Aplikace matematiky

Renata Babušková

Über numerische Stabilität einiger Rekursionsformeln

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 3, 186–193

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102895

ÜBER NUMERISCHE STABILITÄT EINIGER REKURSIONSFORMELN

RENATA BABUŠKOVÁ

(Eingegangen am 23. Mai 1963.)

In der vorliegenden Arbeit wird auf die numerische Unstabilität einiger typischen Rechenvorgänge hingewiesen und an Beispielen die Bedeutung der numerischen Stabilität für das praktische Rechnen gezeigt sowie einige Handgriffe angedeutet durch welche sich die numerische Unstabilität umgehen lässt.

1. Bei der numerischen Berechnung kommen häufig rekurrente Prozesse vor, die ausgewertet werden müssen. Einer dieser einfachen Prozesse ist die Berechnung der Integrale mit Hilfe der Methode „per partes".

Ein charakteristisches Beispiel ist die Berechnung des Integrals

$$I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x \,. \tag{1}$$

Wir erhalten für I_n folgende Rekursionsformel:

$$I_n = 1 - nI_{n-1}\,, \quad I_0 = 1 - \frac{1}{e}\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Es ist leicht einzusehen, dass ausserdem gilt $0 < I_{n+1} < I_n$ und $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. Die Berechnung nach Formel (2) ist jedoch praktisch undurchführbar. In Tabelle 1 sind die auf dem Rechenautomaten SIRIUS[1]) errechneten Ergebnisse der Formel (2) zusammengefasst. Wir sehen, dass die Berechnung praktisch wertlos ist.

Wir wollen nun einige Möglichkeiten einer stabilen Berechnung der Rekursionsformel (2) beobachten.

I. Da $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ gilt, wählen wir den Wert von N genügend gross und setzen $I_N = 0$. Die Rekursionsformel (2) schreiben wir dann in der Form

$$I_{n-1} = \frac{1 - I_n}{n}\,, \quad n = N - 1, N - 2, \ldots, 1\,; \tag{3}$$

$$N = 60, 40, 30, 20, 10\,.$$

[1]) In Autocod mit einfacher Arithmetik programmiert.

In Tabelle 2 sind die Ergebnisse für verschiedene Werte von N angeführt. Die Berechnung wurde auf dem Rechenautomaten SIRIUS durchgeführt. Wir können auch für kleine Werte von N sehr gute Ergebnisse sehen. Praktisch gehen wir so vor, dass wir zwei Berechnungen für verschiedene Werte von N durchführen und die Ergebnisse vergleichen. Wenn wir bloss einen Wert von I_{n_0} kennen wollen, wenden wir eine andere Möglichkeit der Berechnungen an.

Tabelle 1

$I_n = 1 - nI_{n-1}$, $I_0 = 1 - 1/e$, $n = 1, 2, 3 \ldots$, $I_n = \bar{I}_n \cdot 10^\alpha$

n	$\bar{I}_n$	α
1	0·367879400	0
2	0·264241200	0
3	0·207276400	0
4	0·170894400	0
5	0·145528000	0
6	0·126832000	0
7	0·112176000	0
8	0·102592000	0
9	0·766720000	−1
10	0·233280000	0
11	−0·156608000	1
12	0·197929600	2
13	−0·256308480	3
14	0·358931870	4
15	−0·538387800	5

II. Aus (2) erhalten wir

$$I_{n+1} + \left(n + 1 + \frac{1}{n}\right) I_n + I_{n-1} = 1 + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, .. \tag{4}$$

Wir wollen (4) als lineares Gleichungssystem für $n = 1, 2, \ldots, N$ auffassen und $I_0 = 1 - 1/e$ und $I_{N+1} = 0$ setzen (N ist genügend gross).

