Josef Matušů

Eine Bemerkung über die operatorenmässige Lösung von Differentialgleichungen der Form $\sum_{i=0}^{r} a_i x^{(i)}(t) - t x'(t) = f(t)$

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 5, 356–366

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102869`

EINE BEMERKUNG ÜBER DIE OPERATORENMÄSSIGE LÖSUNG VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER FORM

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) - tx'(t) = f(t)$$

JOSEF MATUŠŮ

(Eingegangen am 4. Januar 1963.)

In diesem Artikel wird gezeigt, wie man Differentialgleichungen der angeführten Form bei Benützung der Mikusińskischen Operatorenrechnung lösen kann.

1. $\mathscr{C}$ sei der Integritätsbereich der im Intervall $0 \leqq t < \infty$ definierten und stetigen (komplexwertigen) Funktionen $a = \{a(t)\}$, die im gewöhnlichen Sinne addiert und im Sinne der Faltung multipliziert werden. Die durch Quotientenbildung erhaltenen Brüche $p/q(p \in \mathscr{C}, \{0\} \neq q \in \mathscr{C})$ sind dann Elemente eines kommutativen Körpers $\mathscr{M}$ und werden MIKUSIŃSKIsche Operatoren genannt (siehe [1]). Der Körper $\mathscr{M}$ enthält den Körper $\mathscr{K}$ aller komplexen Zahlen sowie auch die Menge $\mathscr{S} \supset \mathscr{C}$ aller im Intervall $0 \leqq t < \infty$ lokal summierbaren Funktionen (die auch im Sinne der Faltung multipliziert werden). Wird die Quotientenbildung im Integritätsbereich $\mathscr{S}$ angewandt, so entsteht daraus wieder nur der Körper $\mathscr{M}$ der MIKUSIŃSKIschen Operatoren und nichts anderes.

Die sog. algebraische Ableitung ist folgendermassen definiert:

$$Da = D\{a(t)\} = \{-ta(t)\} \quad \text{für} \quad a \in \mathscr{S} ,$$

$$D\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{Dp \, . \, q - p \, . \, Dq}{q^2} \quad \text{für} \quad p, q \in \mathscr{C} , \quad q \neq 0 .$$

Für a, $b \in \mathscr{M}$ und $k \in \mathscr{K}$ gelten dann die Formeln (siehe [1]):

$$D(a \pm b) = Da \pm Db , \quad D(a \, . \, b) = Da \, . \, b + a \, . \, Db ,$$

$$D\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{Da \, . \, b - a \, . \, Db}{b^2} (b \neq 0) , \quad D(ka) = kDa .$$

Ist $k \in \mathscr{K}$, d.h. der Operator $k = \{k\}/\{1\}$, so folgt durch einfache Rechnung $Dk = 0$.

Aus dieser Beziehung folgt auch umgekehrt, dass $k \in \mathscr{K}$. Der Beweis dieser Eigenschaft ist nicht trivial (siehe [2]).

Für den Differentialoperator $s = 1/\{1\}$ gilt $Ds = 1$. Allgemein gilt $Ds^n = ns^{n-1}$ für jede natürliche Zahl n (dies kann durch Induktion leicht bewiesen werden). Ist dann in s ein ganzrationaler Ausdruck vorgelegt, so wird seine algebraische Ableitung dadurch erhalten, dass ähnlich wie im Komplexen nach s differenziert wird. Dieses Verfahren bleibt auch im Falle eines rational gebrochenen Ausdrucks in s erhalten. Man kann deshalb mit Recht auch von einer Ableitung nach dem Differentialoperator s sprechen und statt D das Symbol $\mathrm{d}/\mathrm{d}s$ verwenden.

Durch die Existenz der Exponentialfunktion $\exp[r(s\{\lg t\} + C)] = s^{-r}$ (siehe z.B. [3]) für reelle r-Werte ist auch die Existenz des Operators $\exp[s\{\lg t\} + C]$, der das Bildelement dieser Funktion für $r = 1$ ist, garantiert; $C = 0{,}57\ldots$ bedeutet hier die sog. EULERsche Konstante. Auf Grund der Beziehung $\exp[s\{\lg t\} + C] = s^{-1}$ scheint es vernünftig zu sein den Operator $-(s\{\lg t\} + C)$ mit $\lg s$ zu identifizieren. Womöglich sollte dann $\mathrm{d}(\lg s)/\mathrm{d}s = 1/s$ gelten. Dies ist wirklich der Fall: $D[-(s\{\lg t\} + C)] = -D[s\{\lg t\}] = -\{\lg t\} - s\,.\,D\{\lg t\} = -\{\lg t\} + s\{t \lg t\}$, und da für jede Funktion $a = \{a(t)\}$ aus $\mathscr{C}$, deren Abteilung $a' = \{a'(t)\}$ zu $\mathscr{S}$ gehört, die Beziehung $sa = a' + a(0)$ gilt, folgt schliesslich $\mathrm{d}(\lg s)/\mathrm{d}s = -\{\lg t\} + \{\lg t + 1\} = \{1\} = 1/s$.

