

Aplikace matematiky

Josef Thomas

Soustavy rovnic z teorie řetězovitých radioaktivních přeměn - Použití na přirozenou radioaktivitu ovzduší

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 2, 118–128

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102844>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SOUSTAVY ROVNIC Z TEORIE ŘETĚZOVITÝCH RADIOAKTIVNÍCH PŘEMĚN — POUŽITÍ NA PŘIROZENOU RADIOAKTIVITU OVZDUŠÍ

JOSEF THOMAS

(Došlo dne 24. května 1960.)

Vztahy, které se používají při vyhodnocení výsledků měření přirozené aktivity ovzduší a při studiu vlivu větrání na porušování radioaktivní rovnováhy mezi koncentracemi rozpadových produktů radonu a toronu, jsou pomocí doplňujících požadavků odvozeny z partikulárního řešení určitého systému nehomogenních diferenciálních rovnic. Je uvedena řada obecně platných identit vhodných při operacích s uvedenými vztahy.

Pro popis postupných řetězovitých radioaktivních přeměn sestavil E. RUTHERFORD [1] systém obyčejných lineárních homogenních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty a odvodil z něho některé základní vztahy pro časovou závislost aktivity členů radioaktivní řady. Obecné řešení tohoto systému rovnic podal H. BATEMAN v roce 1908 [2]. Odvozené vztahy byly od té doby velmi často používány při práci s jednotlivými isotopy přirozených radioaktivních řad, z nichž nejdůležitější jsou řada uranová a řada thoriová.

V dnešní době se postupné přeměny vyskytují v daleko širší míře a v dalších souvislostech — např. při popisu velmi četných řad umělých radioisotopů, postupných chemických reakcí [3] nebo distribuce radioaktivních látek v organismu [4]. Avšak i o přirozené radioaktivní řady se oživil zájem, a to zejména v oblasti radiační hygieny — např. v souvislosti s měřením přirozené aktivity ovzduší [5], [6] nebo dávkovou expozicí dýchacích cest rozpadovými produkty radonu a toronu [7]. Výsledky tohoto článku jsou přizpůsobeny právě této oblasti aplikací.

V článku je uvedeno partikulární řešení určitého systému nehomogenních diferenciálních rovnic. Doplňující požadavky pro koeficienty nebo pro počáteční podmínky dovolují z tohoto řešení odvodit jednotným postupem vztahy potřebné ke studiu přirozené radioaktivity ovzduší. Jde zejména o tyto otázky:

1. o měření koncentrací rozpadových produktů radonu a toronu, které nejsou v radioaktivní rovnováze,
2. o mechanismus porušování radioaktivní rovnováhy mezi rozpadovými produkty vlivem ventilace.

Explicitní vypisování níže uvedených vztahů je účelné, neboť se v praxi často používají, a rovněž proto, že úprava obecného řešení pomocí speciálních podmínek na jednodušší tvar není vždy zcela triviální. Početní operace při úpravě a dokazování všech uvedených řešení se dají zredukovat na několik typů identit. Tyto identity jsou uvedeny v druhé části článku.

1. OBECNÉ ŘEŠENÍ ÚLOHY

Všechny speciální případy, které budou v dalším diskutovány, je možno odvodit pomocí dodatečných podmínek přímo z partikulárního řešení nehomogenního systému lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty

$$(1) \quad \frac{dN_1}{dt} = -\kappa_1 N_1 + d_1, \quad \frac{dN_i}{dt} = -\kappa_i N_i + \lambda_{i-1} N_{i-1} + d_i, \\ i = 2, 3, \dots, m,$$

kde $N_i(t)$ je počet atomů i -tého členu řady; t čas; λ_i rozpadové konstanty, pro které platí $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_m = 0$; κ_i , d_i konstanty, jejichž fyzikální interpretace je objasněna níže, s počátečními podmínkami

$$N_i(0) = N_{i0} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Systém rovnic (1) je proti Rutherfordovu systému rozšířen o nehomogenní členy d_i , které pro časovou bilanci znamenají konstantní přísun atomů, dále se liší konstantami κ_i , které při $\kappa_i > \lambda_i$ umožňují uvažovat i jiné procesy ubývání počtu atomů než je radioaktivní přeměna (kdy musí platit $\kappa_i = \lambda_i$), a konečně poslední rovnicí, kde vystupuje $N_m(t)$ – počet atomů posledního stabilního členu řady a která uzavírá systém.

