Emil Navrátil; Ivan Úlehla

Výpočet některých integrálů obsahujících Hermiteovy polynomy

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 5, 385–391

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102871

VÝPOČET NĚKTERÝCH INTEGRÁLŮ OBSAHUJÍCÍCH HERMITEOVY POLYNOMY

EMIL NAVRÁTIL, IVAN ÚLEHLA

(Došlo dne 10. ledna 1963.)

V práci jsou vypočteny integrály $J_{a,b,c} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_a(x)\, H_b(x)\, H_c(x)\, \mathrm{d}x$ a $K_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x} H_n(\sqrt{2}x)\, H_m[\sqrt{2}(x+\beta)]\, \mathrm{d}x$. Hodnoty těchto integrálů lze použít k výpočtu vazbové energie atomového jádra.

I. ÚVOD

K výpočtu vazbové energie atomového jádra je třeba řešit integrální rovnici EDEN-GOLDSTONEOVU [1]. K tomu potřebujeme především znát její jádro, které obsahuje integrály $J_{a,b,c} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_a(x)\, H_b(x)\, H_c(x)\, \mathrm{d}x$ a $K_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x} H_n(\sqrt{2}x)\,.$ $.\, H_m[\sqrt{2}(x+\beta)]\, \mathrm{d}x$, kde a, b, c, m, n jsou celá nezáporná čísla.

II. VÝPOČET INTEGRÁLU $J_{a,b,c}$

Pro Hermiteovy polynomy platí vztahy

$$H_{n+1}(x) = 2x\, H_n(x) - 2n\, H_{n-1}(x) \quad (n \geqq 1)\,, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}H_n(x)/\mathrm{d}x = 2n\, H_{n-1}(x) \qquad (n \geqq 1)\,. \tag{2}$$

Použitím vztahu (1) dostaneme

$$J_{a,b,c} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2xe^{-x^2}\, H_{a-1}(x)\, H_b(x)\, H_c(x)\, \mathrm{d}x - 2(a-1)\, J_{a-2,b,c}$$
$$(a \geqq 2,\ b \geqq 0,\ c \geqq 0)\,.$$

Integrací per partes a užitím vztahu (2) v prvém integrálu dostáváme rekurentní vztah

$$J_{a,b,c} = 2b\, J_{a-1,b-1,c} + 2c\, J_{a-1,b,c-1}\,, \tag{3}$$

platný pro $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $c \geqq 1$. Opakovaným použitím rekurentního vztahu (3) dostaneme pro libovolné celé nezáporné $p \leqq \min(a, b, c)$

$$J_{a,b,c} = 2^p \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{b!}{(b-p+k)!} \frac{c!}{(c-k)!} J_{a-p,b-p+k,c-k}. \tag{4}$$

Důkaz provedeme matematickou indukcí.

1. Pro $p = 1$ vztah platí podle (3).

2. Předpokládejme jeho platnost pro nějaké $p \leqq \min(a, b, c) - 1$

$$J_{a,b,c} = 2^{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{b!}{(b-p+k-1)!} \frac{c!}{(c-k)!} J_{a-p-1,b-p+k-1,c-k} +$$

$$+ 2^{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{b!}{(b-p+k)!} \frac{c!}{(c-k-1)!} J_{a-p-1,b-p+k,c-k-1} =$$

$$= 2^{p+1} \left\{ \frac{b!}{(b-p-1)!} J_{a-p-1,b-p-1,c} + \frac{c!}{(c-p-1)!} J_{a-p-1,b,c-p-1} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{p} \left[\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1} \right] \frac{b!}{(b-p-1+k)!} \frac{c!}{(c-k)!} J_{a-p-1,b-p-1+k,c-k} \right\} =$$

$$= 2^{p+1} \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} \frac{b!}{(b-p-1+k)!} \frac{c!}{(c-k)!} J_{a-p-1,b-p-1+k,c-k},$$

čímž jsme obdrželi platnost pro $p + 1$. Nechť $a = \min(a, b, c)$. Potom pro $p = a$ vztah (4) dává

$$J_{a,b,c} = 2^a \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} J_{0,b-a+k,c-k} \frac{b!}{(b-a+k)!} \frac{c!}{(c-k)!}. \tag{5}$$

