

# Aplikace matematiky

---

Karel Wotruba

K teorii elektromagnetů pro vysoká pole

*Aplikace matematiky*, Vol. 9 (1964), No. 1, 39–47

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102882>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## K TEORII ELEKTROMAGNETŮ PRO VYSOKÁ POLE

KAREL WOTRUBA

(Došlo dne 13. února 1963.)

Na základě nové hydrodynamické analogie je variačním počtem stanoveno, jak je nutno volit tvar elektromagnetů s koncentrací magnetického toku.

## ÚVOD

V poslední době jeví se zvýšený zájem o experimenty v oboru fyziky pevných látek za použití velmi vysokých intenzit magnetického pole [1]. V práci je ukázáno, že zpřesnění dosavadní teorie elektromagnetů s koncentrací toku dává možnost značného zvýšení jejich maximálních intenzit pole.

Magnet s pólovými nástavci, ukončenými rovinami, kolmými k jeho rotační ose, dosahuje ve svém geometrickém středu nejvyšší pole  $4\pi J_s$ , je-li  $J_s$  nasycená magnetizace jeho pólových nástavců. EWING [2] ukázal, že lze tuto intenzitu zvýšit, dáme-li nástavcům tvar kužele s vrcholem v geometrickém středu magnetu. Budiž podle obr. 1  $dA$  element povrchu takového kužele, který si představujeme magnetovaný do nasycení ve směru jeho rotační osy. Pak vzniká podle Ewinga na celém jeho povrchu magnetický náboj

$$(1) \quad \sigma = J_s \sin \varphi ,$$

který vyvozuje v bodě 0 podle Coulombova zákona pole

$$(2) \quad dH_x = \sigma dA \cos \varphi / r^2 .$$

Jelikož pro kombinaci dvou pólových nástavců platí

$$(3) \quad dA = 4\pi r \sin \varphi dr ,$$

platí pro úhrnnou intenzitu pole

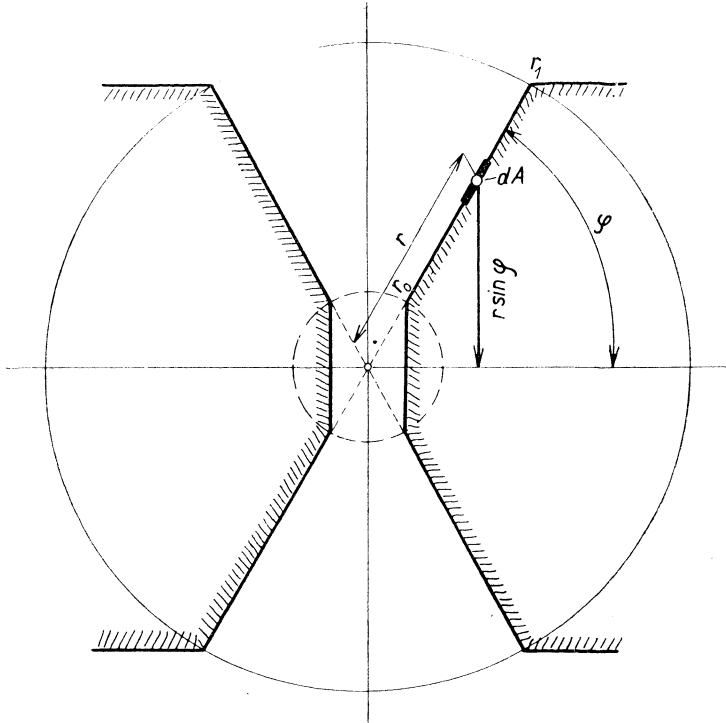
$$(4) \quad H_x = 4\pi J_s \sin^2 \varphi \cos \varphi \ln (1 + k) .$$

Zde jsou  $r$  a  $r(1 + k)$  vzdálenosti základů kuželů od středu 0, měřené na povrchu nástavců.

