

Aplikace matematiky

Jan Polášek

Hodographenmethode für Strömungsfelder mit Singularitäten

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 5, 321–340

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102867>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

HODOGRAPHENMETHODE FÜR STRÖMUNGSFELDER MIT SINGULARITÄTEN

JAN POLÁŠEK

(Eingegangen am 1. November 1962.)

Bei der Lösung von zweidimensionalen Randwertaufgaben der Strömungslehre vom Typ „Es ist die Form eines Teiles der Gebietsgrenze aufzufinden, auf dem die Konturgeschwindigkeitsverteilung vorgeschrieben ist, wobei auf dem restlichen Teil der Grenze die Geschwindigkeitsrichtung vorgegeben ist“, macht man mit Vorteil von Hodographenmethoden Gebrauch. Im Artikel wird dargelegt, wie man eine ähnliche Methode ableiten kann, die auch in den Fällen anwendbar wäre, wo Singularitäten (Quellen, Senken und Wirbel) in inneren Punkten des Strömungsfeldes vorkommen. Die erreichten Ergebnisse sind von Bedeutung bei verschiedenen technischen Aufgaben, vor allem beim Entwurf von Eintritts- und Austrittsgehäusen von Strömungsmaschinen.

1. EINLEITUNG

Bei der Lösung der praktischen Aufgabe und zwar des Entwurfs eines speziellen Typs des Austrittsgehäuses einer grossen Strömungsmaschine sind wir auf eine interessante Problematik gestossen und zwar nicht nur in strömungsteoretischer sondern auch in mathematischer Hinsicht. Der folgende Artikel berichtet über die mathematische Behandlung einer Randwertaufgabe, die das wesentliche des Entwurfs enthält:

Die Form der Kurve L , die einen Teil der Grenze des Gebietes M bildet (Abb. 1), soll so entworfen werden, dass die Konturgeschwindigkeit auf dieser einen vorgeschriebenen Verlauf hat. Für $x \rightarrow \infty$ ist die Entfernung der Kurve L von der Achse x gleich $\pi/2$ und die Geschwindigkeit ist im gesamten Querschnitt gleich 1 und ist parallel zur Achse x . Innerhalb des Gebietes M – im Punkt z_0 – ist eine Senke mit Ergiebigkeit $Q < \pi/2$ vorhanden.

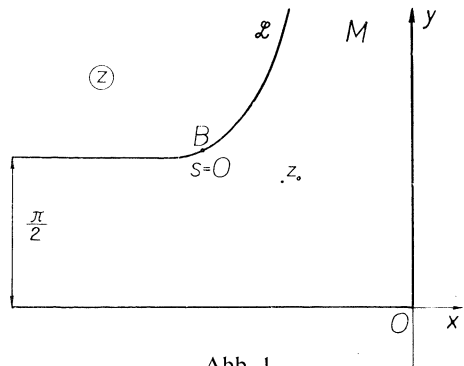


Abb. 1.

Alle Erwägungen bei der Lösung dieser Randwertaufgabe werden im komplexen Bereich durchgeführt. Das Gebiet M nennt man das Austrittsgehäuse, da durch Spiegelung des Gebietes M auf der reellen Achse ein Gebilde entsteht, das einem zweidimensionalen Austrittsgehäuse oder dem Meridianschnitt eines achsensymmetrischen Austrittsgehäuses mit ebener, zur Achse senkrechter Hinterwand, ähnlich ist. Die Kurve L wird im folgenden die Rundung des Austrittsgehäuses genannt.

2. ENTWURF DES AUSTRITTSGEHÄUSES MIT VORGESCHRIEBENEM VERLAUF DER KONTURGESCHWINDIGKEIT AUF DER RUNDUNG

Zunächst werden wir uns mit einem einfacheren Fall, wo das Strömungsfeld frei von Singularitäten ist ($Q = 0$), befassen. Diese Aufgabe löst man so, dass man die Funktion $z = z(\zeta)$ sucht, die den Streifen $0 < \eta < \pi/2$ der komplexen Ebene ζ

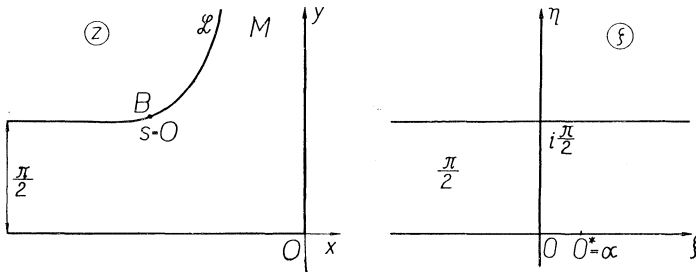


Abb. 2.

($\zeta = \xi + i\eta$) auf das Gebiet M der komplexen Ebene z abbildet (Abb. 2). Die Gerade $\eta = \pi/2$ wird durch diese Abbildungsfunktion auf die Rundung L und die reelle Achse der Ebene ζ auf die negative reelle Halbachse und auf die positive imaginäre Halbachse der Ebene z abgebildet, wobei der Punkt $\xi = \alpha, \eta = 0$ in den Ursprung der Ebene z übergeht.

Das komplexe Potential $\Omega(z)$ ist nach der Einsetzung der Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ eine Funktion der Veränderlichen ζ :

$$(2,1) \quad \Omega(z) = \Omega[z(\zeta)] \cdot ^1)$$

Die komplexe Geschwindigkeit w ist mit der Beziehung

$$(2,2) \quad w = \frac{d\Omega}{dz} = \frac{d\Omega}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}$$

¹⁾ In Übereinstimmung mit der Praxis der mathematischen Physik verwendet man zur Bezeichnung derselben Grösse dasselbe Symbol, wenn auch diese Grösse als Funktion verschiedener Veränderlichen ausgedrückt wird, z. B. $\Omega = \Omega(z) = \Omega[z(\zeta)] = \Omega(\zeta)$. Diese Schreibweise ist in striktmathematischer Hinsicht zwar nicht vollkommen exakt, jedoch ist sie in diesem Fall sehr übersichtlich.

gegeben, aus der sich für die Ableitung der Abbildungsfunktion eine wichtige Beziehung ergibt:

$$(2,3) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\Omega/d\zeta}{w}.$$

Im betrachteten Fall des zweidimensionalen Austrittsgehäuses ohne Singularitäten in inneren Punkten kann die komplexe Ebene ζ als Ebene des komplexen Potentials Ω angesehen werden:

$$(2,4) \quad \Omega = \Phi + i\Psi = \zeta = \xi + i\eta,$$

wo $\Phi = \xi$ das Geschwindigkeitspotential und $\Psi = \eta$ die Stromfunktion darstellen.

Die Konturgeschwindigkeit auf der Rundung L soll den vorgeschriebenen Verlauf haben

$$(2,5) \quad |w| = W_s(s),$$

wo s der Bogenlänge auf der Rundung gleichkommt. Die Bogenlänge wird vom Punkt B ab positiv in der Richtung der Strömung gemessen,

$$(2,6) \quad W_s(-\infty) = \lim_{s \rightarrow -\infty} W_s(s) = 1.$$

Es ist wichtig zu erwähnen, dass man aus der Kenntnis der Konturgeschwindigkeit auf der Rundung L als Funktion der Bogenlänge, auch das Geschwindigkeitspotential auf dieser Kurve als Funktion der Bogenlänge ausdrücken kann, da

$$(2,7) \quad W_s = \frac{\partial\Phi}{\partial s}$$

und folglich

$$(2,8) \quad \Phi(s) = \int_0^s W_s(\sigma) d\sigma.$$

Schliesslich kann man noch die Bogenlänge s aus den beiden Funktionen $W_s(s)$ und $\Phi(s)$ eliminieren und die Konturgeschwindigkeit auf der Rundung kann dann als Funktion des Geschwindigkeitspotentials ausgedrückt werden:

$$(2,9) \quad W_s = W_s(\Phi).$$

Nach (2,4) kann man noch statt des Geschwindigkeitspotentials die Veränderliche ξ einsetzen:

$$(2,10) \quad W_s = W_s(\xi).$$

Die komplexe Geschwindigkeit $w(z)$, die nach der Einsetzung der Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ als Funktion der Veränderlichen ζ ausgedrückt wird,

$$(2,11) \quad w(z) = w[z(\zeta)] = w(\zeta),$$

hat also auf der Geraden $\eta = \pi/2$ in der Ebene ζ den vorgeschriebenen absoluten Betrag

$$(2,12) \quad \left| w\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) \right| = W_s(\xi)$$

und auf der reellen Achse ($\eta = 0$) der Ebene ζ hat sie das vorgeschriebene Argument

$$(2,13) \quad \begin{aligned} \arg w(\xi + i0) &= 0 \quad \text{für } \xi < \alpha, \\ \arg w(\xi + i0) &= -\frac{\pi}{2} \quad \text{für } \xi > \alpha. \end{aligned}$$

