Václav Doležal; Zdeněk Vorel

O periodických stavech v Kirchhoffovych sítích

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 1, 31–38

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102881`

O PERIODICKÝCH STAVECH V KIRCHHOFFOVÝCH SÍTÍCH

VÁCLAV DOLEŽAL, ZDENĚK VOREL

(Došlo dne 19. ledna 1963.)

Práce navazuje na článek [1] a je věnována podmínkám existence a výpočtu periodických stavů v Kirchhoffových sítích. Jsou vyšetřeny oba případy, kdy nastává a nenastává resonance na kmitočtu budících napětí.

V dalším budeme předpokládat, že čtenář je obeznámen s prací [1], kde byly zavedeny pojmy regularity Kirchhoffovy sítě, a zejména bylo vyšetřováno chování sítě v časové oblasti $\langle 0, \infty)$. V této práci budeme si všímat otázek existence a konstrukce periodických řešení sítě v časové oblasti $(-\infty, \infty)$.

V [1] bylo naznačeno, jaké výhody přináší použití distribucí k formulaci a řešení problémů sítí; proto i zde budeme pracovat s distribucemi, ježto i pro vyšetřování periodických stavů mají četné výhody a zjednodušují úvahy.

Poněvadž nám půjde o periodická řešení, povězme si nejdříve stručně o periodických distribucích. Nebudeme zde uvádět jejich přesnou definici (tu může čtenář nalézt v [2]); uveďme jen, že T-periodická distribuce je speciálním případem obecné distribuce (tj. patří do D, viz [1]), a je zobecněním pojmu periodické funkce, tj. každá integrovatelná periodická funkce s periodou $T > 0$ je zároveň T-periodickou distribucí.

Lineární operace s T-periodickými distribucemi můžeme provádět zcela shodně jako s funkcemi, tj. je-li například α konstanta a f, g, T-periodické distribuce, pak platí $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ apod. (Viz ostatně [1].)

Označíme-li D_T systém všech T-periodických distribucí, pak lze snadno ukázat, že platí toto tvrzení: *je-li* $f, g \in D_T$, α, β *čísla, pak* $\alpha f + \beta g \in D_T$, $f' \in D_T$.

Všimněme si nyní jedné důležité vlastnosti T-periodických distribucí. Je-li $f(t)$ nějaká integrovatelná periodická funkce s periodou T, potom, jak známo, „lze ji rozvinout" ve Fourierův rozvoj, tj. lze vypočítat čísla

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \exp\left(-\frac{2\pi i n t}{T}\right) \mathrm{d}t\,, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1}$$

a formálně utvořit řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in\omega t)\,, \quad \omega = 2\pi/T\,. \tag{2}$$

(Necháváme zatím stranou otázky konvergence.) Podobné, a dokonce ještě účinnější tvrzení platí pro distribuce:

Lemma 1. *Je-li $f \in D_T$, pak existují jednoznačně určená čísla c_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ tak, že platí*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t)\,, \quad \omega = 2\pi/T\,, \tag{3}$$

přičemž řada (3) *konverguje v distributivním smyslu. Současně existují čísla C, k (závisící na f) tak, že*

$$|c_n| \leqq C|n|^k\,, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots\,. \tag{4}$$

Nadto platí: Jestliže některá distribuce f je definována řadou (3), *kde čísla c_n splňují nerovnost* (4), *pak $f \in D_T$.*

Dále lze dokázat, že platí toto tvrzení:

Lemma 2. *Je-li $f \in D_T$ regulární distribuce, tj. f je ztotožnitelná s některou lokálně integrovatelnou funkcí $f(t)$, pak $f(t)$ je periodická s periodou T, a rozvoj* (2) *konverguje v distributivním smyslu k f.*

Poslední tvrzení tedy značí, že „rozvineme-li" periodickou funkci $f(t)$ ve Fourierovu řadu, pak tato řada automaticky konverguje v distributivním smyslu k $f(t)$.