Sind $a, b \in \mathscr{M}$ und gilt $\mathrm{d}a/\mathrm{d}s = b$, so soll diese Beziehung mit $\int b\,\mathrm{d}s = a + k$ ($k \in \mathscr{K}$ beliebig) äquivalent sein. Man kann hier von einem unbestimmten Integral nach dem Differentialoperator s sprechen. So ist z.B. $\int\{-t\cos t\}\,\mathrm{d}s = \{\cos t\} + k$, weil $d\{\cos t\}/\mathrm{d}s = \{-t\cos t\}$. Oder z.B. $\int s^2\,\mathrm{d}s = s^3/3 + k$, $\int \mathrm{d}s/s = \lg s + k$.

2. Es sei nun eine Differentialgleichung der Form

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)} - \{tx'(t)\} = f \tag{1}$$

vorgelegt ($a_i \in \mathscr{K}$ reell; $n \geqq 2$, $a_n \neq 0$). Es soll die (eindeutige) verallgemeinerte Lösung x der Gleichung (1) bestimmt werden, die den Anfangsbedingungen $x(0) = c_0$, $x'(0) = c_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$ genügt. Unter einer verallgemeinerten Lösung verstehen wir dabei folgendes: 1° die Lösung x hat $n - 1$ stetige Ableitungen; 2° die n-te Ableitung $x^{(n)}$ existiert überall dort, wo f stetig ist; 3° die Differentialgleichung wird durch x in allen Stetigkeitspunkten von f befriedigt. Wir wollen annehmen, dass die im Nullpunkt stetige Störungsfunktion f im allgemeinen zu $\mathscr{S}$ gehört.

Es ist $x' = sx - c_0$ und $\{-tx'(t)\} = d(sx - c_0)/\mathrm{d}s = x + s(\mathrm{d}x/\mathrm{d}s)$. Da weiter $x^{(i)} = s^i x - \sum_{j=0}^{i-1} s^{i-1-j} c_j$ $(i \geqq 1)$, so folgt durch einfache Rechnung aus (1)

$$s\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + x\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i + 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i} s^{n-i} + b_0 + f\,. \tag{2}$$

In (2) ist $b_j = \sum_{i=1}^{n-j} a_{j+i} c_{i-1}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Aus (2) folgt

$$\text{(3)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + x\left(\sum_{i=1}^{n} a_i s^{i-1} + \frac{a_0 + 1}{s}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i} s^{n-i-1} + \frac{b_0}{s} + \frac{f}{s}\,.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\text{(4)} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i s^{i-1} + \frac{a_0 + 1}{s} = -\,w\,,$$

$$\text{(5)} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} b_{n-i} s^{n-i-1} + \frac{b_0}{s} + \frac{f}{s} = W\,.$$

Mit diesen Beziehungen geht dann (3) in

$$\text{(6)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = wx + W$$

über.

Jeder Differentialgleichung (1) entspricht somit eine Gleichung der Form (6). Ist auch die Funktion f allein durch s ausdrückbar, so haben wir in (6) eine Art Differentialgleichung erhalten, die der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung für die unbekannte Funktion x der komplexen Variablen s ähnlich ist. Unser Ziel ist es nun die Gleichung (6) zu lösen.