Dieses Gleichungssystem lösen wir nun mit Hilfe der Ränderungsmethode. Im Spezialfall des Systems (4) wird diese Methode (vgl. § 25, [1]) aus folgenden Formeln bestehen:

$$r_n = \frac{-1}{1 + n + (1/n) + r_{n-1}}, \quad r_0 = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$y_n = -\left(1 + \frac{1}{n} - y_{n-1}\right) r_n, \quad y_1 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{e}\right),$$

$$g_{n_0,n} = g_{n_0,n-1} r_n\,, \quad g_{n_0,n_0} = r_{n_0}\,, \quad n \geqq n_0\,,$$
$$I_{n_0,n} = I_{n_0,n-1} + y_n g_{n_0,n-1}\,, \quad I_{n_0,n_0} = y_{n_0}\,, \quad n \geqq n_0\,,$$
$$\lim_{n\to\infty} I_{n_0,n} = I_{n_0}\,.$$

Der Vorteil dieser Methode besteht darin, dass man die notwendige Stellenanzahl, d.h. die Genauigkeit der Berechnung „automatisch“ wählen kann.

Ist nämlich $|I_{n_0,n} - I_{n_0,n-1}| < \varepsilon$ so ist, wie leicht einzusehen ist, auch $|I_{n_0,n} - \lim_{n\to\infty} I_{n_0,n}| < \varepsilon$.

Wenn wir nun mit vorgeschriebener Stellenanzahl rechnen wollen, so rechnen wir solange, bis $|I_{n_0,n} - I_{n_0,n-1}| < \varepsilon$ ist.

Wir bemerken noch, dass wir das System (4) auch auf andere Weise lösen können, z.B. durch die Eliminationsmethode. Die Ränderungsmethode hat ihre Vorteile in der Erspanis von Speicherplätzen und der automatischen Wahl der Stellenanzahl.

In Tabelle 3 sind die Ergebnisse dieser Berechnung angeführt. Es wurde wieder auf dem Rechenautomaten SIRIUS in Gleitkomma gerechnet. Die numerische Stabilität bleibt auch bei der Rechnung mit Festkomma erhalten.

Tabelle 2

$I_{n-1} = (1 - I_n)/n, \quad n = N - 1, \quad N - 2, \ldots, 1, \quad N = 60, 40, 30, 20, 10$

N	n	I_{n-1}	n	I_{n-1}	n	I_{n-1}
60						
	59	0·016949153	39	0·025015272	19	0·050119860
	58	0·016949153	38	0·025657492	18	0·052771120
	57	0·017246507	37	0·026333581	17	0·055719350
	56	0·017549170	36	0·027046289	16	0·059017540
	55	0·017862742	35	0·027798677	15	0·062732170
	54	0·018187728	34	0·028594156	14	0·066947700
	53	0·018524760	33	0·029436539	13	0·071773250
	52	0·018874523	32	0·030330109	12	0·077352230
	51	0·019237755	31	0·031279674	11	0·083877070
	50	0·019615246	30	0·032290677	10	0·091612290
	49	0·020007853	29	0·033369286	9	0·100931970
	48	0·020416504	28	0·034522525	8	0·112383500
	47	0·020842202	27	0·035758426	7	0·126802360
	46	0·021286039	26	0·037086215	6	0·145532930
	45	0·021749200	25	0·038516552	5	0·170893420
	44	0·022232973	24	0·040061813	4	0·207276650
	43	0·022738767	23	0·041736443	3	0·264241130
	42	0·023268124	22	0·043557436	2	0·367879450
	41	0·023822729	21	0·045544886	1	0·632120600
	40	0·024404433	20	0·047722755		

Tabelle 2 (*Fortsetzung*)