Diese beiden Bedingungen werden erfüllt, wenn die Funktion $w(\zeta)$ in der Form

$$(2,14) \quad w(\zeta) = -iF(\zeta) \sqrt{\tanh \frac{1}{2}(\zeta - \alpha)}$$

ausgedrückt wird, wo $F(\zeta)$ eine im Streifen $0 < \eta < \pi/2$ reguläre Funktion ist, die auf der reellen Achse ($\eta = 0$) nur reelle Werte annimmt und auf der Geraden $\eta = \pi/2$ die Bedingung

$$(2,15) \quad \left| F\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) \right| = W_s(\xi)$$

erfüllt, da

$$(2,16) \quad \tanh \frac{1}{2}\left(\xi - \alpha + i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sinh \frac{1}{2}(\xi - \alpha) + i \cosh \frac{1}{2}(\xi - \alpha)}{\cosh \frac{1}{2}(\xi - \alpha) + i \sinh \frac{1}{2}(\xi - \alpha)}$$

und folglich

$$(2,17) \quad \begin{aligned} \left| \tanh \frac{1}{2}\left(\xi - \alpha + i\frac{\pi}{2}\right) \right| &= 1, \\ \arg \left[\tanh \frac{1}{2}\left(\xi - \alpha + i\frac{\pi}{2}\right) \right] &= \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \left[\tanh \frac{1}{2}(\xi - \alpha) \right]. \end{aligned}$$

Die Funktion $F(\zeta)$, die die erforderlichen Eigenschaften besitzt, ist mit der Beziehung

$$(2,18) \quad F(\zeta) = \exp \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W_s(t)}{\cosh(t - \zeta)} dt$$

gegeben. Man sieht vor allem daraus, dass die durch die Gleichung (2,18) definierte Funktion $F(\zeta)$ im Streifen $0 < \eta < \pi/2$ regulär ist und dass sie auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch die Bedingung (2,15) erfüllt ist. Das Integral in der Gleichung (2,18), für das die Bezeichnung $g(\zeta)$ eingeführt wird,

$$(2,19) \quad g(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W_s(t)}{\cosh(t - \zeta)} dt,$$

ist für $\eta = \pi/2$ uneigentlich, da $\cosh(t - \zeta) = 0$ für $\zeta = \xi + i(\pi/2)$ und $t = \xi$ ist. Man wähle nun eine kleine positive Zahl ε , setze in die Gleichung (2,19) $\zeta = \xi + i(\pi/2 - \varepsilon)$ ein und berechne den Limes, dem die Werte der Funktion $g(\zeta)$ zustreben, falls $\varepsilon \rightarrow 0$. Dieser Limes definiert dann den Werte der Funktion $g(\zeta)$ auf der Geraden $\eta = \pi/2$.

Da

$$(2,20) \quad \cosh\left(t - \xi + i\varepsilon - i\frac{\pi}{2}\right) = i \sinh(t - \xi + i\varepsilon),$$

gilt

$$(2,21) \quad g\left[\xi + i\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W_s(t) \cdot dt}{\cosh\left(t - \xi + i\varepsilon - i\frac{1}{2}\pi\right)} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W_s(t) dt}{\sinh(t - \xi + i\varepsilon)}$$

und folglich

$$(2,22) \quad \begin{aligned} g\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W_s(t) dt}{\sinh(t - \xi + i\varepsilon)} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{i}{\pi} \int_{\xi-a}^{\xi+a} \frac{\ln W_s(t) dt}{\sinh(t - \xi + i\varepsilon)} + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\xi-a} \frac{\ln W_s(t) dt}{\sinh(t - \xi + i\varepsilon)} + \right. \\ &\left. + \frac{i}{\pi} \int_{\xi+a}^{\infty} \frac{\ln W_s(t) dt}{\sinh(t - \xi + i\varepsilon)} \right] = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 0}} \frac{i}{\pi} \ln W_s(\xi) \int_{\xi-a}^{\xi+a} \frac{dt}{t - \xi + i\varepsilon} + \\ &\quad + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W_s(t) dt}{\sinh(t - \xi)}, \end{aligned}$$

wobei man unter dem Werte des letzten Integrals seinen Cauchyschen Hauptwert verstehen soll. Für das restliche Glied ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$(2,23) \quad \begin{aligned} \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 0}} \frac{i}{\pi} \ln W_s(\xi) \int_{\xi-a}^{\xi+a} \frac{dt}{t - \xi + i\varepsilon} &= \frac{i}{\pi} \ln W_s(\xi) \cdot \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 0}} \int_{-a}^a \frac{du}{u + i\varepsilon} = \\ &= \frac{i}{\pi} \ln W_s(\xi) \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 0}} \int_{-a}^a \frac{u - i\varepsilon}{u^2 + \varepsilon^2} du = \frac{i}{\pi} \ln W_s(\xi) \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 0}} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + \varepsilon^2}{a^2 + \varepsilon^2} - i2 \arctan \frac{a}{\varepsilon} \right] = \\ &= \frac{i}{\pi} \ln W_s(\xi) \lim_{a \rightarrow 0} (-i\pi) = \ln W_s(\xi). \end{aligned}$$

Nach (2,18), (2,22) und (2,23) ist

$$(2,24) \quad F\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) = W_s(\xi) \cdot \exp \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln W_s(t) dt}{\sinh(t - \xi)}.$$

Aus der Gleichung (2,24) ist schon ersichtlich, dass die durch die Gleichung (2,18) definierte Funktion $F(\zeta)$ auch der Bedingung (2,15) genügt.

Die Ableitung der Abbildungsfunktion ist nach den Gleichungen (2,3), (2,4) und (2,14) der Form:

$$(2,25) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{i}{F(\zeta) \sqrt{\tanh \frac{1}{2}(\zeta - \alpha)}} .$$

Die Form der Rundung L bekommt man durch Integration dieser Gleichung für $\zeta = \xi + i(\pi/2)$ mit den Bedingungen:

$$(2,26) \quad \begin{aligned} y &= \frac{\pi}{2} && \text{für } \xi \rightarrow -\infty , \\ x &= -\frac{\pi}{2} \frac{1}{W_s(\infty)} && \text{für } \xi \rightarrow \infty . \end{aligned}$$

3. ENTWURF DES AUSTRITTSGEHÄUSES MIT ISOLIERTEN SINGULARITÄTEN INNERHALB DES STRÖMUNGSFELDES

In diesem Abschnitt werden wir die Resultate des vorigen Abschnittes auch für den Fall verallgemeinern, in dem innerhalb des Strömungsfeldes isolierte Singularitäten (Quellen, Senken oder Wirbel) vorkommen. Da wir uns vor allem für eine solche Strömung interessieren, die das Strömungsfeld im Meridian-

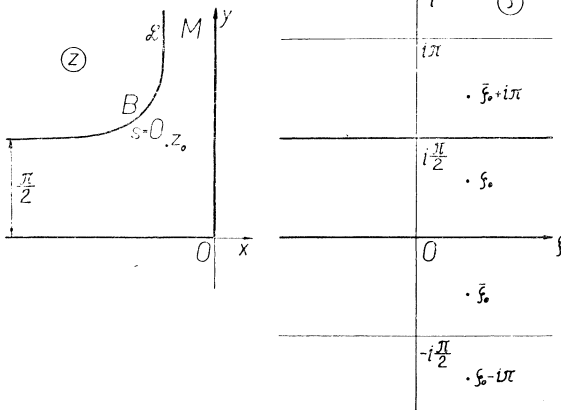


Abb. 3.

schnitt eines dreidimensionalen Austrittsgehäuses approximieren soll, sollen im weiteren nur Senken betrachtet werden; für Wirbel wäre der Rechengang ganz ähnlich. Ausführlich wird der Fall erörtert, in dem eine einzige Senke mit der Ergiebigkeit $Q < \pi/2$ innerhalb des Strömungsfeldes – im Punkt z_0 – vorkommt.