Man kann leicht beweisen, dass höchstens nur eine Lösung der Gleichung (6) existiert. Wären zwei verschiedene Lösungen x, y vorhanden, so würde $z = x - y$ der homogenen Gleichung $\mathrm{d}z/\mathrm{d}s = wz$ genügen. Dann müsste aber $z = \tilde{k} \exp u$ sein, wobei $\tilde{k} \neq 0$ eine komplexe Zahl und $u = \int w \,\mathrm{d}s$ bedeuten (siehe [1]). Es ist nach (4)

$$u = -\int\left(\sum_{i=1}^{n} a_i s^{i-1} + \frac{a_0 + 1}{s}\right) \mathrm{d}s = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} s^i - (a_0 + 1) \lg s + k$$

($k \in \mathscr{K}$ beliebig; wir können ohneweiters $k = 0$ wählen). Setzen wir $-(a_0 + 1) \lg s = {}$ $= u_1$ und $-\sum_{i=1}^{n} (a_i/i)\, s^i = u_2$, so existiert der Operator $\exp u_1$, der Operator $\exp u_2$ existiert dagegen nicht (siehe z.B. [4]). Deshalb kann auch der Operator $\exp u = {}$ $= \exp(u_1 + u_2)$ nicht existieren. Es muss daher $z = 0$ sein, d.h. $x = y$, womit die Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung (6) bewiesen ist.

Wegen der Nichtexistenz des Operators $\exp u = \exp(u_1 + u_2)$ kann die LAGRANGEsche Methode zur Lösung der inhomogenen Gleichung (6) nicht angewandt werden. Wir wollen deshalb versuchen, s augenblicklich als komplexe Variable aufzufassen und die Gleichung (6) (die wir in diesem Zusammenhang mit (VI) bezeichnen) nach den bekannten Methoden zu lösen.

Mit G soll ein gemeinsames Holomorphiegebiet der Funktionen w, W bezeichnet werden. Sind dann s_0, s Punkte aus G und L ein in G verlaufender und diese Punkte verbindender Weg, so ist

$$x = k e^{\int_{s_0}^{s} w \, dY} + \int_{s_0}^{s} W e^{\int_{S}^{s} w \, dY} \, dS = \tilde{k} e^{\int_{s_0}^{s} w \, dY} + V \tag{7}$$

(k, $\tilde{k} \in \mathscr{K}$ beliebig) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (VI). Wird nun in (7) $\tilde{k} = 0$ gesetzt (und zwar deshalb, weil die homogene Gleichung (6) nur die triviale Lösung Null besitzt) und s wieder als Differentialoperator aufgefasst, so wird V bestimmt eine Lösung der inhomogenen Gleichung (6) sein, wenn 1° der Operator V existiert und 2° seine algebraische Ableitung mit der entsprechenden komplexen Ableitung der Funktion V formal übereinstimmt.

Beispiel 1. Es soll die TSCHEBYSCHEW-HERMITEsche Differentialgleichung

$$x'' - \{t x'(t)\} + 2 m x = 0 = \{0\} \tag{8}$$

mit Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ gelöst werden ($m \geqq 0$ eine ganze Zahl). Die der Gleichung (8) entsprechende Gleichung (6) ist

$$\frac{dx}{ds} = -\left(s + \frac{2m+1}{s}\right) x + 1 . \tag{9}$$

In (9) ist also $w = -[s + (2m+1)/s]$, $W = 1$. Nach (7) ist dann $\exp\left(\int_{s_0}^{s} w \, dY\right) = a \exp(-s^2/2) \, s^{-(2m+1)}$ ($a \in \mathscr{K}$), $\exp\left(\int_{S}^{s} w \, dY\right) = \exp(-s^2/2) \, s^{-(2m+1)} \, . \, \exp(S^2/2) \, S^{2m+1}$ und

$$x = ka \frac{e^{-s^2/2}}{s^{2m+1}} + \frac{e^{-s^2/2}}{s^{2m+1}} \int_{s_0}^{s} e^{S^2/2} S^{2m+1} \, dS =$$

$$= ka \frac{e^{-s^2/2}}{s^{2m+1}} + \frac{e^{-s^2/2}}{s^{2m+1}} \left[e^{s^2/2} \left(s^{2m} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \, 2^i \frac{m!}{(m-i)!} s^{2m-2i} \right) + b \right]$$

($b \in \mathscr{K}$), d.h.

$$x - \tilde{k} \frac{e^{-s^2/2}}{s^{2m+1}} = \frac{1}{s} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \, 2^i \frac{m!}{(m-i)!} \frac{1}{s^{2i+1}} = V . \tag{10}$$

Wird nun in (10) $\tilde{k} = 0$ gesetzt (und s als Differentialoperator aufgefasst), so haben wir mit

$$V = \{1\} + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \, 2^i \frac{m!}{(m-i)!} \left\{ \frac{t^{2i}}{(2i)!} \right\} =$$

$$= \left\{ 1 - \frac{2m}{2!} t^2 + \frac{2^2 m(m-1)}{4!} t^4 - \frac{2^3 m(m-1)(m-2)}{6!} t^6 + \ldots \right\}$$

die gewünschte (und eindeutige) Lösung der Differentialgleichung (8) gefunden.