Pro integrál $J_{0,a,b}$ platí známý vztah [2], $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_a(x) H_b(x) \, dx = \sqrt{\pi} 2^a a! \, \delta_{ab}$, takže

$$J_{0,b-a+k,c-k} = \delta_{b-a+k,c-k} \cdot 2^{(b-a+c)/2} \sqrt{\pi} \sqrt{(b-a+k)! (c-k)!}.$$

Aby integrál $J_{a,b,c}$ byl různý od nuly, musí být splněno

$$k = \frac{a+c-b}{2}, \quad 0 \leqq \frac{a+c-b}{2} \leqq a, \tag{6}$$

přičemž musí být k číslo celé. Musí být tudíž především $a + b + c$ číslo sudé, což ostatně plyne též triviálně přímo z faktu, je-li $a + b + c$ číslo liché, je integrál $J_{a,b,c}$ integrálem z liché funkce přes interval $(-\infty, +\infty)$, a proto je roven nule. Je-li $a + b + c$ číslo sudé, pak podmínka (6) je ekvivalentní se soustavou nerovností

$$a + c \geqq b, \quad a + b \geqq c,$$

která je dále ekvivalentní se soustavou trojúhelníkových nerovností (v případě $a = \min(a, b, c)$)

$$(7) \qquad a + b \geqq c\,, \quad a + c \geqq b\,, \quad b + c \geqq a\,,$$

jejichž platnost spolu s podmínkou $a + b + c$ je sudé je nutná a postačující pro nenulovost integrálu $J_{a,b,c}$ pro případ $a = \min(a, b, c)$. Hledaný integrál je potom roven

$$(8) \quad J_{a,b,c} = 2^{(a+b+c)/2} \sqrt{\pi} \frac{a!\, b!\, c!}{[\frac{1}{2}(a + b - c)]!\, [\frac{1}{2}(b + c - a)]!\, [\frac{1}{2}(c + a - b)]!}\,.$$

Není-li $a = \min(a, b, c)$, pak vzhledem k symetrii integrálu $J_{a,b,c}$ a soustavy (7) ve všech třech indexech zůstává (7) spolu s požadavkem, že $a + b + c$ je sudé, nutnou a postačující podmínkou nenulovosti integrálu $J_{a,b,c}$, který je pak dán opět vztahem (8).

III. VÝPOČET INTEGRÁLU $K_{n,m}$

Zabývejme se napřed integrálem $K_{0,m}$. Po výpočtu integrálu $K_{0,m}$ pro několik nejnižších hodnot m lze uhodnout jeho obecné vyjádření

$$(9) \qquad K_{0,m} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^m H_m\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right).$$

Důkaz úplnou indukcí.

1. $m = 0$: $K_{0,0} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12}$; vztah (9) platí pro $m = 0$.

2. $m = 1$: $$K_{0,1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x} \,.\, 2[\sqrt{2}(x + \beta)]\, \mathrm{d}x =$$

$$= 2\sqrt{2}\,(-1)\, \frac{\mathrm{d}y_{0,0}}{\mathrm{d}\alpha} + 2\sqrt{2}\beta y_{0,0} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) H_1\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right).$$

Vzorec platí tedy i pro $m = 1$.

3. Předpokládáme, že vztah (9) platí pro $K_{0,m-1}$ a pro $K_{0,m}$ ($m \geqq 1$). Máme dokázat jeho platnost i pro $K_{0,m+1}$.

$$K_{0,m+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x} H_{m+1}[\sqrt{2}(x + \beta)]\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x} \{2\sqrt{2}(x+\beta) H_m[\sqrt{2}(x+\beta)] - 2m H_{m-1}[\sqrt{2}(x+\beta)]\} \, dx =$$

$$= -2\sqrt{2}\frac{d}{d\alpha} K_{0,m} + 2\sqrt{2}\beta K_{0,m} - 2m K_{0,m-1} =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} e^{\alpha^2/12} H_{m+1}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right),$$

kde bylo použito vztahu (2) jakož i rekurentního vztahu (1) pro Hermiteovy polynomy. Tím je dokázána platnost vztahu (9) pro libovolné celé nezáporné m.