Die Abbildungsfunktion $z(\zeta)$, die den schlichten Streifen $0 < \eta < \pi/2$ aus der Ebene ζ auf das Gebiet M in der Ebene z abbildet, führt den Punkt $\zeta_0 = \beta + i\gamma$ in den Punkt z_0 über. Da die Abbildungsfunktion $z(\zeta)$ im Punkt ζ_0 regulär ist, soll das komplexe Potential Ω , betrachtet als Funktion der Veränderlichen ζ (2,1), im Punkt ζ_0 eine logarithmische Singularität mit der Intensität Q haben. Sein imaginärer Teil, die Stromfunktion, wird auf der reellen Achse und auf der Geraden $\eta = \pi/2$ konstante

Werte annehmen. Eine Funktion $\Omega(\zeta)$ die diese Eigenschaften besitzt, ergibt sich durch fortschreitende Spiegelungen der Senke mit der Ergiebigkeit Q im Punkt ζ_0 auf den Geraden $\eta = 0$ und $\eta = \pi/2$ und durch eine Zusammensetzung des so entstandenen Strömungsfeldes mit homogenem Strömungsfeld:

$$(3,1) \quad \Omega(\zeta) = \left(1 - \frac{Q}{\pi}\right)\zeta - \frac{Q}{2\pi} \ln \sinh(\zeta - \zeta_0) - \frac{Q}{2\pi} \ln \sinh(\zeta - \bar{\zeta}_0).$$

Auf der Geraden $\eta = \pi/2$ nimmt der reelle Teil der Funktion Ω (das Geschwindigkeitspotential) die folgenden Werte an:

$$(3,2) \quad \Phi(\xi) = \left(1 - \frac{Q}{\pi}\right)\xi - \frac{Q}{2\pi} \ln [\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma] + \frac{Q}{2\pi} \ln 2.$$

Ist die Kontargeschwindigkeit auf der Rundung L als Funktion der Bogenlänge vorgeschrieben ($W_s = W_s(s)$), kann man sie gemäss Gleichung (2,9) als Funktion des Geschwindigkeitspotentials ($W_s = W_s(\Phi)$) und schliesslich, mit Hilfe der Gleichung (3,2), als Funktion der Veränderlichen ξ ausdrücken:

$$(3,3) \quad W_s = W_s(\xi).$$

Man kann also auch in diesem Falle die Funktion $F(\zeta)$ auf dieselbe Weise wie im vorigen Abschnitt die Gleichung (2,18) ermitteln.

Für weitere Berechnungen erscheint es zweckmässig, das komplexe Potential (3,2) in der Form

$$(3,4) \quad \Omega(\zeta) = \frac{1}{1+q} \left[\zeta - \frac{1}{2}q \ln \sinh(\zeta - \zeta_0) - \frac{1}{2}q \ln \sinh(\zeta - \bar{\zeta}_0) \right]$$

zu schreiben, in die noch die Bezeichnung

$$(3,5) \quad q = \frac{Q}{\pi - Q}$$

eingeführt wurde.

Die komplexe Geschwindigkeit $w(z)$ hat im Punkt z_0 den Pol der ersten Ordnung und da die Abbildungsfunktion im Punkt z_0 regulär ist, wird auch die Funktion $w(\zeta) = w[z(\zeta)]$ im Punkt $\zeta = \zeta_0$ den Pol der ersten Ordnung haben. Man kann deshalb nicht die Funktion $w(\zeta)$ in der Form (2,14) schreiben, wie es früher geschah, sondern, wie leicht zu sehen ist, kann sie in der Form

$$(3,6) \quad w(\zeta) = -iF(\zeta) \frac{1 - \frac{1}{2}q \coth(\zeta - \zeta_0) - \frac{1}{2}q \coth(\zeta - \bar{\zeta}_0)}{\varphi(\zeta)} \sqrt{\tanh \frac{1}{2}(\zeta - \alpha)}$$

geschrieben werden. Von der Funktion $F(\zeta)$ gilt dasselbe, was darüber bereits erörtert wurde, und $\varphi(\zeta)$ ist eine reguläre Funktion im Streifen $0 < \eta < \pi/2$, die auf der reellen Achse reell ist und auf der Geraden $\eta = \pi/2$ der Bedingung

$$(3,7) \quad \left| \varphi \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| 1 - \frac{1}{2} q \coth \left(\xi + i \frac{\pi}{2} - \zeta_0 \right) - \frac{1}{2} q \coth \left(\xi + i \frac{\pi}{2} - \bar{\zeta}_0 \right) \right|$$

genügt.

Der absolute Betrag der rechten Seite der Gleichung (3,2) auf der Geraden $\eta = \pi/2$ ist dann tatsächlich der vorgeschriebenen Konturgeschwindigkeit

$$(3,8) \quad \left| w \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| F \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) \right| = W_s(\xi)$$

gleich.

Man setze in die rechte Seite der Gleichung (3,7) $\zeta_0 = \beta + i\gamma$, $\bar{\zeta}_0 = \beta - i\gamma$ ein. Nach einigen Umformungen ergibt sich:

$$(3,9) \quad \left| \varphi \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) \right| = \left| 1 - \frac{1}{2} q [\tanh(\xi - \beta - i\gamma) + \tanh(\xi - \beta + i\gamma)] \right| =$$

$$= \left| 1 - \frac{1}{2} q \tanh 2(\xi - \beta) \left[1 + \frac{\sinh^2(\xi - \beta) \cos^2 \gamma + \cosh^2(\xi - \beta) \sin^2 \gamma}{\cosh^2(\xi - \beta) \cos^2 \gamma + \sinh^2(\xi - \beta) \sin^2 \gamma} \right] \right| =$$

$$= \left| 1 - \frac{q}{2} \frac{\sinh 2(\xi - \beta)}{\sinh^2(\xi - \beta) + \cos^2 \gamma} \right|.$$

Die Funktion $\varphi(\zeta)$ kann also, ähnlich wie die Funktion $F(\zeta)$ (2,18), mit dem Integral

$$(3,10) \quad \varphi(\zeta) = \exp \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \left| 1 - \frac{q}{2} \frac{\sinh 2(t - \beta)}{\sinh^2(t - \beta) + \cos^2 \gamma} \right|}{\cosh(t - \zeta)} dt$$

ausgedrückt werden.

In die rechte Seite der Gleichung (2,3) für die Ableitung der Abbildungsfunktion

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{d\Omega/d\zeta}{w(\zeta)}$$

setze man die Ausdrücke (3,4) und (3,6) ein:

$$(3,11) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{\frac{i}{1+q} \left\{ 1 - \frac{1}{2} q \coth(\zeta - \zeta_0) - \frac{1}{2} q \coth(\zeta - \bar{\zeta}_0) \right\}}{F(\zeta) \frac{1 - \frac{1}{2} q \coth(\zeta - \zeta_0) - \frac{1}{2} q \coth(\zeta - \bar{\zeta}_0)}{\varphi(\zeta)} \sqrt{\tanh \frac{1}{2}(\zeta - \alpha)}}.$$

Nach Kürzen von singulären Teilen ergibt sich:

$$(3,12) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{i\varphi(\zeta)}{(1+q) F(\zeta) \sqrt{\tanh \frac{1}{2}(\zeta - \alpha)}}.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von dem einfacheren Fall (2,25) nur dadurch, dass in den Zähler des Bruches in der rechten Seite dieser Gleichung noch die Funktion $\varphi(\xi)$ kommt.