Beispiel 2. Es soll die inhomogene TSCHEBYSCHEW-HERMITEsche Differentialgleichung

$$x'' - \{tx'(t)\} + 2x = \{4\} = \frac{4}{s} \tag{11}$$

mit Berücksichtigung derselben Anfangsbedingungen wie in Beispiel 1 gelöst werden. Die der Gleichung (11) entsprechende Gleichung (6) ist

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -\left(s + \frac{3}{s}\right)x + 1 + \frac{4}{s^2}. \tag{12}$$

In (12) ist also $w = -(s + 3/s)$, $W = 1 + 4/s^2$. Nach (7) ist dann $\exp\left(\int_{s_0}^{s} w\,\mathrm{d}Y\right) = a\exp(-s^2/2)\,s^{-3}$ $(a \in \mathscr{K})$, $\exp\left(\int_S^s w\,\mathrm{d}Y\right) = \exp(-s^2/2)\,s^{-3}\exp(S^2/2)\,S^3$ und

$$x = ka\frac{e^{-s^2/2}}{s^3} + \frac{e^{-s^2/2}}{s^3}\int_{s_0}^{s}\left(1 + \frac{4}{S^2}\right)e^{S^2/2}\,S^3\,\mathrm{d}S =$$

$$= ka\frac{e^{-s^2/2}}{s^3} + \frac{e^{-s^2/2}}{s^3}\left[s^2e^{s^2/2} + 2e^{s^2/2} + b\right]$$

$(b \in \mathscr{K})$, d. h.

$$x - \tilde{k}\frac{e^{-s^2/2}}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} = V. \tag{13}$$

Wird nun in (13) $\tilde{k} = 0$ gesetzt (und s als Differentialoperator aufgefasst), so haben wir mit $V = \{1 + t^2\}$ die gewünschte (und eindeutige) Lösung der Differentialgleichung (11) gefunden.

Beispiel 3. Wir wollen annehmen, das die einer bestimmten Differentialgleichung (1) entsprechende Gleichung (6) die Form

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{s}{2m^2}x - \frac{1}{2m^2} \tag{14}$$

hat ($0 \neq m \in \mathscr{K}$ reell). In (14) ist also $w = s/2m^2$, $W = -1/2m^2$. Nach (7) ist dann (für $s_0 = 0$ und für einen Weg, der sich längs der reellen Achse erstreckt) $\exp\left(\int_0^s w\,\mathrm{d}Y\right) = a\exp(s^2/4m^2)$ ($a \in \mathscr{K}$ reell), $\exp\left(\int_S^s w\,\mathrm{d}Y\right) = \exp(s^2/4m^2)\exp(-S^2/4m^2)$ und

$$x = kae^{s^2/4m^2} - \frac{e^{s^2/4m^2}}{2m^2}\int_0^s e^{-S^2/4m^2}\,\mathrm{d}S = \tag{15}$$

$$= (S = 2mU) = kae^{s^2/4m^2} - \frac{e^{s^2/4m^2}}{m}\int_0^{s/2m} e^{-U^2}\,\mathrm{d}U =$$

$$= kae^{s^2/4m^2} - \frac{e^{s^2/4m^2}}{m}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{s/2m}^{\infty} e^{-U^2}\,\mathrm{d}U\right] =$$

$$= \tilde{k}e^{s^2/4m^2} + \frac{e^{s^2/4m^2}}{m}\int_{s/2m}^{\infty} e^{-U^2}\,\mathrm{d}U\,.$$

Durch einfache Rechnung wird bestätigt, dass

$$\frac{e^{s^2/4m^2}}{m} \int_{s/2m}^{\infty} e^{-U^2} \, \mathrm{d}U = \int_0^{\infty} e^{-m^2r^2} e^{-sr} \, \mathrm{d}r \,. \tag{16}$$

Aus (15), (16) folgt dann

$$x - \tilde{k} e^{s^2/4m^2} = \int_0^{\infty} e^{-m^2r^2} e^{-sr} \, \mathrm{d}r = V \tag{17}$$