N n	I_{n-1}	n	I_{n-1}	n	I_{n-1}
40					
39	0·025641026	26	0·037086215	12	0·077352230
38	0·025641026	25	0·038516552	11	0·083877070
37	0·026334027	24	0·040041813	10	0·091612290
36	0·027046278	23	0·041736443	9	0·100931970
35	0·027798677	22	0·043557436	8	0·112383500
34	0·028594156	21	0·045544886	7	0·126802360
33	0·029436539	19	0·050119860	6	0·145532930
32	0·030330109	18	0·052771120	5	0·170893420
31	0·031279674	17	0·055719350	4	0·207276650
30	0·032290677	16	0·059017540	3	0·264241130
29	0·033369286	15	0·062732170	2	0·367879450
28	0·034522525	14	0·066947700	1	0·632120600
27	0·035758426	13	0·071773250		
30					
29	0·034482759	19	0·050119860	9	0·100931970
28	0·034482757	18	0·052771120	8	0·112383500
27	0·035759896	17	0·055719350	7	0·126802360
26	0·037086158	16	0·059017540	6	0·145532930
25	0·038516552	15	0·062732170	5	0·170893420
24	0·040061813	14	0·066947700	4	0·207276650
23	0·041736443	13	0·071773250	3	0·264241130
22	0·043557436	12	0·077352230	2	0·367879450
21	0·045544886	11	0·083877070	1	0·632120600
20	0·047722755	10	0·091612290		
20					
19	0·052631580	12	0·077352230	6	0·145532930
18	0·052631580	11	0·083877070	5	0·170893420
17	0·055727550	10	0·091612280	4	0·207276650
16	0·059017030	9	0·100931970	3	0·264241130
15	0·062732200	8	0·112383500	2	0·367879450
14	0·066947700	7	0·126802360	1	0·632120600
13	0·071773250				
10					
9	0·111111110	6	0·145502650	3	0·264241630
8	0·111111110	5	0·170899480	2	0·367879200
7	0·126984130	4	0·207275130	1	0·632120800

Tabelle 3

Die Berechnung von $I_{n_0,n}$ nach (5)

$\varepsilon = 10^{-6}$			$\varepsilon = 10^{-3}$		
n_0	n	$I_{n_0,n}$	n_0	n	$I_{n_0,n}$
30	34	0·031279676	30	32	0·031280548
25	29	0·037086217	25	27	0·037087912
20	25	0·045544885	20	22	0·045548655
15	20	0·059017600	15	17	0·059027780

Die angeführten Gedanken lassen sich auch auf eine ganze Reihe anderer Fälle anwenden.

2. Zu einem etwas anderen Fall kommt es bei Rekursionsformeln, die auf Differenzengleichungen zweiter Ordnung führen. Wir zeigen dies wieder an Hand eines typischen Beispiels.

Zwischen den Besselschen Funktionen gelten bekannte rekurrente Beziehungen

$$I_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} I_n(x) - I_{n-1}(x) . \tag{6}$$

Wenn wir $I_0(x)$ und $I_1(x)$ kennen, so können wir aus der Beziehung (6) $I_n(x)$ berechnen. Wir wissen weiter, dass $\lim_{n\to\infty} I_n(x) = 0$ ist. Bei der konkreten Berechnung kommt es wieder zu Schwierigkeiten, die mit Problemen der numerischen Stabilität zusammenhängen.

Wir führen in Tabelle 4 die Ergebnisse der Berechnung auf 3,5,10 Stellen nach (6) für $x = 1$ an, wobei die Berechnung in Festkomma durchgeführt wurde. Stigun und Abramowitz [2] führen eine Berechnungsart an, die, in Gleitkomma durchgeführt, stabil ist. Die in [2] angeführte Methode besteht darin, dass wir $\tilde{I}_n(x) = a, \tilde{I}_{n+1}(x) = 0$ wählen und die Rekursionsformel (6) von rückwärts rechnen, d.h. vom grösseren Wert n zum kleineren. Den Wert $I_n(x)$ suchen wir in der Form $I_n(x) = c \,.\, \tilde{I}_n(x)$, wobei wir die Konstante c so wählen, dass die Gleichung

$$1 = I_0(x) + 2 \sum_1^{\infty} I_{2n}(x) \tag{7}$$

erfüllt wird.