Die Form der Rundung bekommt man durch Integration der Gleichung (3,12) für $\zeta = \xi + i(\pi/2)$ mit den Bedingungen:

$$(3,13) \quad y = \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \xi \rightarrow -\infty ,$$

$$x = - \left(\frac{\pi}{2} - Q \right) \frac{1}{W_s(\infty)} = - \frac{\pi}{2} \frac{1-q}{1+q} \frac{1}{W_s(\infty)} \quad \text{für } \xi \rightarrow \infty .$$

4. NUMERISCHE BERECHNUNG DER RUNDUNG

Die Gleichung (2,25) bzw. (3,12) kann nur in äusserst vereinzelt Fällen in geschlossener Form integriert werden. In praktischen Fällen muss die Form der Rundung durch numerische Integration berechnet werden. Man zerlege zuerst die Gleichung (3,12), für $\zeta = \xi + i(\pi/2)$, in einen reellen und einen imaginären Teil; für die Koordinaten der Punkte auf der Rundung und für die Bogenlänge der Rundung ergibt sich dann:

$$(4,1) \quad \frac{dx}{d\xi} = \sigma(\xi) \cdot \cos \tau(\xi), \quad \frac{dy}{d\xi} = \sigma(\xi) \cdot \sin \tau(\xi),$$

$$(4,2) \quad \frac{ds}{d\xi} = \sigma(\xi) .$$

In diesen Gleichungen gilt in Bezug auf (2,17):

$$(4,3) \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{1+q} \cdot \frac{|\varphi(\xi + i\pi/2)|}{|F(\xi + i\pi/2)|} ,$$

$$(4,4) \quad \tau(\xi) = \frac{\pi}{4} + \arctan [\tanh \frac{1}{2}(\xi - \alpha)] + \arg \varphi \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) - \arg F \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) .$$

Der absolute Betrag der Funktion $\varphi(\zeta)$ auf der Geraden $\eta = \pi/2$ ist durch den Ausdruck (3,9) und ihr Argument ist gemäss Gl. (3,10) durch das Integral

$$(4,5) \quad \arg \varphi \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \left| 1 - \frac{1}{2}q \cdot \frac{\sinh 2(t - \beta)}{\sinh^2(t - \beta) + \cos^2 \gamma} \right|}{\sinh(t - \xi)} dt$$

gegeben.

Für kleine q ($|q| \leq q_0 < 1$ für $0 < \gamma \leq \pi/4$ und $|q| \leq q_0 < \sin 2\gamma$ für $\pi/4 \leq \gamma < \pi/2$) kann man das Integral (4,5) in eine Potenzreihe nach den Potenzen von q

entwickeln. Im weiteren wird man sich in dieser Potenzreihe nur auf die ersten zwei Glieder beschränken:²⁾

$$(4,6) \quad \arg \varphi \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) \doteq -q \frac{2 \cosh (\xi - \beta) \cos \gamma}{\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma} - \\ - \frac{1}{2} q^2 \left\{ \frac{\sinh (\xi - \beta) \cos 2\gamma}{[\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma] \cos \gamma} + \right. \\ \left. + \frac{[2 + \cosh 2(\xi - \beta) - \cos 2\gamma] \sinh (\xi - \beta) \cos \gamma}{[\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma]^2} \right\}.$$

Der absolute Betrag und das Argument der Funktion $F(\zeta)$ auf der Geraden $\eta = \pi/2$ sind für die gegebene Verteilung der Konturgeschwindigkeit auf der Rundung mit der Gleichung (2,24) gegeben. Die Geschwindigkeitsverteilung in den nachfolgend angeführten Beispielen, die als Grundlagen für den Entwurf des Austrittsgehäuses einer Strömungsmaschine gedient haben, ist nur durch die Forderung gegeben, die Konturgeschwindigkeit soll in der Richtung des Stromes monoton abnehmen und dabei soll der grösste Teil der Abnahme der Geschwindigkeit in der Umgebung des Punktes $\xi = d$ auf der Geraden $\eta = \pi/2$ konzentriert werden; ausserhalb dieser Umgebung soll die Konturgeschwindigkeit nur sehr allmählich abnehmen. Diesen Bedingungen genügt gut die Funktion

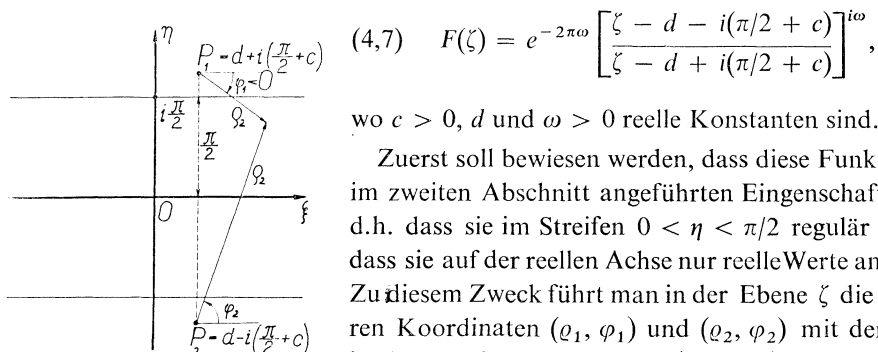


Abb. 4.

$$(4,7) \quad F(\zeta) = e^{-2\pi\omega} \left[\frac{\zeta - d - i(\pi/2 + c)}{\zeta - d + i(\pi/2 + c)} \right]^{i\omega},$$

wo $c > 0$, d und $\omega > 0$ reelle Konstanten sind.

Zuerst soll bewiesen werden, dass diese Funktion die im zweiten Abschnitt angeführten Eigenschaften hat, d.h. dass sie im Streifen $0 < \eta < \pi/2$ regulär ist und dass sie auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt. Zu diesem Zweck führt man in der Ebene ζ die bipolaren Koordinaten (ϱ_1, φ_1) und (ϱ_2, φ_2) mit den Polen in den Punkten $P_1 = d + i(\pi/2 + c)$ und $P_2 = d - i(\pi/2 + c)$ ein (Abb. 4).

$$(4,8) \quad F(\zeta) = e^{-2\pi\omega} \left(\frac{\varrho_1 e^{i\varphi_1}}{\varrho_2 e^{i\varphi_2}} \right)^{i\omega} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right)^{i\omega} \cdot \exp(\varphi_2 - \varphi_1 - 2\pi)\omega.$$

Es ist ersichtlich, dass die Funktion $F(\zeta)$ im Streifen $0 < \eta < \pi/2$ regulär ist und dass sie auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt, denn auf der reellen Achse gilt $\varrho_1 = \varrho_2$. Auf der Geraden $\eta = \pi/2$ ist

²⁾ Ausführliche Ableitung wird im Anhang der Arbeit angegeben.

$$(4,9) \quad \varphi_1 = -\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{\xi - d}{c}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\xi - d}{c + \pi},$$

$$(4,10) \quad \varrho_1^2 = (\xi - d)^2 + c^2, \quad \varrho_2^2 = (\xi - d)^2 + (c + \pi)^2,$$

wobei die Werte von Arkustangens im Intervall $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ genommen werden sollen. Auf der Geraden $\eta = \pi/2$ gilt dann

$$(4,11) \quad F\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left[-\omega\left(\pi + \arctan \frac{\xi - d}{c} + \arctan \frac{\xi - d}{c + \pi}\right) + i\frac{\omega}{2} \ln \frac{(\xi - d)^2 + c^2}{(\xi - d)^2 + (c + \pi)^2}\right],$$

so dass die Konturgeschwindigkeitsverteilung auf der Rundung ist:

$$(4,12) \quad W_s = \left|F\left(\xi + i\frac{\pi}{2}\right)\right| = \exp\left[-\omega\left(\pi + \arctan \frac{\xi - d}{c} + \arctan \frac{\xi - d}{c + \pi}\right)\right].$$

Durch die Wahl von Koeffizienten c , d und ω kann der Verlauf der Konturgeschwindigkeit im beträchtlichen Umfang geändert werden. Für den besonderen Fall $c = 0,06$; $d = 0$; $\omega = 0,047$ ist der Verlauf der Konturgeschwindigkeit in der Abbildung 7 wiedergegeben.