(hier kann s wieder als komplexe Variable betrachtet werden). Wird in V die komplexe Variable s wieder als Differentialoperator aufgefasst, so erhalten wir auf Grund der Formel von Ryll-Nardzewski (siehe z.B. [1], [3]), dass der Operator V die Funktion $\{\exp(-m^2t^2)\}$ darstellt. Die algebraische Ableitung des Operators V ist nach derselben Formel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \{e^{-m^2t^2}\} = \{-te^{-m^2t^2}\} = -\int_0^{\infty} re^{-m^2r^2} e^{-sr} \, \mathrm{d}r \,.$$

Da diese mit der komplexen Ableitung der Funktion V in (17) formal übereinstimmt, so erhalten wir aus (17) für $\tilde{k} = 0$ (s als Differentialoperator aufgefasst) den Operator $V = \{\exp(-m^2t^2)\}$ als eindeutige Lösung der Gleichung (14).

Wird in (14) die Zahl $2m^2$ druch $-2v$ ersetzt, so geht (14) in

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -\frac{s}{2v} x + \frac{1}{2v} \tag{18}$$

über. Für ein negatives v erhalten wir auf Grund der oben durchgeführten Rechnung als Lösung der Gleichung (18) die Funktion $\{\exp(vt^2)\}$. Wenn aber v positiv ist, so kann auf (7) der Vorgang (15), (16), (17) nicht angewandt werden, weil das Laplacesche Integral in (17) divergiert. Die Formel von Ryll-Nardzewski gilt aber allgemein und die Funktion $\{\exp(vt^2)\}$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung (18) auch in diesem Falle.

Hier wäre es also besser, einen anderen Weg zu wählen. Wir stellen uns zu diesem Zweck die Aufgabe, eine Funktion $x \in \mathscr{C}$ (mit der Ableitung $x' \in \mathscr{S}$) zu bestimmen, die der Gleichung (18) und der Anfangsbedingung $x(0) = 1$ genügt. Auf Grund der Formel von Ryll-Nardzewski ist

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \{-tx(t)\} = -\int_0^{\infty} rx(r) \, e^{-sr} \, \mathrm{d}r \,, \tag{19}$$

$$-\frac{s}{2v} x = -\frac{1}{2v} - \frac{1}{2v} x' = -\frac{1}{2v} - \frac{1}{2v} \int_0^{\infty} x'(r) \, e^{-sr} \, \mathrm{d}r \,.$$

Wird nun (19) in (18) eingesetzt, so folgt

$$\int_0^{\infty} rx(r) \, e^{-sr} \, \mathrm{d}r = \frac{1}{2v} \int_0^{\infty} x'(r) \, e^{-sr} \, \mathrm{d}r \,,$$

d. h.

$$\text{(20)} \qquad \int_0^\infty \left[\frac{1}{2v} x'(r) - rx(r)\right] e^{-sr}\,\mathrm{d}r = 0\,.$$

Die Beziehung (20) hat zur Folge, dass

$$\text{(21)} \qquad \left\{\frac{1}{2v} x'(t) - tx(t)\right\} = \{0\}\,, \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{2v} x'(t) = tx(t) \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < \infty\,.$$

In der Differentialgleichung (21) können die Variablen getrennt werden und wir erhalten schliesslich $x = \{\exp(vt^2)\}$ ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der Zahl v.

Wird in (18) ($w = -s/2v$, $W = 1/2v$) s wieder als komplexe Variable aufgefasst, so erhalten wir nach (7) $\exp(\int_{s_0}^s w\,\mathrm{d}Y) = a\exp(-s^2/4v)$ ($a \in \mathscr{K}$), $\exp(\int_S^s w\,\mathrm{d}Y) = \exp(-s^2/4v)\exp(S^2/4v)$ und

$$\text{(22)} \qquad x = kae^{-s^2/4v} + \frac{e^{-s^2/4v}}{2v}\int_{s_0}^s e^{S^2/4v}\,\mathrm{d}S\,.$$

Die Klasse der holomorphen Funktionen (22), die vom Parameter k abhängen, muss also beim Übergang zur ursprünglichen Deutung von s mit dem Operator $\{\exp(vt^2)\}$ identifiziert werden.

