Matrix $\boldsymbol{C}$ existiert (regulare Matrix, welche nur n von Null verschiedene Elemente hat), dass alle

Wurzeln der charakteristischen Gleichung

(D) $$|\mathbf{CA} + p\mathbf{E}| = 0$$

in der linken Halbebene liegen. Daraus folgt, dass das System (B), und auch das Rechennetz auf dem Analogrechner zur Lösung des Systems (B), stabil ist. Eine einfache Methode der schrittweisen Bestimmung der Elemente c_i der Transformation $\mathbf{C}$ mit Hilfe des Analogrechners ist beschrieben, wozu keine Hilfsrechnungen nötig sind.

Auf dem Analogrechner werden zuerst die Elemente der Matrix $\mathbf{A}$ und des Vektors $\mathbf{b}$ (die Koeffizienten und rechten Seiten der Gleichungen) eingestellt. Dann werden schrittweise Rückkopplungen zu einzelnen Gleichungen des Systems (A) so eingeführt, damit das Rechennetz stabil bleibt. Die auf diese Weise bestimmten Verstärkungsfaktoren c_i der Integratoren in den Rückkopplungen sind die Elemente der Transformation $\mathbf{C}$. Daraus folgt, dass wir auf dem Analogrechner ohne Hilfsrechnungen das stabile Rechennetz zur Lösung des Systems (A) zusammenstellen können. Dabei sind die Elemente des Vektors $\mathbf{b}$ Eingangs- und die Elemente des Vektors $\mathbf{x}$ Ausgangssignale des Rechennetzes. Aus der Formel

(E) $$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

folgt, dass das Rechennetz als Operator $\mathbf{A}^{-1}$ betrachtet werden kann.

Die Lösung von Systemen (A) mit Hilfe der Analogrechner hat grosse Vorteile, besonders wenn einige Systeme mit der gemeinsamen Matrix $\mathbf{A}$ zu lösen sind. In solcher Weise können auch alle Elemente der Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ bestimmt werden.

Der Artikel zeigt, dass sich die Analogrechner für die Lösung der linearen algebraischen Gleichungssysteme (A) eignen.

Adresa autora: *Josef Matyáš*, Dukla 2223, Pardubice.