Nach der Einsetzung von Beziehungen (4,6) und (4,11) in die Gleichungen (4,3) und (4,4) kann man schreiben:

$$(4,13) \quad \sigma(\xi) = \frac{1}{1 + q} \left[1 - \frac{q}{2} \frac{\sinh 2(\xi - \beta)}{\sinh^2(\xi - \beta) + \cos^2 \gamma} \right] \cdot \exp \omega \left(\pi + \arctan \frac{\xi - d}{c} + \arctan \frac{\xi - d}{c + \pi} \right),$$

$$(4,14) \quad \tau(\xi) = \frac{\pi}{4} + \arctan \left[\tanh \frac{1}{2}(\xi - \alpha) \right] + \frac{\omega}{2} \ln \frac{(\xi - d)^2 + (c + \pi)^2}{(\xi - d)^2 + c^2} - q \frac{2 \cosh(\xi - \beta) \cos \gamma}{\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma} - \frac{q^2}{2} \left\{ \frac{\sinh(\xi - \beta) \cos 2\gamma}{[\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma] \cos \gamma} + \frac{[2 + \cosh 2(\xi - \beta) - \cos 2\gamma] \sinh(\xi - \beta) \cos \gamma}{[\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma]^2} \right\}.$$

Die Integration der Gleichungen (4,1) und (4,2), in deren rechte Seiten die Ausdrücke (4,13) und (4,14) eingesetzt wurden, wird nach der Simpsonschen Regel im Intervall $-140 \leq \xi \leq 140$ numerisch durchgeführt. Für grosse $|\xi|$ wählt man die Länge des Integrationsschrittes gross ($\max \Delta \xi = 40$), für kleine $|\xi|$ wählt man im Gegenteil die Länge des Integrationsschrittes klein ($\min \Delta \xi = 0,0625$). Zur Bestim-

mung der Anfangswerte setzt man voraus, dass die Geschwindigkeit für $\xi = -140$ und $\xi = 140$ im gesamten Querschnitt konstant bleibt. Aus dieser Voraussetzung ergeben sich

$$(4,15) \quad y_{\xi=-140} = \frac{\pi}{2} \exp \omega \left(\pi - \arctan \frac{140+d}{c} - \arctan \frac{140+d}{c+\pi} \right),$$

$$(4,16) \quad x_{\xi=140} = -\frac{\pi}{2} \frac{1-\bar{q}}{1+q} \exp \omega \left(\pi + \arctan \frac{140-d}{c} + \arctan \frac{140-d}{c+\pi} \right).$$

Die Bogenlänge misst man vom Punkt B ab (Abb. 3), für den $\xi = 0$ gilt.

5. BEISPIELE

a) Als erstes Beispiel wird die Form der Rundung mit konstanter Konturgegeschwindigkeit ($W_s = 1$) für den Fall durchgeführt, wo innerhalb des Strömungsfeldes keine Singularitäten vorkommen. Dieses Beispiel wurde deshalb gewählt, da seine Lösung in geschlossener Form geschrieben werden kann. Nach (2,18) gilt

$$(5,1) \quad F(\zeta) = 1,$$

so dass die Gleichung (2,25) für die Abbildungsfunktion in diesem Fall die Form

$$(5,2) \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{i}{\sqrt{\tanh \frac{1}{2}\zeta}}$$

annimmt, wo noch $\alpha = 0$ eingesetzt wurde, so dass der Ursprung der komplexen Ebene ζ auf den Ursprung der komplexen Ebene z abgebildet wird. Nach der Substitution

$$(5,3) \quad \tanh \frac{1}{2}\zeta = u^2$$

wird die Gleichung (5,2) die Form

$$(5,4) \quad dz = \frac{4i du}{1-u^4}$$

annehmen und deren Integral, das die Anfangsbedingung $z = 0$ für $u = 0$ erfüllt, ist dann

$$(5,5) \quad z = \ln \frac{i-u}{i+u} + i \ln \frac{1+u}{1-u}.$$

Wird in dieser Gleichung statt der Veränderlichen u wieder die ursprüngliche Veränderliche ζ eingesetzt, kann die Gleichung (5,5) in der Form

$$(5,6) \quad z = \ln \frac{-(e^\zeta - 1)^{\frac{1}{2}} + i(e^\zeta + 1)^{\frac{1}{2}}}{(e^\zeta - 1)^{\frac{1}{2}} + i(e^\zeta + 1)^{\frac{1}{2}}} + i \ln \frac{(e^\zeta + 1)^{\frac{1}{2}} + (e^\zeta - 1)^{\frac{1}{2}}}{(e^\zeta + 1)^{\frac{1}{2}} - (e^\zeta - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

geschrieben werden.

Die Punkte der Rundung L sind dann durch die Gleichung (5,6) gegeben, in die $\zeta = \xi + i(\pi/2)$ eingesetzt wurde. Nach einigen kleinen Umformungen ergibt sich

$$(5,7) \quad z = \frac{1}{2} \ln \frac{-(e^{2\xi} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1}{(e^{2\xi} + 1)^{\frac{1}{2}} + 1} + i \ln [e^\xi + (e^{2\xi} + 1)^{\frac{1}{2}}].$$

Durch Zerlegen dieser Gleichung in einen reellen und einen imaginären Teil ergeben sich die parametrischen Gleichungen der Rundung in der Form

$$(5,8) \quad \begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{(e^{2\xi} + 1) - 1}{(e^{2\xi} + 1) + 1}, \\ y &= \frac{\pi}{2} + \ln [e^\xi + (e^{2\xi} + 1)^{\frac{1}{2}}], \quad -\infty < \xi < \infty, \end{aligned}$$

oder nach Elimination des Parameters ξ bekommt man die Gleichung der Rundung in expliziter Form:

$$(5,9) \quad \begin{aligned} y &= \pi/2 - \\ &- \ln \left[-\tanh \frac{1}{2} \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ &-\infty < x < -\pi/2. \end{aligned}$$

In der Abb. 5 ist die Rundung (5,9) wiedergegeben. Die Form der Rundung wurde in diesem Fall auch numerisch nach den im vorigen Abschnitt abgeleiteten Formeln berechnet. Es stellte sich heraus, dass die Fehler der numerischen Integration den Wert $6 \cdot 10^{-4}$ nicht überschreiten.

b) Als nächstes Beispiel wurde die Rundung mit abnehmender Konturgeschwindigkeit berechnet, wobei der Verlauf der Konturgeschwindigkeit der Beziehung (4,12) mit den Konstanten $c = 0,06$, $d = 0$, $\omega = 0,047$ entsprach. Zuerst wurde der singularitätenfreie Fall behandelt, d. h.

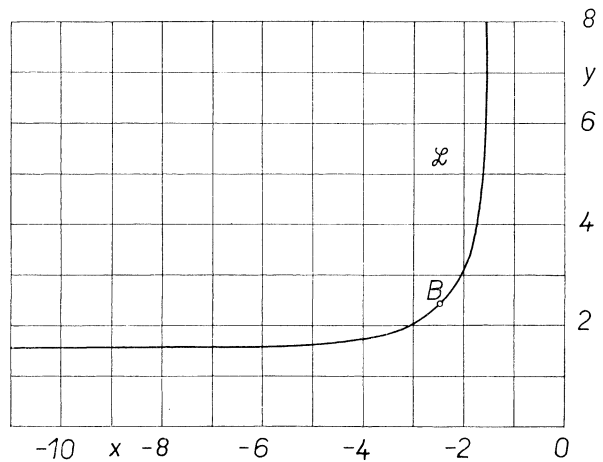


Abb. 5.

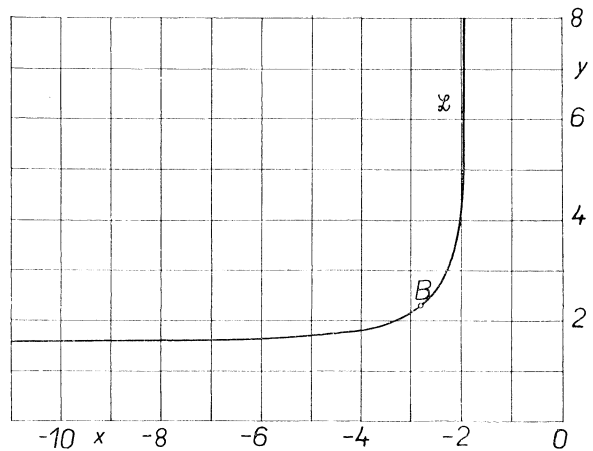


Abb. 6.