Beispiel 4. Es soll die allgemeine Lösung der Tschebyschew-Hermiteschen Differentialgleichung

$$\text{(23)} \qquad x'' - \{tx'(t)\} + 2x = 0 = \{0\}$$

bestimmt werden. Die der Gleichung (23) entsprechende Gleichung (6) ist

$$\text{(24)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -\left(s + \frac{3}{s}\right)x + c - \frac{d}{s}$$

($c, d \in \mathscr{K}$ beliebig). In (24) ist also $w = -(s + 3/s)$, $W = W_1 + W_2$ mit $W_1 = c$, $W_2 = -d/s$. Wir lösen zuerst die Gleichung

$$\text{(25)} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = wx + W_1\,.$$

Nach (7) ist dann (siehe Beispiel 2)

$$x = x_1 = ka\frac{e^{-s^2/2}}{s^3} + c\frac{e^{-s^2/2}}{s^3}\int_{s_0}^s e^{S^2/2}S^3\,\mathrm{d}S =$$
$$= ka\frac{e^{-s^2/2}}{s^3} + c\frac{e^{-s^2/2}}{s^3}\left[s^2e^{s^2/2} - 2e^{s^2/2} + b\right]$$

($b \in \mathscr{K}$), d. h.

$$\text{(26)} \qquad x_1 - \tilde{k}\frac{e^{-s^2/2}}{s^3} = \frac{c}{s} - \frac{2c}{s^3} = V_1\,.$$

Wird in (26) $\tilde{k} = 0$ gesetzt (und s als Differentialoperator aufgefasst), so haben wir mit dem Operator $V_1 = \{c - ct^2\}$ die eindeutige Lösung der Gleichung (25) gefunden.

Als nächste betrachten wir die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = wx + W_2 . \tag{27}$$

Nach (7) ist

$$x = x_2 = ka\frac{e^{-s^2/2}}{s^3} - d\frac{e^{-s^2/2}}{s^3}\int_{s_0}^{s} e^{S^2/2}S^2\,\mathrm{d}S =$$

$$= ka\frac{e^{-s^2/2}}{s^3} - d\frac{e^{-s^2/2}}{s^3}\left[se^{s^2/2} - \int_{s_0}^{s} e^{S^2/2}\,\mathrm{d}S - \tilde{b}\right]$$

($\mathscr{K} \ni \tilde{b} = ab_1$), d. h. ($k = k_1 d$)

$$x_2 = -\frac{d}{s^2} + \frac{d}{s^3}\left[k_1 a e^{-s^2/2} + e^{-s^2/2}\int_{s_0}^{s} e^{S^2/2}\,\mathrm{d}S + ab_1 e^{-s^2/2}\right] = \tag{28}$$

$$= -\frac{d}{s^2} + \frac{d}{s^3}\left[\tilde{k}ae^{-s^2/2} + e^{-s^2/2}\int_{s_0}^{s} e^{S^2/2}\,\mathrm{d}S\right] = V_2 .$$

Wird nun (22) und die Schlussbemerkung im Beispiel 3 mitberücksichtigt, so folgt aus (28), dass der Operator $V_2 = \{-dt\} + \{(d/2)\,t^2\}\,\{\exp(t^2/2)\}$ die eindeutige Lösung der Gleichung (27) ist. Damit ist gezeigt, dass ($c = \tilde{c}$, $d/2 = \tilde{d}$)

$$V = V_1 + V_2 = \left\{\tilde{c} - 2\tilde{d}t - \tilde{c}t^2 + \tilde{d}\int_0^t Y^2 e^{(t-Y)^2/2}\,\mathrm{d}Y\right\}$$

die allgemeine Lösung der Gleichung (23) ist.

Beispeil 5. Wird in der Tschebyschew-Hermiteschen Differentialgleichung (8) m durch die Zahl -1 ersetzt, so erhalten wir die Gleichung

$$x'' - \{tx'(t)\} - 2x = 0 = \{0\} . \tag{29}$$

Diese soll mit Berücksichtigung derselben Anfangsbedingungen wie in Beispiel 1 gelöst werden. Die der Gleichung (29) entsprechende Gleichung (6) ist

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = -\left(s - \frac{1}{s}\right)x + 1 . \tag{30}$$

Wir wollen versuchen die Lösung der Gleichung (30) in Form einer im Sinne der Operatorenrechnung konvergenten unendlichen Reihe

$$x = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_i}{s^i} = \lim s_n \tag{31}$$

anzusetzen ($b_i \in \mathscr{K}$; s_n bedeutet die n-te Teilsumme der Reihe (31), $n \geqq 0$). Die Reihe (31) konvergiert gegen x dann und nur dann, wenn ein $q \in \mathscr{M}$ derart existiert, dass die Folge $s_n/q = c_n \in \mathscr{C}$ fast gleichmässig gegen x/q strebt (siehe [1]). Wird nun $s_n = qc_n$ nach s abgeleitet, so folgt (für $n \geqq 2$)

$$(32) \qquad -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{ib_i}{s^{i+1}} = Dq \,.\, c_n - q\{tc_n(t)\}\,.$$