Nyní odvodíme rekurentní vztah pro integrál $K_{n,m}$ vzhledem k indexu n.

$$(10) \qquad K_{n+1,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x} H_{n+1}(\sqrt{2}x) H_m[\sqrt{2}(x+\beta)] \, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x}[2\sqrt{2}x H_n(\sqrt{2}x) - 2n H_{n-1}(\sqrt{2}x)] H_m[\sqrt{2}(x+\beta)] \, dx =$$

$$= -2\sqrt{2}\frac{dK_{n,m}}{d\alpha} - 2n K_{n-1,m} \quad (n \geqq 1).$$

Použitím tohoto rekurentního vztahu můžeme vypočítat hodnoty $K_{n,m}$ pro několik nejnižších hodnot n (při libovolném m). Odtud můžeme usoudit na obecné vyjádření $K_{n,m}$ ve tvaru

(11)
$$K_{n,m} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{\alpha^2/12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+n} \cdot \sum_{k=0}^{\min(m,n)} k!\,.\,4^k\binom{n}{k}\binom{m}{k} H_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right).$$

D ů k a z vztahu (11) úplnou indukcí:

1. $n = 0$: $K_{0,m} = \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{\alpha^2/12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^m H_m\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right)$. Vztah platí pro $n = 0$.

2. $n = 1$: $K_{1,m} = -2\sqrt{2}\frac{dy_{0,m}}{d\alpha} =$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{3}} e^{\alpha^2/12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+1} \sum_{k=0}^{1} k!\,.\,4^k\binom{1}{k}\binom{m}{k} H_{1-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right),$$

kde bylo opět použito vyjádření (2) pro $H_j'(x)$ jakož i rekurentního vztahu (1). Vztah (11) platí tedy i pro $n = 1$ při libovolném m.

3. Předpokládejme, že vztah (11) platí pro $K_{p,q}$, kde $p = 0, 1, 2, \ldots, n$; q libovolné nezáporné celé. Máme dokázat, že vztah (11) platí pak i pro $K_{n+1,m}$, přičemž m je libovolné celé nezáporné. Tím bude vztah (11) plně dokázán pro libovolná celá nezáporná n, m.

K výpočtu $K_{n+1,m}$ podle rekurentního vzorce (10) je zapotřebí především vypočítat $\mathrm{d}K_{n,m}/\mathrm{d}\alpha$. Platí

$$\frac{\mathrm{d}K_{n,m}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\alpha}{6} K_{n,m} +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+n} \cdot \sum_{k=0}^{\min(m,n)} k!\,.\,4^k \binom{n}{k}\binom{m}{k} \frac{1}{\sqrt{6}} H'_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{-\alpha^2/12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+n} \cdot \sum_{k=0}^{\min(m,n)} k!\,.\,4^k \binom{n}{k}\binom{m}{k} \frac{1}{\sqrt{6}} H_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H'_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right).$$

Využijeme-li vztahu

$$\binom{n}{k} H'_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) = 2n \binom{n-1}{k} H_{n-1-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right)$$

jakož i platnosti právě uvedeného indukčního předpokladu, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}K_{n,m}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\alpha}{6} K_{n,m} - \frac{1}{3}\sqrt{2}n\, K_{n-1,m} - \frac{1}{3}\sqrt{2}\, m\, K_{n,m-1}\,.$$

Odtud spolu s rekurentním vztahem (10) plyne platnost vztahu

$$K_{n+1,m} = -2\sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\sqrt{6}} K_{n,m} - \tfrac{2}{3}n\, K_{n-1,m} + \tfrac{4}{3}K_{n,m-1}\,,$$

pokud ovšem je splněn indukční předpoklad. Dostáváme tak

$$K_{m+1,n} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+n-1} \left\{-2\sqrt{2}\,\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\right.$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\min(m,n)} k!\,.\,4^k \binom{n}{k}\binom{m}{k} H_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right) -$$

$$- 2n \sum_{k=0}^{\min(m,n-1)} k!\,.\,4^k \binom{n-1}{k}\binom{m}{k} H_{n-1-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right) +$$

$$\left. + \tfrac{4}{3}m \sum_{k=0}^{\min(n,m-1)} k!\,.\,4^k \binom{n}{k}\binom{m-1}{k} H_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-1-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right)\right\}.$$