Příkladem periodické distribuce je $g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_{2k\pi}$, která fysikálně představuje posloupnost jednotkových impulsů, působících v okamžicích $2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; lze snadno ukázat, že pro g platí rozvoj

$$g = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(int)\,. \tag{5}$$

Bližší poučení o T-periodických distribucích lze nalézt v [3].

Přistupme nyní k vlastnímu tématu článku. V [1] jsme definovali Kirchhoffovu síť (dále K-síť) jako uspořádanou čtveřici (G, R, L, S), kde G označuje graf sítě a R, L, S čtvercové matice, jejichž prvky představují vzájemné (vlastní) odpory, indukčnosti a převratné hodnoty kapacit mezi jednotlivými větvemi sítě. Jsou-li všechny matice R, L, S positivně semidefinitní a R, S diagonální, nazvali jsme příslušnou síť pasivní sítí.

Zaveďme nyní pojem řešení sítě v časové oblasti $(-\infty, \infty)$.

Buď e vektor, jehož prvky jsou distribuce, $\mathfrak{N} = (G, R, L, S)$ K-síť; vektor q, jehož prvky jsou distribuce, nazveme řešením $\mathfrak{N}$ v časové oblasti $(-\infty, \infty)$ příslušným vektoru e, jestliže platí rovnice

$$c'(Lq'' + Rq' + Sq) = c'e \tag{K 1.}$$

pro každý cykl $c'h$ grafu G, a rovnice

K 2. $$a'q = 0,$$

kde a je incidenční matice grafu G. (Srv. [1].)

Zřejmě rovnice K 1., K 2., jsou formulacemi Kirchhoffových zákonů, kde q je vektor, jehož prvky představují náboje, které prošly jednotlivými větvemi sítě. Všimněme si zároveň, že je-li q nějaké řešení, potom $i = q'$ má význam vektoru proudů v jednotlivých větvích.

Lze snadno ukázat, že každé řešení rovnice $a'x = 0$ lze psát ve tvaru $x = Xy$, kde y je vektor a kde X je konstantní matice, jejíž sloupce tvoří nějakou úplnou soustavu lineárně nezávislých řešení rovnice $a'x = 0$. Poznamenejme, že za X lze speciálně vzít matici, jejíž sloupce odpovídají nějaké úplné soustavě lineárně nezávislých obvodů grafu G. (Srv. [1].) Použijeme-li tohoto tvrzení a položíme-li $q = Xw$, snadno vyplyne, že soustava K 1., K 2. je ekvivalentní vektorové rovnici

($\overline{\mathrm{K}}$) $$X'(LXw'' + RXw' + SXw) = X'e.$$

Označíme-li D operátor derivování, tj. D je definován rovnicí $Dw = w'$, můžeme ($\overline{\mathrm{K}}$) psát ve tvaru

(K) $$(X'LXD^2 + X'RXD + X'SX)\,w = X'e.$$

Rovnice (K) dává tušit, že stejně jako v [1] bude i zde hrát důležitou roli matice

(6) $$M(p) = X'LXp^2 + X'RXp + X'SX.$$

Zaveďme ještě toto označení: „x je vektor nad D_T" znamená, že prvky vektoru x patří do D_T. Pak lze dokázat následující tvrzení: (Srv. [2].)

Věta 1. *Buď $\mathfrak{N}$ K-síť, e vektor nad D_T, a nechť* $e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t)$, $\omega = 2\pi/T$. *Jestliže* $\det M(in\omega) \neq 0$ *pro* $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *pak síť $\mathfrak{N}$ má jediné řešení q nad D_T; přitom platí*

(7) $$q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} XM^{-1}(in\omega)\,X'c_n \exp(in\omega t).$$

Nadto platí: Je-li $\mathfrak{N}$ pasivní síť a jsou-li prvky e regulární distribuce, potom rovněž prvky vektoru q jsou regulárními distribucemi.

Poznamenejme, že řada (7) vždy konverguje v distributivním smyslu, a podává tedy explicitní výraz pro řešení. Zároveň podtrhněme tu okolnost, že když síť je pasivní a elektromotorické síly jsou vyjádřeny funkcemi, že potom též řešení q je vyjádřitelné funkcemi.