Wir setzen $Dq = r_1/g$, $-q = q_1/g$ (r_1, q_1 und $g \neq 0$ sind Funktionen aus $\mathscr{C}$). Dann geht (32) in

$$(33) \qquad -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{ib_i}{s^{i+1}} = \frac{r_1}{g}\, c_n + \frac{q_1}{g}\,\{tc_n(t)\} =$$

$$= \frac{1}{g}\left\{\int_0^t r_1(t-Y)\, c_n(Y)\,\mathrm{d}Y + \int_0^t q_1(t-Y)\; Yc_n(Y)\,\mathrm{d}Y\right\} = \frac{1}{g}\,\tilde{c}_n$$

über. Da auch die Folge der Funktionen $\tilde{c}_n \in \mathscr{C}$ fast gleichmässig konvergiert, und zwar gegen $r_1 \,.\, (x/q) - q_1 \,.\, D(x/q) = g \,.\, Dq \,.\, (x/q) + gq \,.\, D(x/q)$, so folgt aus (33), dass auch die Reihe $-\sum_{i=1}^{\infty}(ib_i)/s^{i+1}$ konvergiert und die Summe $Dq \,.\, (x/q) + q \,.\, D(x/q) = D[q(x/q)] = Dx$ besitzt. Damit ist aber bewiesen, dass (31) gliedweise nach s abgeleitet werden kann.

Wird nun (31) in (30) eingesetzt, so erhalten wir

$$(34) \qquad -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{ib_i}{s^{i+1}} = -sb_0 - b_1 + 1 + \frac{b_0 - b_2}{s} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i+2} - b_i}{s^{i+1}}\,.$$

Durch einfache Überlegung und Rechnung folgt dann aus (34)

$$(35) \qquad b_0 = 0,\ b_1 = 1 \quad \text{und} \quad b_{2j} = 0,\ b_{2j+1} = (2j)!! \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots\,.$$

Es fragt sich, ob die Reihe (31) mit den Koeffizienten (35) auch wirklich konvergiert. Wird oben z.B. $q = s$ gewählt, so müsste die Folge der Funktionen ($j \geqq 1$)

$$c_{2j-1} = \left\{\frac{t}{1!!} + \frac{t^3}{3!!} + \ldots + \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!!}\right\}$$

fast gleichmässig konvergieren. Man kann sich leicht überzeugen, dass dies wirklich zutrifft. Die Summe der Reihe (31) ist dann

$$(36) \qquad x = s\left\{\frac{t}{1!!} + \frac{t^3}{3!!} + \frac{t^5}{5!!} + \ldots\right\} = \left\{1 + \frac{t^2}{1!!} + \frac{t^4}{3!!} + \frac{t^6}{5!!} + \ldots\right\}.$$

Mit (36) ist die Lösung der Gleichung (30) bestimmt, die auch (eindeutig) der Differentialgleichung (29) und den gegebenen Anfangsbedingungen genügt.

Wird in (30) ($w = -(s - 1/s)$, $W = 1$) s als komplexe Variable aufgefasst, so erhalten wir nach (7) $\exp\left(\int_{s_0}^{s} w\,\mathrm{d}Y\right) = a\exp\left(-s^2/2\right) s$ $(a \in \mathscr{K})$, $\exp\left(\int_S^s w\,\mathrm{d}Y\right) =$

$= \exp(-s^2/2)\, s \,.\, \exp(S^2/2)\, S^{-1}$ und für $j \geqq 1$

$$(37) \qquad x = kae^{-s^2/2}s + e^{-s^2/2}s \int_{s_0}^{s} \frac{e^{S^2/2}}{S}\, dS =$$

$$= kae^{-s^2/2}s + e^{-s^2/2}s \left[e^{s^2/2} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2!!}{s^4} + \ldots + \frac{(2j-2)!!}{s^{2j}} + (2j)!! \int_{s_0}^{s} \frac{e^{S^2/2}}{S^{2j+2}}\, dS \right) + b_j \right]$$

($b_j \in \mathscr{K}$), d. h.