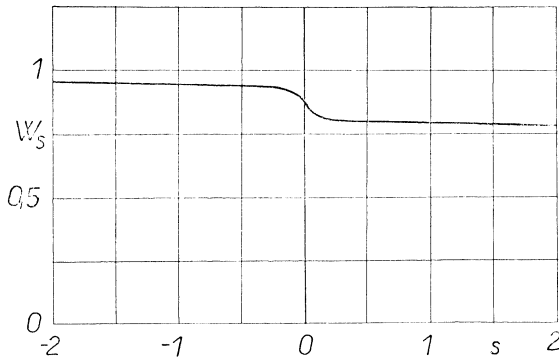


Abb. 7.

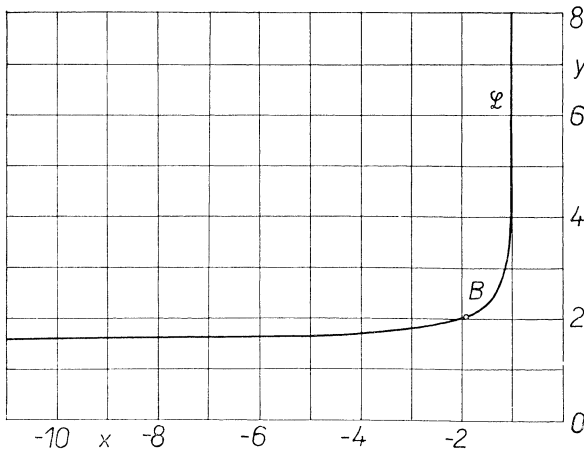


Abb. 8.

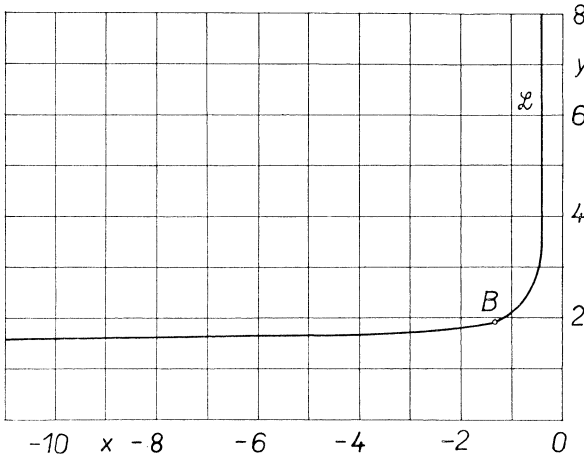


Abb. 9.

in den Ausdrücken (4,13) und (4,14) war $q = 0$ gesetzt. Die Konstante α hat man $\alpha = \frac{1}{2}$ gewählt. Zur Berechnung wurde die numerische Integration verwendet. Die Form der Rundung ist in der Abb. 6 wiedergegeben und in der nachfolgenden Abbildung (Abb. 7) ist der Verlauf der Konturgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Bogenlänge abgebildet.

Die Abbildung 8 stellt die Form der Rundung für den Fall dar, wo innerhalb des Strömungsfeldes eine Senke vorkommt. Man hat $\alpha = \frac{1}{4}$, $q = \frac{1}{3}$, $\beta = 0$, $\gamma = \pi/4$ gewählt, die Konstanten im Ausdruck für die Konturgeschwindigkeit blieben dieselben wie im vorigen Beispiel.

c) Schliesslich ist noch in der Abbildung 9 die Form der Rundung für den Fall wiedergegeben, wo innerhalb des Strömungsfeldes zwei Senken vorkommen; ($q_1 = 0,5$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = \pi/4$; $q_2 = 0,167$, $\beta_2 = 2$, $\gamma_2 = \pi/4$; $\alpha = 0$). Die Konstanten im Ausdruck für die Konturgeschwindigkeit sind dieselben wie im vorigen Beispiel. Die Berechnung ist ähnlich wie im Falle einer einzigen Senke, jedoch sind die den Ausdrücken (4,13) und (4,14) entsprechenden Beziehungen für die Strömungsfelder mit zwei Senken viel komplizierter und deshalb werden sie in diesem Artikel nicht erwähnt.

6. ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wurde eine Methode für die Berechnung der Rundung L des zweidimensionalen Austrittsgehäuses M (Abb. 1) mit vorgeschriebener Konturgeschwindigkeitsverteilung unter der Voraussetzung abgeleitet, dass eine isolierte Senke innerhalb des Strömungsfeldes vorkommt. Das bedeutendste Ergebnis liegt in der Gleichung (3,12), die zusammen mit den Beziehungen (2,18) und (3,10) die allgemeine Lösung dieser Randwertaufgabe darstellt. Für praktische Anwendung wurden die allgemeinen Beziehungen im 4. Abschnitt in eine zur numerischen Berechnung geeignete Form gebracht.

Ganz analog wäre auch im Falle vorzugehen, in dem ein Punktwirbel innerhalb des Strömungsfeldes vorkommt. Ebenso bietet eine Verallgemeinerung der erworbenen Resultate auf Fälle, wo innerhalb des Strömungsfeldes eine beliebige Anzahl von isolierten Singularitäten (Quellen, Senken und Wirbel) vorkommen, keine prinzipiellen Schwierigkeiten dar. Unbeherrscht bleiben bis jetzt nur die Fälle, wo die Divergenz oder Vortizität nicht in isolierten Punkten konzentriert, sondern auf einem Teil oder auf dem ganzen Gebiet M stetig verteilt ist.

ANHANG

Es kann leicht dargelegt werden, dass die Funktion

$$\frac{1}{2} \frac{\sinh 2(t - \beta)}{\sinh^2(t - \beta) + \cos^2 \gamma}$$

für reelle t und β und für $0 < \gamma < \pi/2$ beschränkt ist. Dabei ist für $0 < \gamma \leq \pi/4$

$$(1) \quad \left| \frac{1}{2} \frac{\sinh 2(t - \beta)}{\sinh^2(t - \beta) + \cos^2 \gamma} \right| \leq 1$$

und für $\pi/4 < \gamma < \pi/2$

$$(2) \quad \left| \frac{1}{2} \frac{\sinh 2(t - \beta)}{\sinh^2(t - \beta) + \cos^2 \gamma} \right| \leq \frac{1}{\sin 2\gamma}.$$

Für q , die den Bedingungen

$$(3) \quad |q| \leq q_0 < 1 \quad \text{für } 0 < \gamma \leq \frac{\pi}{4},$$

$$|q| \leq q_0 < \sin 2\gamma \quad \text{für } \frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

genügen, kann der Logarithmus im Integral (4,6) in eine Potenzreihe entwickelt werden und diese Reihe kann dann gliedweise integriert werden:

$$(4) \quad \arg \varphi \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1}{2^n n \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh^n 2(t - \beta) dt}{[\sinh^2(t - \beta) + \cos^2 \gamma]^n \sinh(t - \xi)}.$$

Bei der Berechnung der einzelnen Integrale

$$(5) \quad I_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh^n 2(t - \beta) dt}{[\sinh^2(t - \beta) + \cos^2 \gamma]^n \sinh(t - \xi)}$$

führt man neue Veränderliche

$$(6) \quad u = t - \xi, \quad v = \xi - \beta$$

ein;

$$(7) \quad I_n(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh^n 2(u + v) du}{[\sinh^2(u + v) + \cos^2 \gamma]^n \sinh u}$$

Der Integrand im Integral (7)

$$(8) \quad f_n(u) = \frac{\sinh^n 2(u + v)}{[\sinh^2(u + v) + \cos^2 \gamma]^n \sinh u}$$

als Funktion einer komplexen Veränderlichen u und zweier reeller Parameter v und γ ($0 < \gamma < \pi/2$) angesehen, hat in der komplexen Ebene u die Pole der ersten Ordnung in den Punkten $u = \pm ik\pi$; $k = 0, 1, \dots$ und die Pole der n -ten Ordnung in den Punkten $u = -v + i(\pi/2 - \gamma) \pm ik\pi$ und $u = -v + i(\pi/2 + \gamma) \pm ik\pi$; $k = 0, 1, \dots$ (Abb. 10). Innerhalb der Kurve C (Abb. 10) hat also die Funktion $f_n(u)$