Maximum této funkce nastává při úhlu  $\arccos 1/\sqrt{3}$  a činí

$$(5) \quad H_{\max} = 4\pi J_s [0,387 \ln(1+k)] = 11,2 J_s \log_{10}(1+k).$$

Výraz v hranatých závorkách je faktor zesílení magnetického pole, který udává, o kolik převyšuje skutečné pole základní veličinu  $4\pi J_s$ , která představuje intenzitu pole uvnitř prostoru, který je z obou stran ohraničen souběžnými rovinami, jež se nacházejí ve



Obr. 1. Elektromagnet typu Ewingova.

stavu nasycené magnetizace ve směru kolmém k sobě. BITTER [2], [3] upozornil na to, že lze podmínku (1) splnit jen nesnadno, neboť pólový nástavec požadovaného tvaru dvou kuželů má vždy velmi značné demagnetizační pole, které se snaží natáčet směr jeho magnetizace souběžně s jeho povrchem. Bitter mimoto upozorňuje na důležitou úlohu, kterou hraje složka pole, pocházející z objemové magnetizace ferromagnetické látky elektromagnetu, kterou Ewing zanedbává. Je-li  $dV$  objemový element této ferromagnetické látky, nacházející se všude ve stavu nasycené magnetizace, je možno jemu přiřadit magnetický dipólový moment

$$(6) \quad dp = J_s \cdot dV,$$

který vyvozuje v bodě 0 intenzitu pole

$$(7) \quad dH_x = J_s dV r^{-3} [2 \cos(\vartheta - \varphi) + \sin(\vartheta - \varphi)].$$

Zde jsou  $r$  a  $\varphi$  polární souřadnice a  $\vartheta$  úhel mezi průvodičem dipólu a rotační osou elektromagnetu. Zanedbáme-li závislost rovnice (7) na  $r$ , což vede k elektromagnetu ve formě duté koule, vychází podle Bittera nejuvhodnější poloha dipólu z prosté podmínky

$$(8) \quad d(dH_x)/d\vartheta = 0.$$

Toto dává požadovaný optimální směr dipólu  $\text{tg } \vartheta = (\text{tg } \varphi)/2$ . Po dosažení této hodnoty a následující integraci přes celou dutou kouli obdržíme pak

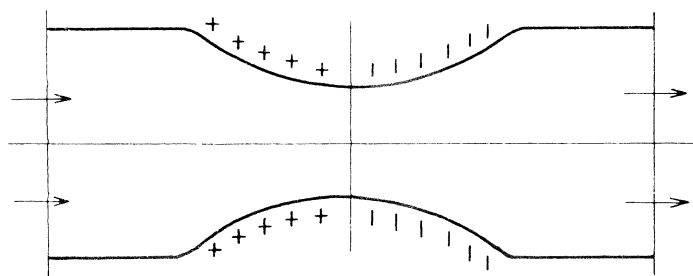
$$(9) \quad H_{\max} = 4\pi J_s [1,385 \ln(1+k)] = 40,0 J_s \ln(1+k).$$

Zde je  $(1+k)$  podíl vnějšího a vnitřního poloměru duté koule. Porovnáním (5) a (6) zjišťuje Bitter, že vliv objemových dipólů převyšuje vliv povrchových nábojů. Dopouští se však při tom jisté nepřesnosti, jelikož parametr  $(1+k)$  nemá v obou případech stejný geometrický význam. Opakovali jsme zde Bitterovu úvahu poněkud široce, jelikož v jeho původní publikaci je mnohé podáno zkráceně a domníváme se, že by nebylo bez širšího výkladu možno porozumět dalším úvahám. Chceme nyní propočítat příspěvek jak povrchových nábojů, tak objemové magnetizace k intenzitě pole uprostřed elektromagnetu a vyhnout se především podmínce (1), která byla Ewingem zavedena ad hoc. Rozdělení magnetických nábojů chceme přitom určit jistou hydrodynamickou analogií.

## I. HYDRODYNAMICKÁ ANALOGIE

Představme si podle obr. 2 trubku o proměnném průřezu, která má velmi značný hydrodynamický odpor. Tekutina musí pak všude téci stejnou rychlostí a může takto činit jen tehdy, jsou-li stěny trubky porézní, jelikož si tekutinu představujeme jako neztlačitelnou. Přebytek tekutiny odtéká pak pórami v horní polovině trubky a přitéká v dolní.