Bei dieser Berechnungsweise ist es notwendig den Wert von n entsprechend zu wählen, der nicht zu gross und nicht zu klein sein darf. Randels und Reevs [3] führen für diese Wahl einige empirische Bedingungen an.

Tabelle 4

$$I_{n+1}(1) = 2nI_n(1) - I_{n-1}(1)$$

n	Berechnung auf 3 Stellen	Berechnung auf 5 Stellen	Berechnung auf 10 Stellen	Der genaue Wert
0	0·765	0·76520	0·7651976865	0·7651976865
1	0·440	0·44005	0·4400505857	0·4400505857
2	0·115	0·11490	0·1149034847	0·1149034849
3	0·020	0·01955	0·0195633531	0·0195633539
4	0·005	0·00240	0·0024766339	0·0024766389
5	0·020	−0·00035	0·0002497181	0·0002497577
6	0·195	−0·00590	0·0000205471	0·0000209383
7	2·320	−0·07115	0·0002260181	0·0000015023
8	32·285	−1·00200	0·0029382353	0·0000000942
9	514·240	−160·39100	0·0467857467	0·0000000052

Wir führen noch eine andere Art der Berechnung an. Wir wollen zwei Fälle unterscheiden:

a) $0 \leqq x \leqq 1$;

b) $x > 1$.

Wir wollen uns zuerst mit Fall a) befassen. Wir setzen den Wert von $I_{N+1}(x)$ und $I_0(x)$ für genügend grosse Werte von N als bekannt voraus. Die Gleichung (6) können wir als System linearer algebraischer Gleichungen mit einer tridiagonalen Matrix auffassen.

Wir lösen dieses System mit Hilfe der Eliminationsmethode, welche sich als geeignet gezeigt hat (dann können wir zur Bestimmung des Wertes $I_0(x)$ (7) anwenden).

Z. B. die Lösung mit Hilfe der Eliminationsmethode besteht in der Auswertung folgender Rekursionsformeln:

$$\alpha_{i+1} = \frac{2i}{x} - \frac{1}{\alpha_i}, \qquad \alpha_1 = \frac{2}{x}, \tag{8}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \qquad \beta_1 = I_0(x),$$

$$I_N = \frac{\beta_N}{\alpha_N}, \qquad I_i(x) = \frac{I_{i+1} + \beta_i}{\alpha_i}.$$

In Tabelle 5 sind die Ergebnisse dieser Berechnung für $x = 1$ mit verschiedener Stellenanzahl angeführt. Den vorgeschriebenen Wert von N können wir „automa-

Tabelle 5

Berechnung von $I_n(1)$ nach (8)

n	Berechnung auf 3 Stellen	Berechnung auf 5 Stellen	Berechnung auf 10 Stellen	Der genaue Wert
0	0·765	0·76520	0·7651976865	0·7651976865
1	0·440	0·44005	0·4400505848	0·4400505857
2	0·115	0·11490	0·1149034847	0·1149034849
3	0·019	0·19056	0·0195633541	0·0195633539
4	0·002	0·00245	0·0024766399	0·0024766389
5	0	0·00030	0·0002497577	0·0002497577
6	0	0	0·0000209383	0·0000209383
7	0	0	0·0000015023	0·0000015023
8	0	0	0·0000000942	0·0000000942
9	0	0	0·0000000052	0·0000000052

tisch" so wählen indem wir für N das erste i einsetzen für welches $\beta_i = 0$ ist (mit der entsprechenden Stellenanzahl). Bei der Berechnung erhalten wir alle Werte von $I_i(x)$, müssen jedoch nur die Folgen α_i und β_i speichern. Die Berechnung lässt sich in Gleitkomma und Festkomma gut durchführen.

Ebenso gut lässt sich die Berechnung mit Hilfe der Ränderungsmethode durchführen.