Pro systém rovnic typu (1) je známa celá řada metod řešení, z nichž např. metody pomocí maticového počtu nebo Laplaceovy transformace jsou velmi elegantní. Partikulární řešení systému (1) uvádí HULTQVIST [4] v souvislosti s výpočtem absorbované dávky záření alfa rozpadových produktů radonu v plicích. Pro potřeby radiální hygieny bude vhodnější jiný tvar řešení se zjednodušeným označením indexů a v podněkud rozvinutějším tvaru oproti řešení Hultqvistovu

$$(2) \quad N_1(t) = \frac{d_1}{\kappa_1} + \left(N_{10} - \frac{d_1}{\kappa_1} \right) e^{-\kappa_1 t}, \\ N_i(t) = \sum_{k=1}^i \frac{d_k}{\lambda_i} \prod_{l=k}^i \frac{\lambda_l}{\kappa_l} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \prod_{l=2}^i \frac{\lambda_l}{\kappa_{l1}} \left(N_{10} - \frac{d_1}{\kappa_1} \right) e^{-\kappa_1 t} + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \prod_{l=k+1}^i \frac{\lambda_l}{\kappa_{lk}} \cdot \\ \cdot \left[\sum_{m=1}^{k-1} \prod_{l=m}^{k-1} \frac{\lambda_l}{\kappa_{lk}} \left(N_{m0} - \frac{d_m}{\kappa_k} \right) + N_{k0} - \frac{d_k}{\kappa_k} \right] e^{-\kappa_k t} + \left[\sum_{k=1}^{i-1} \prod_{l=k}^{i-1} \frac{\lambda_l}{\kappa_{li}} \left(N_{k0} - \frac{d_k}{\kappa_i} \right) + \right. \\ \left. + N_{i0} - \frac{d_i}{\kappa_i} \right] e^{-\kappa_i t}, \quad i = 2, 3, \dots, m.$$

Ve výrazu (2) i v dalších výrazech je použití zkráceného označení $\lambda_{ki} = \lambda_k - \lambda_i$.

2. DŮKAZ ŘEŠENÍ POMOCÍ ALGEBRAICKÝCH IDENTIT

V této části není řešení přímo dokazováno, je zde však uvedena řada algebraických identit s jejichž pomocí se dá správnost uvedených vztahů snadno dokázat. Důkazy těchto identit, které se většinou dají provést s použitím dvou explicitních vyjádření speciálních determinantů, jsou však čistě algebraickou záležitostí a proto zde nejsou podány.

Řešení (2) systému (1) je možno dokázat jednak úplnou indukcí, jednak přímým dosazením do systému (1). Početní operace a úpravy jsou při obou způsobech celkem snadné, vedou však v určitých fázích na algebraické vztahy mezi koeficienty λ_i . Tyto vztahy lze převést na identity algebraického charakteru. Jde hlavně o identity

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\kappa_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\lambda_l}{\kappa_{lk}} = \prod_{l=1}^n \frac{\lambda_l}{\kappa_l},$$

$$(4) \quad \sum_{k=1}^i \frac{\kappa_i}{\lambda_k} \prod_{l=1}^k \frac{\lambda_l}{\kappa_l} \prod_{\substack{l=k \\ l \neq i}}^n \frac{\lambda_l}{\kappa_{li}} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \frac{\lambda_l}{\kappa_{li}},$$

$$\sum_{k=i}^n \frac{\kappa_i}{\lambda_k} \prod_{l=k}^n \frac{\lambda_l}{\kappa_l} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^k \frac{\lambda_l}{\kappa_{li}} = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^n \frac{\lambda_l}{\kappa_{li}} \text{ při } 1 < i < n.$$

Pro často používaný speciální případ $\lambda_i = \kappa_i$ se identity (3), (4), příslušně zjednoduší. Niže je uvedena ještě řada dalších identit, kterých je možno použít při důkazech nebo úpravách výrazů uvedených v části 3:

$$(5) \quad \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{1}{\lambda_{lk}} = 0, \quad \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} = 1$$

$$(6) \quad (-1)^i \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^i}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \lambda_{kl}} = \begin{cases} b_n^{i-n+1} & \text{při } i > n-1, \\ 1 & \text{při } i = n-1, \\ 0 & \text{při } 0 \leq i < n-1, \end{cases}$$

kde $b_k^l(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ jsou symetrické funkce složené ze součtu kombinací k prvků po skupinách l prvků s opakováním (čímž se liší od elementárních symetrických funkcí $a_k^l(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ jako součtu kombinací bez opakování).