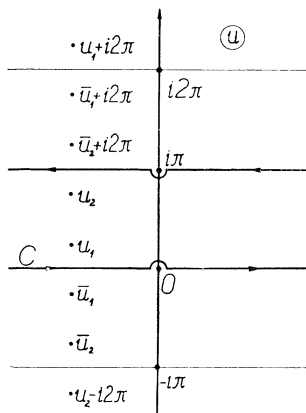


Abb. 10.

nur zwei Pole in den Punkten $u_1 = -v + i(\pi/2 - \gamma)$ und $u_2 = -v + i(\pi/2 + \gamma)$. Nach dem Residuumstheorem gilt für das Integral der Funktion $f_n(u)$ längs des geschlossenen Integrationsweges C :

$$(9) \quad \begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \oint_C f_n(u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sinh^n 2(u + v) du}{[\sinh^2(u + v) + \cos^2 \gamma]^n \sinh u} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{\sinh^n 2(u + v) du}{[\sinh^2(u + v) + \cos^2 \gamma]^n \sinh u} - \\ & - i \frac{1}{2} \operatorname{res} f_n(0) - i \frac{1}{2} \operatorname{res} f_n(i\pi) = \\ &= i \operatorname{res} f_n(u_1) + i \operatorname{res} f_n(u_2). \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich dann für den Wert des Integrals $I_n(\xi)$ die Beziehung

$$(10) \quad I_n(\xi) = i \left[\operatorname{res} f_n(u_1) + \operatorname{res} f_n(u_2) + \frac{1}{2} \operatorname{res} f_n(0) + \frac{1}{2} \operatorname{res} f_n(i\pi) \right].$$

Die Residuen der Funktion $f_n(u)$ in den Punkten $u = 0$ und $u = i\pi$ sind durch die Ausdrücke

$$(11) \quad \operatorname{res} f_n(0) = \left. \frac{\sinh^n 2(u + v)}{[\sinh^2(u + v) + \cos^2 \gamma]^n \cosh u} \right|_{u=0} = \frac{\sinh^n 2v}{[\sinh^2 v + \cos^2 \gamma]^n},$$

$$(12) \quad \operatorname{res} f_n(i\pi) = \frac{\sinh^n 2(u+v)}{[\sinh^2(u+v) + \cos^2 \gamma]^n \cosh u} \Big|_{u=i\pi} = \frac{-\sinh^n 2v}{[\sinh^2 v + \cos^2 \gamma]^n}$$

gegeben, so dass

$$(13) \quad \operatorname{res} f_n(0) + \operatorname{res} f_n(i\pi) = 0.$$

Für $n = 1$ ist

$$(14) \quad \operatorname{res} f_1(u_1) = \frac{\sinh 2(u_1 + v)}{2 \sinh(u_1 + v) \cdot \cosh(u_1 + v) \cdot \sinh u_1} =$$

$$\frac{1}{\sinh[-v + i(\pi/2 - \gamma)]} = \frac{1}{i \cosh(v + i\gamma)},$$

$$(15) \quad \operatorname{res} f_1(u_2) = \frac{\sinh 2(u_2 + v)}{2 \sinh(u_2 + v) \cdot \cosh(u_2 + v) \cdot \sinh u_2} =$$

$$= \frac{1}{\sinh[-v + i(\pi/2 + \gamma)]} = \frac{1}{i \cosh(v - i\gamma)}.$$

Nach (10), (14), (15) und (6) ist:

$$(16) \quad I_1(\xi) = i[\operatorname{res} f_1(u_1) + \operatorname{res} f_1(u_2)] = \frac{1}{\cosh(\xi - \beta + i\gamma)} + \frac{1}{\cosh(\xi - \beta - i\gamma)}.$$

Diesen Ausdruck kann man auf die Form

$$(17) \quad I_1(\xi) = \frac{\cosh(\xi - \beta - i\gamma) + \cosh(\xi - \beta + i\gamma)}{\cosh(\xi - \beta + i\gamma) \cdot \cosh(\xi - \beta - i\gamma)} = \frac{4 \cosh(\xi - \beta) \cdot \cos \gamma}{\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma}$$

umformen.

Für $n = 2$ wird bei der Berechnung des Residuums der Funktion $f_2(u)$ im Punkt u_1 eine neue Veränderliche

$$(18) \quad \bar{u} = u - u_1 = u + v - i\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$$

eingeführt. Nach (8) ist dann

$$(19) \quad f_2(u) = \frac{\sinh^2 2[\bar{u} + i(\pi/2 - \gamma)]}{\{\sinh^2 [\bar{u} + i(\pi/2 - \gamma)] + \cos^2 \gamma\}^2 \cdot \sinh[\bar{u} - v + i(\pi/2 - \gamma)]} =$$

$$= \frac{-i \sinh^2 2(\bar{u} - i\gamma)}{[-\cosh^2(\bar{u} - i\gamma) + \cos^2 \gamma]^2 \cdot \cosh(\bar{u} - v - i\gamma)}.$$

Der Zähler und Nenner des Bruches in der rechten Seite dieser Gleichung wird in der Umgebung des Punktes $\bar{u} = 0$ nach den Potenzen von \bar{u} entwickelt, so dass

$$\begin{aligned}
 (20) \quad f_2(u) &= \frac{-i[(2\bar{u} + \dots) \cos 2\gamma - i(1 + \dots) \sin 2\gamma]^2}{\left\{ - \left[\left(1 + \frac{1}{2}\bar{u}^2 + \dots \right) \cos \gamma - i(\bar{u} + \dots) \sin \gamma \right]^2 + \cos^2 \gamma \right\}^2 \cdot \\
 &\quad \cdot [(1 + \dots) \cosh(v + i\gamma) - (\bar{u} + \dots) \sinh(v + i\gamma)]} \\
 &= \frac{-i}{\bar{u}^2} \cdot \frac{\sin^2 2\gamma + \bar{u}4i \sin 2\gamma \cdot \cos 2\gamma + \dots}{[\sinh^2 2\gamma + \bar{u}2i \sin 2\gamma \cdot \cos 2\gamma + \dots] [\cosh(v + i\gamma) - \bar{u} \sinh(v + i\gamma) + \dots]} = \\
 &= \frac{1}{\bar{u}^2} \left\{ \frac{-i}{\cosh(v + i\gamma)} + \bar{u} \cdot \frac{2 \cosh(v + i\gamma) \cdot \cos 2\gamma - i \sinh(v + i\gamma) \cdot \sin 2\gamma}{\cosh^2(v + i\gamma) \cdot \sin 2\gamma} + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Das Residuum der Funktion $f_2(u)$ im Punkt u_1 ist dem Koeffizienten bei $1/\bar{u}$ in der Entwicklung (20) gleich:

$$(21) \quad \text{res } f_2(u_1) = \frac{2 \cosh(v + i\gamma) \cdot \cos 2\gamma - i \sinh(v + i\gamma) \cdot \sin 2\gamma}{\cosh^2(v + i\gamma) \cdot \sin 2\gamma}.$$

Das Residuum der Funktion $f_2(u)$ im Punkt u_2 ergibt sich aus dem Ausdruck (21) bloss durch Vorzeichenänderung bei γ :

$$(22) \quad \text{res } f_2(u_2) = \frac{-2 \cosh(v - i\gamma) \cdot \cos 2\gamma - i \sinh(v - i\gamma) \cdot \sin 2\gamma}{\cosh^2(v - i\gamma) \cdot \sin 2\gamma}.$$