Der Fall b) ist etwas komplizierter, denn der angeführte Berechnungsvorgang führt nicht zu entsprechenden Ergebnissen. Es kann nämlich vorkommen, dass die Determinante des errechneten Gleichungssystem gleich Null ist. Der folgende Berechnungsvorgang führt zu keinem Verlust von Dezimalstellen.

Wir wählen n_0, $n_0 = [(n/x) + 1]$ und setzen $\tilde{I}_{n_0}(x)$ und $\tilde{I}_N(x) = 0$ als bekannt voraus und gehen wie in Fall a) vor. In diesem Fall kommt es zu keinem Stellenverlust zum Unterschied von dem Fall, wenn $n/x < 1$ ist.

Wir berechnen $\tilde{I}_{n_0+1}(x)$ und errechnen aus der Beziehung (6) $\tilde{I}_n(x)$ $n = n_0 - 1, \ldots$. Dann ist $I_n(x) = \tilde{I}_n(x)/I_0(x)$ der gesuchte Wert. Zum Unterschied von der Methode die Stigun und Abramowitz anführen, kann diese Berechnungsweise auch in Festkomma durchgeführt werden.

3. Wir wollten in dieser Anmerkung auf Beispiele numerischer Unstabilität hinweisen, die bei der konkreten Berechnung von Rekursionsformeln auftreten kann und andeuten, dass es sehr oft möglich ist durch richtige Unformung diese Unstabilität zu umgehen.

Wir haben an Hand von zwei einfachen Beispielen einen Rechenvorgang gezeigt, den man auch in verschiedenen anderen Fällen gut anwenden kann, und durch den die Probleme der numerischen Stabilität überwunden werden können.

Literaturverzeichnis

[1] *Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева:* Вычислительные методы линейной алгебри. Москва 1960, стр. 187.

[2] *I. A. Stigun, M. Abramowitz:* Generation of Bessel Function on High-Speed Computers. Math. Tables and other Aids Comput. 11 (1957), 255–259.

[3] *J. B. Randels, R. T. Reeves:* Note on Empirical Bounds for Generating Bessel Function. Can. Assoc. Comput. Mach 1 (1958), No. 5,3.

[4] *R. Babušková:* Eine Bemerkung zur Tschebysheffschen Approximation der Funktion sin x/x. Wissenschaftliche Zeitschrift der TU Dresden 12/1963, Heft 1.

Výtah

O NUMERICKÉ STABILITĚ NĚKTERÝCH REKURENTNÍCH VÝPOČTŮ

RENATA BABUŠKOVÁ

V práci jsou rozebrány dva resp. tři jednoduché celkem typické rekurence, které se v numerické praxi často vyskytují. Na konkrétních výpočtech provedených na počítači SIRIUS je ukázáno, že dochází k výrazným jevům tzv. numerické nestability, které úplně znemožňují přesnost výpočtu. Dále jsou naznačeny způsoby výpočtů, které vedou k rekurencím numericky stabilním, které jsou dobře proveditelné na samočinných počítačích. Na konkrétním výpočtu provedeném opět na stroji SIRIUS je ilustrována praktická účinnost navrhovaného postupu.

Резюме

О ЧИСЛЕННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

РЕНАТА БАБУШКОВА (Renata Babušková)

В работе разобраны два-три простые в общем тиипчные рекуррентные соотношения, которые часто встречаются в вычислительной практике. При конкретных вычислениях, производимых на вычислительной машине SIRIUS показано, что наступает выразительное явление т. наз. численной неустойчивости, которое совсем не дает возможность производить точные вычисления. В работе описаны способы вычислений, которые сводятся к рекуррентным соотношениям численно устойчивым, хорошо воспроизводимым на автоматических вычислительных машинах. На конкретном примере вычислинея, произведенном опять-таки на вычислительной машине SIRIUS иллюстрируется практическая эффективность предлагаемого метода.

Adresa autorky: Ing. *Renata Babušková*, Fyzikální ústav ČSAV, Majakovského 24, Praha 6-Bubeneč.