Identity

$$(7) \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k},$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^2} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \sum_{l=1}^k \frac{1}{\lambda_l} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{\lambda_l} \sum_{k=1}^l \frac{1}{\lambda_k}$$

souvisí se zobecněnými determinanty Vandermondovými [8]

$$D_n^i = \begin{vmatrix} 1, & \dots, & 1 \\ \lambda_1^i, & \dots, & \lambda_n^i \\ \dots\dots\dots \\ \lambda_1^{n+i-2}, & \dots, & \lambda_n^{n+i-2} \end{vmatrix}$$

při $i = 2, 3$, kdežto identity (5) při $i = 0, 1$.

Velmi často je nutno při úpravách obecných výrazů zaměňovat pořadí sčítání u dvojnásobných součtů „trojúhelníkového“ typu:

$$(8) \quad \sum_{k=k_1}^{k_1+m} \left(\sum_{l=l_1}^{k+n} b_l \right) a_k = \sum_{l=l_1}^{k_1+m+n} \left(\sum_{k=l-n}^{k_1+m} a_k \right) b_l \text{ při podmínce } n = l_1 - k_1,$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_1+m} \left(\sum_{l=k+n}^{l_2} b_l \right) a_k = \sum_{l=k_1+n}^{l_2} \left(\sum_{k=k_1}^{l-n} a_k \right) b_l \text{ při podmínce } n = l_2 - k_1 - m.$$

Tato pravidla pro sčítání jsou analogická Dirichletově formulí z integrálního počtu.

3. FYSIKÁLNÍ INTERPRETACE ŘEŠENÍ PRO SPECIÁLNÍ PŘÍPADY

V řešení (2) je možno rozlišit konstantní část a část časově proměnnou, při čemž čas vystupuje jen v exponenciálních funkcích. Důležitou vlastností řešení je, že počáteční podmínky N_{i0} a konstanty d_i vystupují pouze lineárně a že se v řešení nevyskytují členy $N_k d_l$.

Řešení (2) se používá při studiu přirozené aktivity ovzduší ve třech typických případech:

1. $N_{j0} = 0, \kappa_j = \lambda_j, j = 1, 2, \dots, m$. Tento případ je realizován při filtrování vzduchu, kdy rozpadové produkty radonu a toronu se zachytí (deponují) na filtru, kdežto Rn nebo Tn filtrem prochází. Konstanty d_i mají fyzikální význam počtu atomů zachycených na filtru za časovou jednotku. Zkráceně se hovoří o „depozici rozpadových produktů“.
2. $d_j = 0, \kappa_j = \lambda_j, j = 1, 2, \dots, m$. To je známý klasický případ řetězovitého rozpadu radioaktivních izotopů při libovolném počátečním stavu.
3. $d_1 \neq 0, \kappa_1 > \lambda_1, d_j = 0, \kappa_j > \lambda_j, j = 2, \dots, m$. Tento model je realizován při větrání ohraničeného prostoru, jehož stěny emanují.

Tyto tři případy budou v dalším podrobně diskutovány. Řešení pro poslední rovnici systému (1) nebudou pro případ 1 a 2 (kde $\lambda_m = 0$) explicitně uváděna, neboť je lze snadno získat přímo kvadraturou.

3.1. Deposice rozpadových produktů při filtraci

Podmínky

$$(9) \quad N_{j0} = 0, \quad \kappa_j = \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

mají jednoduchý fyzikální význam, jde-li o filtraci aktivního vzduchu. Udávají, že

filtr, kterým se vzduch prosává, je zpočátku čistý, a že jediným procesem, kterým se snižuje deponovaná aktivita, je radioaktivní přeměna (rozpad). Značí-li a_i koncentrace i -tého členu rozpadové řady ve vzduchu (rozp./min); V prosáté množství vzduchu (v l); T doba prosávání (v min); Q rychlost prosávání (v l/min); η účinnost filtru pro daný aerosol; dostávají konstanty d_i vztahem

$$(10) \quad d_i = \eta \frac{a_i}{\lambda_i} Q = \eta \frac{a_i}{\lambda_i} \frac{V}{T}$$

jasný fyzikální význam, jako časově konstantní přísun radioaktivních atomů na filtr (v atomech/min). Často se zavádí ještě koeficienty r_{ij} porušení rovnovážného stavu, které charakterizují poměr koncentrace i -tého členu řady k j -tému členu pro $i > j$

$$(11) \quad r_{ij} = \frac{a_i}{a_j}, \quad d_i = r_{ij} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} d_j.$$

Pro tyto koeficienty bylo v převážné většině experimentů nalezeno $1 > r_{ij} > r_{i+1j}$.