Vzhledem k tomu, že $\binom{n}{k} = 0$ pro k, n přirozená $k \geqq n$, můžeme ve všech třech součtech sčítat až do $\min(n + 1, m)$. Použijeme-li vztahu

$$n\binom{n-1}{k} = (n-k)\binom{n}{k}$$

jakož i rekurentního vztahu pro Hermiteovy polynomy (1), obdržíme

$$K_{n+1,m} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+n+1} .$$

$$. \sum_{k=0}^{\min(n+1,m)} k!\,.\,4^k \left\{ \binom{n}{k}\binom{m}{k} H_{n+1-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right) + \right.$$

$$\left. + 4(m-k)\binom{n}{k}\binom{m}{k} H_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-1-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\,\beta\right)\right\}.$$

Posuneme-li ve druhém sčítanci sčítací index o jedničku, dostaneme po úpravě výrazu

$$k\binom{n}{k}\binom{m}{k} + (m+1-k)\binom{n}{k-1}\binom{m}{k-1} = k\binom{m}{k}\binom{n+1}{k}$$

hledané vyjádření

$$K_{n+1,m} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+n+1} .$$

$$. \sum_{k=0}^{\min(n+1,m)} k!\,.\,4^k \binom{m}{k}\binom{n+1}{k} H_{n+1-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right).$$

Tím je platnost vzorce (11) dokázána.

Literatura

[1] *R. J. Eden, V. J. Emery:* Proc. Roy. Soc. 248 (1958), 266.

[2] *И. М. Рыжик, И. С. Градштейн:* Таблицы интегралов, сумм. рядов и произведений, Москва 1951.

Резюме

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

ЭМИЛ НАВРАТИЛ, ИВАН УЛЕГЛА (Emil Navrátil, Ivan Úlehla)

В работе решаются интегралы $J_{a,b,c} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_a(x)\, H_b(x)\, H_c(x)\, dx$ и $K_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x} H_n(\sqrt{2}x)\, H_m[\sqrt{2}(x+\beta)]\, dx$. Показано, что

$$J_{a,b,c} = 2^{(a+b+c)/2} \sqrt{\pi} \frac{a!\, b!\, c!}{[\frac{1}{2}(a+b-c)]!\, [\frac{1}{2}(b+c-a)]!\, [\frac{1}{2}(c+a-b)]!},$$

если $a + b + c$ четно и числа a, b, c удовлетворяют трем возможным неравенствам треугольника и $J_{a,b,c} = 0$ в остальных случаях. Далее,

$$K_{n,m} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+n} \cdot \sum_{k=0}^{\min(m,n)} k!\,.\,4^k \binom{n}{k}\binom{m}{k} H_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right).$$

Значения этих интегралов надобны для вычисления энергии связи атомного ядра.

Summary

THE COMPUTATION OF SOME INTEGRALS CONTAINING HERMITE POLYNOMIALS

EMIL NAVRÁTIL, IVAN ÚLEHLA

In the paper, the integrals $J_{a,b,c} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_a(x)\, H_b(x)\, H_c(x)\, dx$ and $K_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3x^2-\alpha x} H_n(\sqrt{2}x)\, H_m[\sqrt{2}(x + \beta)]\, dx$ are computed. It is shown that

$$J_{a,b,c} = 2^{(a+b+c)/2} \sqrt{\pi}\, \frac{a!\, b!\, c!}{[\frac{1}{2}(a + b - c)]!\, [\frac{1}{2}(b + c - a)]!\, [\frac{1}{2}(c + a - b)]!}$$

if $a + b + c$ is even and the numbers a, b, c satisfy the three possible triangle inequalities and $J_{a,b,c} = 0$ otherwise. Further,

$$K_{n,m} = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\, e^{\alpha^2/12} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{m+n} \cdot \sum_{k=0}^{\min(m,n)} k!\,.\,4^k \binom{n}{k}\binom{m}{k} H_{n-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}}\right) H_{m-k}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{6}} - \sqrt{6}\beta\right).$$

The values of these integrals may be used for computing the binding energy of the atomic nucleus.

Adresa autorů: Inž. *Emil Navrátil*, Katedra matematiky FTJF, Myslíkova 7, Praha 1. — Prof. dr. *Ivan Úlehla* C.Sc., Katedra teoretické fyziky FTJF, Myslíkova 7, Praha 1.