Magnetická analogie toho modelu spočívá v tom, že rychlosti neztlačitelné tekutiny je přiřazen magnetický tok, je-li ferromagnetikum magneticky nasyceno. Tok tekutiny skrz póry stěn odpovídá magnetickým nábojům, které se na povrchu ferromagnetika vytvoří. Ewingova podmínka (1) není ničím jiným, než matematická formulace této



Obr. 2. Hydrodynamická analogie.

podmínky pro speciální případ pólových nástavců s kuželovými povrchy. Chceme-li však tuto analogii aplikovat na složitější povrchy, je nutno použít odpovídající zákonitost v diferenciální formě, což se provede v rovnicích (12) a (14) dalšího odstavce. Představíme si při tom, že magnetický tok bude všude probíhat souběžně s povrchovým prvkem, který je ve stavu nasycené magnetizace. Tato podmínka již odporuje Ewingově podmínce (1), pokládáme ji však za přirozenější, jelikož je spojena s menší energií volných nábojů. V dalším chceme tento postup použít pro výpočet povrchových nábojů, vznikajících na povrchu velmi tenké ferromagnetické skořápky. Rovnici (15), která se pak odvozuje, můžeme pokládat za přesnou. Úhrnné pole podle rovnice (29) platí však jen přibližně, jelikož je odvozeno z předpokladu ferromagnetické skořápky, složené z velkého počtu velmi tenkých, diferenciálních skořápek, kde povrch každé jednotlivé skořápky nese svůj individuální magnetický náboj. Při skutečném elektromagnetu se bude naopak vyskytovat magnetický náboj jedině na vnitřním a v menší míře též na vnějším povrchu jeho ferromagnetické skořápky. Námí vypočítaný aproximativní výsledek bude proto vždy menší než skutečný, jelikož vnitřní povrch skořápky skutečného elektromagnetu je jeho středu vždy bližší než povrchy diferenciálních náhradních skořápek a náboje skutečného elektromagnetu mají proto na intenzitu pole v jeho středu vždy větší vliv. Náš výpočet tím vlastně stanoví spíše dolní mez intenzity pole.

## II. OPTIMÁLNÍ TVAR FERROMAGNETICKÉ SKOŘÁPKY

Předem popsaná hydrodynamická analogie umožňuje nám vyřešit tento problém alespoň pro velmi tenkou skořápku v uzavřené formě. Chceme předpokládat skořápku podle obr. 3, která je rotačním tělesem kolem osy  $X$ . Její povrch budiž zcela libovolný. Element jejího kolmého průřezu budiž  $dS$ . Je zcela ve stavu magnetického nasycení. Chceme v dalším derivaci podle  $\varphi$  označit čarou, tedy např.  $dr/d\varphi = r'$ . Všechna označení odečítáme z obrazu. Z něho lze stanovit vztahy

$$(10) \quad \sin(\vartheta - \varphi) = r \, d\varphi/dl = r(r'^2 + r^2)^{-1/2},$$

$$(11) \quad dS = 2\pi r \sin \varphi \sin(\vartheta - \varphi) \, dr \, d\varphi.$$

Tento element průřezu skořápky mění se při změně elevace  $\varphi$  o element  $d\varphi$  takto:

$$(12) \quad d^2S = 2\pi \, dr \, r^{-1}(r'^2 + r^2)^{-3/2} [(3r'^2 r^2 + 2r' r^4 - r'' r' r^3) \sin \varphi + (r'^2 r^3 + r^5) \cos \varphi] \, d\varphi.$$

Odpovídající povrchový element skořápky je

$$(13) \quad dA = 2\pi r \sin \varphi \, dl = 2\pi r \sin \varphi (r'^2 + r^2)^{1/2} \, d\varphi.$$

Na něm vzniká magnetický náboj

$$(14) \quad d^2\sigma = J_s \, d^2S.$$

Tento vyvozuje v bodě 0 pole podle rovnice (2)

$$(15) \quad d^2 H_A = 2\pi J_s dr r^{-1} (\varrho^2 + 1)^{-3/2} d\varphi [(2\varrho^3 + 2\varrho - \varrho' \varrho) \cos \varphi \sin \varphi + (\varrho^2 + 1) - (\varrho^2 + 1) \sin \varphi].$$

Pro zjednodušení zápisu bylo zde kladeno

$$(16) \quad \varrho = r'/r = (\ln r)'.$$

Při tomto výpočtu zanedbali jsme záměrně všechny vnější náboje, vznikající na konvexním povrchu skořápky, jelikož silokřivky jim přiřazené jsou řádově delší než silokřivky, přiřazené vnitřnímu (konkávnímu) povrchu skořápky. Objemový prvek skořápky, odpovídající přiřazenému elementu elevace  $d\varphi$ , je

$$(17) \quad dV = 2\pi r^2 \sin \varphi dr d\varphi.$$

Jeho magnetický dipólový moment v nasyceném stavu je

$$(18) \quad dp = 2\pi J_s r^2 \sin \varphi dr d\varphi.$$

Jeho průvodič svírá s osou  $X$  úhel  $(\vartheta - \varphi)$ . Vyvozuje proto podle rovnice (7) v bodě 0 intenzitu pole

$$(19) \quad d^2 H_V = 2\pi J_s dr r^{-1} (\varrho^2 + 1)^{-3/2} [(2\varrho^3 + 2\varrho) \sin \varphi \cos \psi + (\varrho + 1) \sin^2 \varphi].$$