Věta 1 se zabývala „regulárním případem", tj. kdy všechny vlastní kmitočty sítě jsou různé od celistvých násobků kmitočtu vložených zdrojů. (Je-li totiž $\det M(in\omega) = 0$ pro některé n_0, pak $M^{-1}(in_0\omega)$ neexistuje a formule (7) nemá smysl.) Zdůrazněme, že v tomto regulárním případě existovalo jediné řešení pro jakýkoliv vektor e nad D_T.

Může však nastat i ten případ, že některý z vlastních kmitočtů sítě je roven některému násobku $n\omega$, avšak vektor e má takové speciální vlastnosti, že periodické řešení existuje, tj. existuje vektor q nad D_T tak, že jsou splněny rovnice K 1., K 2. Věnujme se proto nyní tomuto případu. Ježto každou T-periodickou distribuci můžeme rozložit ve Fourierův rozvoj (3), budeme se zabývat pro jednoduchost (a bez újmy obecnosti) pouze tím případem, že vektor elektromotorických sil e má tvar $e = c \exp(i\omega t)$. Potom lze pro pasivní sítě dokázat následující jednoduchá tvrzení: (Srv. [2].)

Věta 2. *Je-li* $\mathfrak{N} = (G, R, L, S)$ *pasivní K-síť,* $\omega \neq 0$, *buď* $d(p) = \det M(p)$ *a* $N(p)$ *adjungovaná matice k* $M(p)$ *(tj. platí* $N(p) M(p) = M(p) N(p) = I d(p)$*). Je-li* $i\omega$ *k-násobným kořenem mnohočlenu* $d(p)$, *pak všechny prvky* $N(p)$ *jsou dělitelné* $\varrho(p) = (p - i\omega)^{k-1}$.

Nadto platí: Buď $\tilde{d}(p) = \varrho^{-1}(p) d(p)$, $\tilde{N}(p) = \varrho^{-1}(p) N(p)$, *c konstantní vektor.*

a) Je-li

(8) $$\tilde{N}(i\omega) X' c = 0 ,$$

pak existují řešení sítě $\mathfrak{N}$ *tvaru* $q = h \exp(i\omega t)$ *odpovídající vektoru* $e = c \exp(i\omega t)$. *Přitom*

(9) $$h = [\tilde{d}'(i\omega)]^{-1} X(\tilde{N}'(i\omega) X' c + \tilde{N}(i\omega) X' \eta) ,$$

kde η *je libovolný konstantní vektor.*

b) Není-li podmínka (8) splněna, pak každé řešení $\mathfrak{N}$ *odpovídající vektoru* $e = c \exp(i\omega t)$ *je vektor, jehož prvky (které jsou regulárními distribucemi) nejsou ohraničeny na celé ose* $(-\infty, \infty)$.

Pokud jde o případ stejnosměrných elektromotorických sil, kdy $\det M(0) = 0$, platí věta:

Věta 3. *Je-li* $\mathfrak{N} = (G, R, L, S)$ *pasivní K-síť, buď* $d(p) = \det M(p)$ *a* $N(p)$ *adjungovaná matice k* $M(p)$. *Je-li* $p = 0$ *k-násobným kořenem* $d(p)$, *pak buď 1) všechny prvky* $N(p)$ *jsou dělitelné* $\varrho_1(p) = p^{k-1}$, *nebo 2) všechny prvky* $N(p)$ *jsou dělitelné* $\varrho_2(p) = p^{k-2}$ *a alespoň jeden prvek* $N(p)$ *není dělitelný* p^{k-1}.