$$(38) \qquad x - k_j e^{-s^2/2}s = \left(\frac{1}{s} + \frac{2!!}{s^3} + \frac{4!!}{s^5} + \ldots + \frac{(2j-2)!!}{s^{2j-1}} \right) + $$
$$+ (2j)!!\, e^{-s^2/2}s \int_{s_0}^{s} \frac{e^{S^2/2}}{S^{2j+2}}\, dS$$

($k_j \in \mathscr{K}$). Die Summe in der Klammer in (38) stimmt mit der $(2j - 1)$-ten Teilsumme der Reihe (31) überein, wenn s als Differentialoperator aufgefasst wird. Der Grenzübergang $j \to \infty$ kann aber in (38) bei komplexem s nicht durchgeführt werden. Dieses Beispiel führt somit zur ähnlichen Schlussfolgerung wie das Beispiel 3, d. h. die Klasse der holomorphen Funktionen (37), die vom Parameter k abhängen, muss beim Übergang zur ursprünglichen Deutung von s mit dem Operator (36) identifiziert werden.

3. Im vorangehenden Abschnitt haben wir gezeigt, wie Differentialgleichungen der Form (1) bei Benützung der MIKUSIŃSKIschen Operatorenrechnung gelöst werden können. Wir haben gesehen, dass es einfach ist, die der Gleichung (1) entsprechende Gleichung (6) aufzustellen und die Klasse der holomorphen Funktionen (7) zu bestimmen. Nur wenig schwieriger gestaltet sich manchmal die Frage nach der Suche des Operators, der mit dieser Klasse zu identifizieren ist. Dass die entwickelte Methode nur einen beschränkten Wirkungsbereich besitzt, folgt schon aus der speziellen Form der betrachteten Differentialgleichungen. Trotzdem scheint diese Methode nicht ganz ohne Interesse zu sein. Ähnliche Differentialgleichungen können auch unter Benützung der LAPLACE-Transformation gelöst werden und es ist deshalb zu erwarten, dass dies auch mit der MIKUSIŃSKIschen Methode gelingen muss (siehe z.B. [5]).

In letzter Zeit wurden allgemeinere Methoden entwickelt, mit denen die von uns betrachteten Differentialgleichungen auch gelöst werden können. So z.B. die Methode der sog. LIE-Reihen (siehe [6]), die es gestatten, die gewünschten Lösungen leicht niederzuschreiben. Sie haben aber den Nachteil, dass sie in der Mehrzahl der Fälle nur einen beschränkten Konvergenzradius besitzen und deshalb analytisch fortgesetzt werden müssen. Eine andere interessante Methode besteht darin, dass der gegebenen Differentialgleichung mit polynomischen Koeffizienten eine bestimmte VOLTERRAsche Integralgleichung operatorenmässig zugeordnet wird (siehe [7]). Aber auch diese Methode wird in konkreten Fällen von spezifischen Schwierigkeiten begleitet.

Literaturverzeichnis

[1] *Mikusiński, J. G.:* Rachunek operatorów, Warszawa 1957.

[2] *Mikusiński, J. G.:* Remarks on the algebraic derivative in the Operational Calculus, Studia Mathematica 19 (1960), p. 187–192.

[3] *Mikusiński, J. G.:* L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionelles (deuxième partie), Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, vol. III, 1 (1949).

[4] *Mikusiński, J. G.:* Sur les fonctions exponentielles du calcul opératoire, Studia Mathematica 12 (1951), p. 208–224.

[5] *Диткин, В. А., Кузнецов, П. И.:* Справочник по операционному исчислению, Москва—Ленинград 1951.

[6] *Gröbner, W.:* Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen, Mathematische Monographien 3, Berlin 1960.

[7] *Карамышкин, В. В.:* Переход от линейного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами к интегральному уравнению при помощи операционного исчисления, Прикладная математика и механика, Т. XXII, 4, стр. 553.

Souhrn

POZNÁMKA K OPERÁTOROVÉMU ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC TVARU

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) - t x'(t) = f(t)$$

JOSEF MATUŠŮ

V článku je zpracován způsob použití tzv. algebraické derivace k řešení diferenciálních rovnic uvedeného typu Mikusińskiho operátorovou metodou.

Резюме

ЗАМЕТКА К ОПЕРАЦИОННОМУ РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) - t x'(t) = f(t)$$

ЙОСЕФ МАТУШУ (Josef Matušů)

В статье разработан способ применения т.н. алгебраической производной для решения дифференциальных уравнений указанного типа операционным методом Микусиньского.

Die Adresse des Autors: *Josef Matušů*, ČVUT, Na bojišti 3, Praha 2.