Úhrnná intenzita pole v bodě 0 je proto

$$(20) \quad dH = \int_0^\pi (d^2 H_A + d^2 H_V) = 4\pi J_s dr r^{-1} \int_0^{\pi/2} F d\varphi,$$

$$(21) \quad F = \sin 2\varphi [2\sqrt{(1 - e^{-\xi})} - \xi' e^{-\xi/2}/4] + e^{-\xi/2},$$

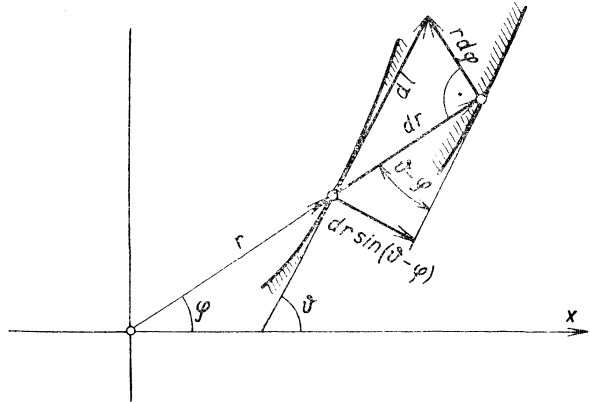
$$(22) \quad \xi = \ln(\varrho^2 + 1).$$

Funkci  $F$ , kterou neznáme, zjistíme maximalizací funkce v rovnici (20), což je možno provést metodami variačního počtu. Zde v úvahu přicházející Eulerova rovnice [4] zní

$$(23) \quad F_{\xi'\xi'} + \xi' F_{\xi'\xi} + F_{\xi'\varphi} - F_\xi = 0.$$

Výpočtem obdržíme jednoduché řešení

$$(25) \quad \varrho = d \ln r / d\varphi = 2 \operatorname{ctg} \varphi.$$



Obr. 3. Element nekonečně tenké skořápky.

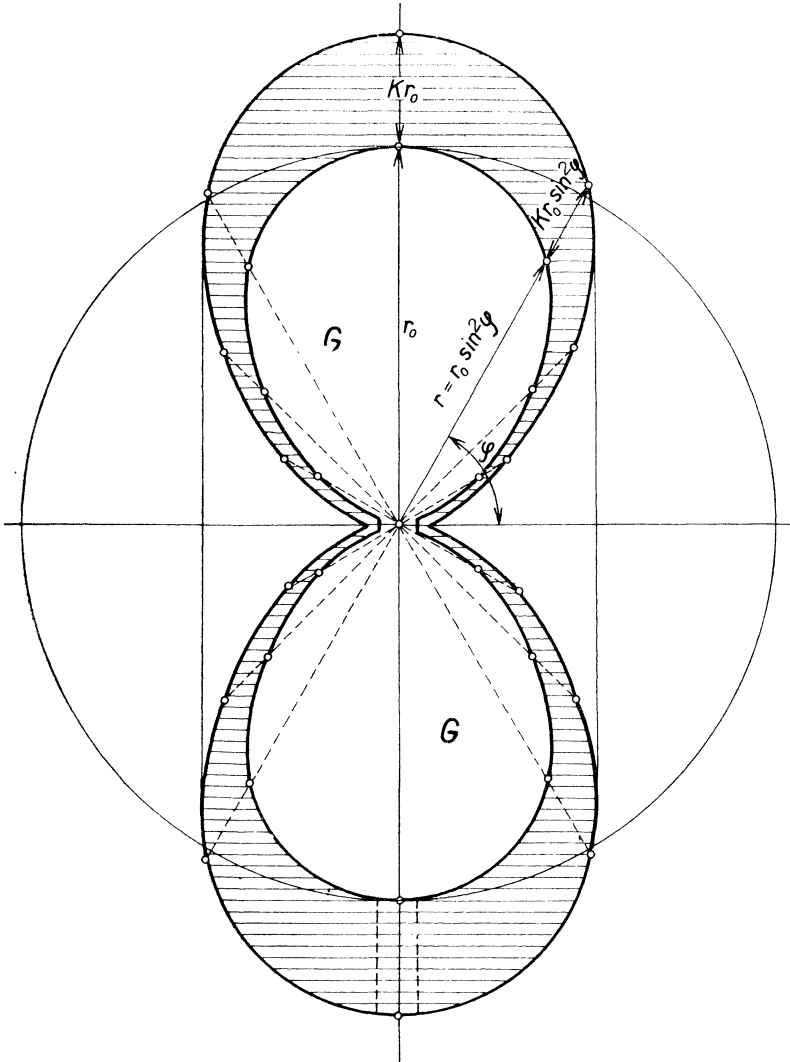
Pomocí integrace podle  $\varphi$  a rovnice (16) obdržíme pak pro optimální tvar povrchu ferromagnetické skořápky elektromagnetu rovnici