Nadto platí: Buď c konstantní vektor a nechť $d_i(p) = \varrho_i^{-1}(p) d(p)$, $N_i(p) = \varrho_i^{-1}(p) N(p)$, $i = 1, 2$; *potom*

a) nastává-li případ 1), a je-li splněna rovnice

(10) $$N_1(0) X' c = 0 ,$$

pak existují konstantní řešení q_c *sítě* $\mathfrak{N}$ *odpovídající vektoru* $e = c$, *přičemž*

$$q_c = [d_1'(0)]^{-1} X(N_1'(0) X' c + N_1(0) X' \eta) ,$$

kde η *je libovolný konstantní vektor. Není-li podmínka (10) splněna, pak prvky každého řešení q odpovídajícího* $e = c$ *nejsou ohraničené na* $(-\infty, \infty)$;

b) nastává-li případ 2) a existuje-li konstantní vektor ξ tak, že jsou splněny rovnice

$$(11) \qquad N_2(0)\, X'c = 0\,, \quad N_2'(0)\, X'c + N_2(0)\, \xi = 0\,,$$

pak existuje konstantní řešení q_c sítě $\mathfrak{N}$ odpovídající vektoru $e = c$, přičemž

$$q_c = \left[d_2''(0)\right]^{-1} X(N_2''(0)\, X'c + N_2'(0)\, \xi + N_2(0)\, X'\eta)\,,$$

kde η je libovolný konstantní vektor. Nejsou-li podmínky (11) splněny, pak prvky každého řešení q příslušného vektoru $e = c$ nejsou ohraničené na $(-\infty, \infty)$.

Je zřejmé, že věty 2 a 3 jsou explicitními prostředky ke stanovení periodických řešení v případě, kdy kmitočet budících elektromotorických sil je shodný s některým z vlastních kmitočtů sítě. Všimněme si zároveň, že zde existuje nekonečně mnoho periodických řešení.

Až dosud zabývali jsme se případem, kdy nám šlo o periodicitu vektoru q, tj. nábojů v síti. Je zřejmé, že v tomto případě jsou napětí na kondensátorech periodickými distribucemi; odtud plyne, ježto je $i = q'$, že i proudy jsou periodické, a tedy že i všechna napětí na odporech jsou periodická. Ježto dále $i' = q''$ je rovněž vektorem nad D_T, $T = 2\pi/\omega$, vyplývá z toho, že i všechna napětí na indukčnostech jsou periodická.

Někdy klademe však slabší požadavky; stačí nám, když pouze proudy jsou periodické (a tedy i napětí na odporech a indukčnostech), a nezáleží nám na periodicitě nábojů. Pro tento případ platí následující tvrzení:

Věta 4. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 2; potom rovnice (8) je nutnou a postačující podmínkou pro existenci takových řešení q odpovídajících vektoru $e = c \exp(i\omega t)$, že $i = q'$ má tvar $\tilde{h} \exp(i\omega t)$. Přitom je*

$$(13) \qquad \tilde{h} = i\omega\left[\tilde{d}'(i\omega)\right]^{-1} X(\tilde{N}'(i\omega)\, X'c + \tilde{N}(i\omega)\, X'\eta)\,,$$

kde η je libovolný konstantní vektor.

Věta 5. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 3; pak platí:*

a) Nastává-li případ 1), pak existují řešení q odpovídající vektoru $e = c$ tak, že $i = q' = \left[d_1'(0)\right]^{-1} XN_1(0)\, X'c$. (Je tedy i určeno jednoznačně.)

b) Nastává-li případ 2), pak rovnice

$$(14) \qquad N_2(0)\, X'c = 0$$

je nutnou a postačující podmínkou pro existenci takových řešení q_α odpovídajících vektoru $e = c$, že $i_\alpha = q_\alpha'$ je konstantní vektor. Přitom je

$$(15) \qquad i_\alpha = \left[d_2''(0)\right]^{-1} X(N_2'(0)\, X'c + N_2(0)\, X'\eta)\,,$$

kde η je libovolný konstantní vektor.