Jetzt kann man schon den Wert des Integrals $I_2(\xi)$ feststellen. Nach (10), (13), (21) und (22) gilt:

$$\begin{aligned}
 (23) \quad I_2(\xi) &= i[\text{res } f_2(u_1) + \text{res } f_2(u_2)] = \frac{2i[\cosh(v - i\gamma) - \cosh(v + i\gamma)] \cos 2\gamma}{\cosh(v + i\gamma) \cdot \cosh(v - i\gamma) \cdot \sin 2\gamma} + \\
 &\quad + \frac{\sinh(v + i\gamma) \cdot \cosh^2(v - i\gamma) + \sinh(v - i\gamma) \cosh^2(v + i\gamma)}{\cosh^2(v + i\gamma) \cdot \cosh^2(v - i\gamma)} = \\
 &= \frac{8 \sinh v \cdot \sin \gamma \cdot \cos 2\gamma}{(\cosh 2v + \cos 2\gamma) \sin 2\gamma} + \\
 &\quad + \frac{2(\sinh 2v + i \sin 2\gamma) \cosh(v - i\gamma) + 2(\sinh 2v - i \sin 2\gamma) \cosh(v + i\gamma)}{(\cosh 2v + \cos 2\gamma)^2} = \\
 &= \frac{4 \sinh v \cdot \cos 2\gamma}{(\cosh 2v + \cos 2\gamma) \cos \gamma} + \frac{4(2 + \cosh 2v - \cos 2\gamma) \sinh v \cdot \cos \gamma}{(\cosh 2v + \cos 2\gamma)^2}.
 \end{aligned}$$

Wird in diesen Ausdruck noch $v = \xi - \beta$ eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 (24) \quad I_2(\xi) &= \frac{4 \sinh(\xi - \beta) \cdot \cos 2\gamma}{[\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma] \cos \gamma} + \\
 &\quad + \frac{4[2 + \cosh 2(\xi - \beta) - \cos 2\gamma] \sinh(\xi - \beta) \cdot \cos \gamma}{[\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma]^2}.
 \end{aligned}$$

Ähnlich wäre es auch bei der Berechnung der Integrale $I_n(\xi)$ für weitere n vorzugehen. Da aber in den erwähnten Beispielen nur kleine Werte q vorkommen, kann man sich in der Entwicklung (4) nur auf die ersten zwei Glieder beschränken, d.h. die Glieder von der höheren Grössenordnung als Q^2 werden vernachlässigt. Nach (4), (5), (17) und (24) bekommt man

$$\begin{aligned} \arg \varphi \left(\xi + i \frac{\pi}{2} \right) \doteq & -q \cdot \frac{2 \cosh(\xi - \beta) \cdot \cos \gamma}{\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma} - \\ & - \frac{1}{2} q^2 \left\{ \frac{\sinh(\xi - \beta) \cdot \cos 2\gamma}{[\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma] \cos \gamma} + \right. \\ & \left. + \frac{[2 + \cosh 2(\xi - \beta) - \cos 2\gamma] \sinh(\xi - \beta) \cdot \cos \gamma}{[\cosh 2(\xi - \beta) + \cos 2\gamma]^2} \right\}. \end{aligned}$$

Literatur

- [1] Kotschin N. J., Kibel I. A., Rose N. W.: Theoretische Hydromechanik, Bd 1. Akademie Verlag, Berlin 1954.
 [2] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.: Методы теории функций комплексного переменного, Москва—Ленинград 1951.

Výtah

HODOGRAFOVÁ METODA PRO PROUDOVÁ POLE SE SINGULARITAMI

JAN POLÁŠEK

Při řešení jednoho technického problému z proudění se narazilo na následující dvourozměrnou okrajovou úlohu:

Navrhnout tvar křivky L , která tvoří část hranice oblasti M (obr. 1) tak, aby povrchová rychlost W_s na této křivce měla předepsaný průběh. Pro $x \rightarrow -\infty$ je vzdálenost křivky L od osy x rovná $\pi/2$ a rychlost je v celém průřezu rovna 1 a je rovnoběžná s osou x . Uvnitř oblasti M — v bodě z_0 — je umístěn nor s vydatností $Q < \pi/2$.

Úloha se řeší tak, že se hledá funkce $z = z(\zeta)$, která zobrazí prostý pás $0 < \eta < \pi/2$ z roviny ζ na oblast M v rovině z (obr. 2). Přímka $\eta = \pi/2$ se přitom zobrazí na křivku L , kdežto reálná osa roviny ζ se zobrazí na zápornou reálnou poloosu a na kladnou imaginární poloosu roviny z , přičemž bod $\zeta = \alpha$, $\eta = 0$ se zobrazí na počátek roviny z . Bod $\zeta_0 = \beta + i\gamma$ se zobrazí na bod z_0 , v němž je umístěn nor. Komplexní potenciál $\Omega(z)$ a komplexní rychlost $w(z)$ mohou být po dosazení zobrazovací funkce $z = z(\zeta)$ napsány ve tvaru (3,4) a (3,6), kde pomocné funkce $F(\zeta)$ a $\varphi(\zeta)$ jsou dány integrály (2,18) a (3,10). Absolutní hodnota rychlosti na křivce L (tj. pro $\zeta = \xi + i(\pi/2)$) je pak podle (2,24) a (3,9) skutečně rovná předepsané po-

vrchové rychlosti ($|w| = W_s$). Pro derivaci zobrazovací funkce $z(\zeta)$ dostane se ze vztahu (2,2), po dosazení výrazů (3,4) a (3,6), rovnice (3,12). Rovnice křivky L se získá integrací rovnice (3,12) pro $\zeta = \xi + i(\pi/2)$. Integraci je možno provést v uzavřeném tvaru jen ve velmi speciálních případech (např. $W_s \equiv 1$, $Q = 0$, rov. (5,9), obr. 5). Pokud je vydatnost noru malá, je však možno upravit rovnici (3,12) na tvar vhodný pro numerickou integraci, rov. (4,1), (4,13) a (4,14). Výsledky několika příkladů jsou zobrazeny na obr. 6–9.

Резюме

МЕТОД ГОДОГРАФА ДЛЯ ПОЛЕЙ ТЕЧЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

ЯН ПОЛАШЕК (Jan Polášek)

При решении одной технической проблемы из области течения мы встретились со следующей двухмерной краевой задачей:

Построить кривую L , образующую часть границы области M (см. рис. 1) таким образом, чтобы скорость W_s на этой кривой имела предписанный ход изменений. Для $x \rightarrow \infty$ удаление кривой L от оси x равно $\pi/2$, скорость в целом сечения равна 1 и параллельна оси x . Внутри области M — в точке z_0 — расположен точечный сток мощностью $Q < \pi/2$.

Задача решается путем нахождения функции $z = z(\zeta)$, отображающей простую полосу $0 < \eta < \pi/2$ из плоскости ζ на область M в плоскости z (см. рис. 2). Прямая $\eta = \pi/2$ при этом отображается на кривую L , между тем как вещественная ось плоскости ζ отображается на отрицательную вещественную полосу и на положительную мнимую полосу плоскости z , причем точка $\xi = \alpha$, $\eta = 0$ передается на начало плоскости z . Точка $\zeta_0 = \beta + i\gamma$ отображается на точку z_0 , в которой расположен точечный сток. Комплексный потенциал $\Omega(z)$ и комплексную скорость $w(z)$ после подстановки отображающей функции $z = z(\zeta)$ можно писать в виде (3,4) и (3,6), где вспомогательные функции $F(\zeta)$ и $\varphi(\zeta)$ определены интегралами (2,18) и (3,10). Абсолютная величина скорости на кривой L (т.е. для $\zeta = \xi + i(\pi/2)$) тогда по (2,24) и (3,9) действительно равна предписанной скорости на поверхности ($|w| = W_s$). Для производной отображающей функции $z(\zeta)$ получим из отношения (2,2) после подстановки выражения (3,4) и (3,6), уравнение (3,12). Уравнение кривой L получится путем интегрирования уравнения (3,12) для $\zeta = \xi + i(\pi/2)$. Интегрирование можно осуществить в закрытом виде только в очень специальных случаях (напр., $W_s \equiv 1$, $Q = 0$, уравн. (5,9), рис. 5). Однако, если мощность точечного стока мала, уравнение (3,12) можно преобразовать к виду, удобному для численного интегрирования, уравн. (4,1), (4,13) и (4,14). Результаты нескольких примеров приведены на рис. 6–9.

Die Adresse des Autors: Dr. Jan Polášek C. Sc., Státní výzkumný ústav tepelné techniky, Husova 8, Praha 1.