$$(26) \quad r = r_0 \sin^2 \varphi ,$$

kterýžto tvar je naznačen na obr. 4. Je pozoruhodné, že Bitter [2] dochází k téměř tvaru úvahou poněkud odlišnou.

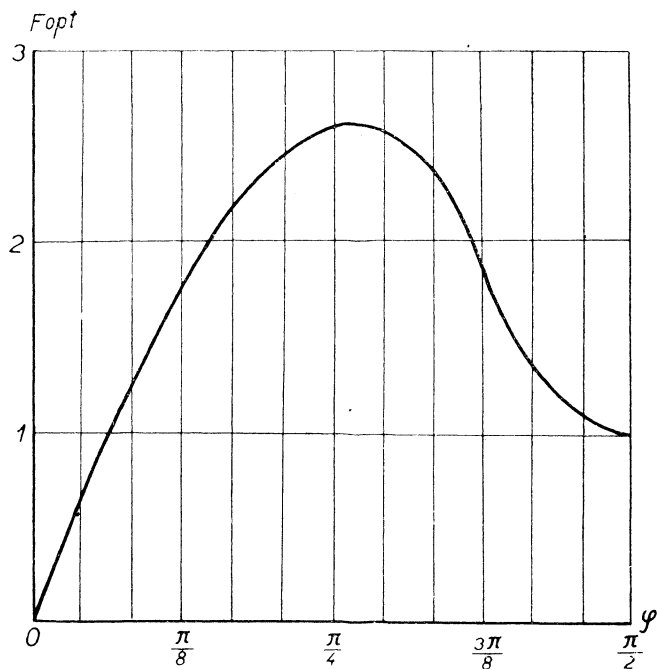
Dosadíme-li (26) do (21), obdržíme optimální funkci

$$(27) \quad F_{\text{opt}} = \sin \varphi (24 \cos^4 \varphi + 15 \cos^2 \varphi + 1) (3 \cos^2 \varphi + 1)^{-3/2} .$$



Obr. 4. Průřez celého elektromagnetu. Budící vinutí vyplňuje prostor  $G$ .

Znázornili jsme její průběh v závislosti na  $\varphi$  na obr. 5. Vliv optimální ferromagnetické skořáčky na magnetické pole ve středu elektromagnetu závisí proto na elevaci jejích elementů  $\varphi$  a je největší pro elementy s elevací  $\pi/4$ .



Obr. 5. Průběh funkce  $F_{opt}$  v závislosti na elevaci  $\varphi$ .

Nyní je možno zjistit též maximální pole. Vypočítáme si za tím účelem veličinu

$$(28) \quad \Phi_0 = \int_0^{\pi/2} F_{opt} d\varphi = 2,716$$

grafickou integrací. Pole ve středu skořáčky o konečné tloušťce lze pak zjistit takto:

$$(29) \quad H = \int_{r_0 \sin^2 \varphi}^{r_0 \sin^2 \varphi (1+k)} 4\pi J_s dr r^{-1} F_{opt} d\varphi = 4\pi J_s \Phi_0 \ln(1+k) = 78,4 \log_{10}(1+k) J_s,$$

kde  $(1+k)$  je podíl vnějšího a vnitřního poloměru skořáčky. Při odvození toho výrazu postupovali jsme analogickým způsobem jako při odvození rovnice (20). Při těchto výpočtech byl soustavně zanedbán vliv případné vzdušné spáry elektromagnetu. Dá se dokázat, že tento vliv je malý a úměrný bezrozměrné veličině  $a/r_0$ , je-li  $2a$  šířka vzdušné spáry a  $r_0$  největší vnitřní radius skořáčky.