V souvislosti s existencí periodického proudového režimu všimněme si ještě disipativních sítí. V [1] byla disipativní síť zavedena jako pasivní K-síť, jejíž matice

$X'RX$ je positivně definitní, nebo, což je totéž, taková pasivní K-síť, v jejímž každém obvodu je zapojen aspoň jeden (nenulový) ohmický odpor. Zde platí tvrzení:

Věta 6. *Buď* $\mathfrak{N} = (G, R, L, S)$ *disipativní síť,* $T > 0$, *e vektor nad* D_T. *Pak existují řešení q odpovídající vektoru e tak, že* $i = q'$ *je vektor* D_T, *přičemž i je určeno jednoznačně. Nadto platí: Je-li* $e = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t)$, $\omega = 2\pi/T$, *pak*

$$i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(in\omega)\, c_n \exp(in\omega t)\,, \tag{16}$$

kde

$$A(p) = XpM^{-1}(p)\, X'\,.$$

Věnujme se nyní dalším skutečnostem, spjatým s existencí periodických řešení. Z rovnic (K) a (6) ihned plyne, že mezi řešeními sítě $\mathfrak{N}$ typu $q \exp(i\omega t)$, kde q je konstantní vektor, při $e = c \exp(i\omega t)$, (kde c je rovněž konstantní vektor a $\omega \neq 0$) na jedné straně a řešením w soustavy algebraických rovnic

$$M(i\omega)\, w = X'c \tag{17}$$

na straně druhé existuje vzájemně jednoznačné přiřazení dané vztahem

$$q = Xw \exp(i\omega t)\,.$$

Je-li $\det M(i\omega) \neq 0$, má $\mathfrak{N}$ zřejmě jediné řešení $q = q_0 \exp(i\omega t)$, tj. existuje jediné $q_0 = Xw$, kde w je řešením rovnice (17) takové, že $q_0 \exp(i\omega t)$ je řešením $\mathfrak{N}$.

V případě $\det M(i\omega) = 0$ je známo z algebry, že rovnice (17) má řešení právě tehdy, platí-li pro každé řešení y rovnice

$$M(i\omega)\, y = 0 \tag{18}$$

vztah

$$y'X'c = 0\,. \tag{19}$$

Dá se dokázat, že pro pasivní síť lze rovnici (19) nahradit rovnicí

$$\bar{y}'X'c = 0\,, \tag{20}$$

kde prvky vektoru $\bar{y}$ jsou komplexně sdružené k prvkům vektoru y. Fysikální význam řešení y rovnice (18) je tento: $i\omega Xy \exp(i\omega t)$ je vektorem proudů, které existují v síti pro $e = 0$. Jak známo, zdánlivý výkon dodávaný do sítě všemi zdroji elektromotorických sil je roven číslu $\overline{(i\omega Xy)}'c = -i\omega\bar{y}'X'c = -i\omega y'X'c$. Z rovnic (20) a (19) tedy plyne, že pasivní K-síť $\mathfrak{N}$ v případě $\det M(i\omega) = 0$, $e = c \exp(i\omega t)$ bude mít řešení typu $q_0 \exp(i\omega t)$, kde q_0 je konstantní vektor, právě tehdy, bude-li každý vektor proudů, které existují v síti pro $e = 0$, dávat nulový výkon s vektorem elektromotorických sil. Tento výsledek je však z fysikálního hlediska pochopitelný, neboť je-li u řešením rovnice (17) a y řešením rovnice (18), potom též $u + y$ je řešením rovnice (17). Tedy proudy odpovídající vektoru y jsou nezávislé na e a nedávají žádný výkon.

Dále lze dokázat, že platí tvrzení:

Věta 7. *Buď* $\mathfrak{N}$ *pasivní K-síť,* $e = c \exp(i\omega t)$, $\det M(i\omega) = 0$. *Potom rovnice* (19) *platí tehdy a jen tehdy, je-li splněna rovnice* (8) *pro* $\omega \neq 0$, *rovnice* (10) *nebo* (11) pro $\omega = 0$.