### III. ELEKTRICKÉ BUZENÍ ELEKTROMAGNETU S OPTIMÁLNÍ SKOŘÁPKOU

Posouzení této veličiny je velmi důležité, jelikož rozhoduje o tom, lze-li takový elektromagnet provésti hospodárným způsobem. K tomu účelu musíme znát nejdelší silokřivku, probíhající ve skořápce. Je to silokřivka na jejím vnějším povrchu, která má délku

$$(30) \quad L = \int_0^{\pi} (r'^2 + r^2)^{1/2} d\varphi = 7\pi r_0(1 + k)/8 ,$$

jelikož vnější povrch elektromagnetu splňuje rovnici

$$(31) \quad r = r_0(1 + k) \sin^2 \varphi .$$

Každý element skořáčky je magneticky nasycen. Proto je nutno vyvinout podél celé délky silokřivky pole  $4\pi J_s$ , jelikož skořápka se bude chovat jako prostředí s permeabilitou rovnou 1. I. Maxwellova rovnice dává pak nutně ampéřzávity

$$(32) \quad IN = (10/4\pi) HL = 70\pi J_s(1 + k) r_0/8 .$$

Dosazováním hodnoty  $J_s = 1700$ , směrodatné pro železo, vidíme, že již při  $r_0 = 10$  cm vychází velmi vysoký počet ampéřzávitů. Je však v dnešní době celkem snadno možné, potřebné ampéřzávity získat supravodivým buzením, jelikož horní část dutiny skořáčky, vyhrazená pro buzení, leží v prostoru s poměrně malou intenzitou rozptylového pole a umožnila by proto uspořádat v ní supravodiče s poměrně malým kritickým polem.

### IV. POROVNÁNÍ NAŠICH VÝSLEDKŮ S CIZÍMI

Chceme zde k vůli přehlednosti předpokládat, že  $R_0$  resp.  $r_0$  je vnější resp. vnitřní maximální poloměr naší, případně Bitterovy skořáčky elektromagnetu, případně největší resp. nejmenší radius kuželových pólových nástavců podle Ewinga. Jak známo, lze obvyklým elektromagnetem bez koncentrace toku docílit maximální pole  $4\pi J_s$ . Podle rovnice (5) nastává v Ewingově případě zesílení toho toku při  $R_0/r_0 = 12,95$ , v Bitterově případě při  $R_0/r_0 = 2,6$  a v našem případě při  $R_0/r_0 = 1,45$  v soulase s rovnicemi (5), (9) resp. (29). Pro obě poslední alternativy lze pak vypočítat příslušný objemový poměr  $v = 3,55$ . Magnet našeho návrhu byl by proto mnohem levnější při stejném elektrickém příkonu.

#### Literatura

- [1] Kolm N.: Nature, 192 (1961), 299.
- [2] Bitter F.: Rev. Sc. Instr., 7 (1936), 479.
- [3] Bitter F.: Rev. Sc. Instr., 8 (1937), 318.
- [4] Handb. d. Phys., I. Band (1956), 265.

## Резюме

### ВКЛАД В ТЕОРИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТОВ С ВЫСОКИМ ПОЛЕМ

КАРЕЛ ВОТРУБА (Karel Wotruba)

Здесь описывается новая гидродинамическая аналогия, которая позволяет установить оптимальную форму электромагнита с концентрацией магнитного потока. Задача решается методами вариационного исчисления для оптимальной формы оболочки электромагнита, которая решается замкнутым способом. Доказывается, что усиление поля начинается уже при отношении внешнего и внутреннего радиуса, равном 1,45, в то время как теория Биттера вычисляет отношение 2,6.

## Zusammenfassung

### ZUR THEORIE DER ELEKTROMAGNETE MIT HOHEN FELDERN

KAREL WOTRUBA

Es wird hier eine neue hydrodynamische Analogie beschrieben, die es ermöglicht die optimale Form eines Elektromagneten mit Feldkonzentration zu ermitteln. Die Aufgabe führt auf ein Variationsproblem für die optimale Gestalt der Schale des Elektromagneten, welches sich in geschlossener Form lösen lässt. Es wird bewiesen, dass die Feldverstärkung hier schon bei einem Verhältnis des äusseren und inneren Radius von 1,45 beginnt, während die Bittersche Theorie auf ein Verhältnis von 2,6 führt.

*Adresa autora: Karel Wotruba C.Sc., Ústav fyziky pevných látek ČSAV, Cukrovarnická 10, Praha 6.*