Není bez zajímavosti otázka, ,,kolik" řešení existuje v sigulárním případě. Z toho, co bylo řečeno shora, vyplývá, že o počtu členů úplné soustavy lineárně nezávislých řešení tvaru $q \exp(i\omega t)$ rozhoduje hodnost matice $M(i\omega)$. Zde platí následující věta:

Věta 8. *Nechť okolnost, že* $i\omega$ *je k-násobným kořenem* $\det M(p)$ *implikuje, že každý prvek matice* $N(p)$ *je dělitelný faktorem* $(p - i\omega)^{k-1}$; *pak platí: a) hodnost matice* $M(i\omega)$ *je rovna* $n - k$, *kde n je řád matice* $M(p)$. *b) množina všech sloupců (a též všech řádků) matice* $[(p - i\omega)^{1-k} N(p)]_{p=i\omega}$ *tvoří úplný systém lineárně nezávislých řešení rovnice* (18).

Případ $\det M(0) = 0$ vedl na poněkud složitější podmínky (10), (11) pro existenci periodického řešení. Poznamenejme, že tento případ není nijak vyjímečný, neboť je ekvivalentní s následujícím případem: Existuje nenulový cykl $c'h$ sítě $\mathfrak{N}$ tak, že $\sum_{i=1}^{r} c_i^2 S_{ii} = 0$. Odtud plyne, že tedy existuje takový obvod sítě $\mathfrak{N}$, který neobsahuje kapacity.

Pro disipativní sítě vede případ $\det M(0) = 0$ na existenci řešení takových, že q' je konstantní vektor a je určen jednoznačně. (Srv. ostatně s větou 6.) Zde platí tvrzení:

Věta 9. *Budiž* $\mathfrak{N}$ *disipativní K-síť,* $c \neq 0$ *reálný konstantní vektor, a nechť platí* $\det M(0) = 0$. *Potom existuje jediný reálný konstantní vektor* $\tilde{a}$ *a vektor* $\tilde{b}$ *tak, že* $q = \tilde{a}t + \tilde{b}$ *je reálné řešení sítě* $\mathfrak{N}$ *pro* $e = c$.

Literatura

[1] *Doležal V.-Vorel Z.:* O některých základních vlastnostech Kirchhoffových sítí, Aplikace matem., 8 (1963), č. 1.

[2] *Doležal V.-Vorel Z.:* Periodic Solutions of Kirchhoff's Networks, Čas. pro pěst. matem., (88) 1963, č. 4.

[3] *Гельфанд И. М.-Шилов Г. Е.:* Обобщенные функции и действия над ними, Москва 1958.

Резюме

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЯХ В СЕТЯХ КИРХГОФФА

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ, ЗДЕНЕК ВОРЕЛ (Václav Doležal, Zdeněk Vorel)

Статья примыкает к работе [1] и занимается вопросами существования и единственности периодических состояний в сетях Кирхгоффа.

Введя понятие решения сети Кирхгоффа в области времени $(-\infty, \infty)$, авторы исследуют прежде всего регулярный случай, кога в сети имеется только один T-периодический режим зарядов.

Затем изучаются частные особые случаи, т.е. исследуется существование решения (зарядов) пассивной сети вида $q = h \exp(i\omega t)$, когда некоторая из собственных частот сети равна ω и электродействующие силы имеют также вид $e = c \exp(i\omega t)$.

Далее исследуется регулярный и особый случай при наличии периодического режима тока.

В заключение толкуется физическое значение некоторых математических обстоятельств.

Summary

ON PERIODIC STATES IN KIRCHHOFF'S NETWORKS

VÁCLAV DOLEŽAL, ZDENĚK VOREL

This paper is linked to the authors' previous paper [1], and treats existence and unicity of periodic states in Kirchhoff networks.

First the notion of a solution in $(-\infty, +\infty)$ of a Kirchhoff network is introduced, and the regular case examined, in which there is a unique T-periodic system of charges in the network.

Next, certain singular cases are considered: the existence of solutions with the form $q = h \exp i\omega t$ of a passive network, where ω is an eigenfrequency, if the electromotive forces also have the form $e = c \exp i\omega t$. Finally, the existence of a periodic system of currents is examined in the regular and singular case.

In conclusion, a physical interpretation of some mathematical results is given.

Adresy autorů: Ing. *Václav Doležal* C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1. — Ing. *Zdeněk Vorel* C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Žitná 25, Praha 1.