Úpravou lze z řešení (2) získat výrazy pro počet atomů i -tého členu řady na filtru, a to řazené podle exponenciálních funkcí

$$(12) \quad N_i(t) = \frac{d_1}{\lambda_1} - \frac{d_1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} = \frac{d_1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}),$$

$$N_i(t) = \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \sum_{j=1}^i d_j - \prod_{l=2}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{l1}} d_1 e^{-\lambda_1 t} - \sum_{k=2}^{i-1} \prod_{l=k+1}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} \left[\sum_{j=1}^{k-1} \prod_{l=j}^{k-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} d_j + d_k \right] e^{-\lambda_k t} - \right.$$

$$\left. - \left[\sum_{j=1}^{i-1} \prod_{l=j}^{i-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{li}} d_j + d_i \right] e^{-\lambda_i t} \right\} = \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \prod_{k=2}^i \frac{\lambda_k}{\lambda_{k1}} d_1 (1 - e^{-\lambda_1 t}) + \right.$$

$$+ \sum_{k=2}^{i-1} \prod_{l=k+1}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \prod_{l=j}^{k-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} d_j + d_k \right) (1 - e^{-\lambda_k t}) +$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \prod_{l=j}^{i-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{li}} d_j + d_i \right) (1 - e^{-\lambda_i t}) \right\}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1$$

nebo řazené podle konstant d_j

$$(13) \quad N_1(t) = \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) d_1,$$

$$N_i(t) = \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \left(1 - \sum_{k=j}^i \prod_{\substack{l=j \\ l \neq k}}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} e^{-\lambda_k t} \right) d_j + (1 - e^{-\lambda_i t}) d_i \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j}^i \prod_{\substack{l=j \\ l \neq k}}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} (1 - e^{-\lambda_k t}) d_j + (1 - e^{-\lambda_i t}) d_i \right\},$$

$$i = 2, 3, \dots, m-1.$$

Jsou-li zachycené koncentrace rozpadových produktů v radioaktivní rovnováze, tj. $r_{ij} = 1$

$$\lambda_1 d_1 = \dots = \lambda_i d_i, \quad d_i = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} d_j, \quad 1 \leq j \leq i,$$

přejde (12) a (13) na jednoduchý tvar

$$(14) \quad N_1(t) = \lambda_j \frac{d_j}{\lambda_1^2} (1 - e^{-\lambda_1 t}),$$

$$N_i(t) = \lambda_j d_j \sum_{k=1}^i \frac{1}{\lambda_i \lambda_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} (1 - e^{-\lambda_k t}), \quad i = 2, 3, \dots, m-1.$$

Integrace součtu všech diferenciálních rovnic systému (1) dává při podmínkách (9)

$$(15) \quad \sum_{i=1}^m N_i(t) = \left(\sum_{i=1}^m d_i \right) t,$$

to znamená, že úhrnný počet atomů v depositu narůstá s časem lineárně. Z hlediska fyzikálního vyjadřuje (15) zákon zachování počtu atomů, při čemž nerozhoduje v jakém „stavu“ se určitý atom v čase t nachází. S hlediska matematického je (15) jedním s prvních integrálů systému (1) při podmínkách (9).

Z prvních i rovnic systému (1) vyplývá

$$(16) \quad \lambda_i \int_0^t N_i(t) dt = \left(\sum_{k=1}^i d_k \right) \cdot t - \sum_{k=1}^i N_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Z limitních vztahů

$$(17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N_i(t) = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{k=1}^i d_k, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_m(t) = - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^k d_j + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^m d_k \right) t$$

je vidět, že počet atomů i -tého členu řady dosáhne asymptoticky stacionárního stavu, kdežto počet atomů N_m roste s časem lineárně, pokud je t dostatečně veliké.

3.2. Řetězovitý rozpad; rozpad depositu rozpadových produktů

Při podmínkách

$$(18) \quad d_j = 0, \quad \kappa_j = \lambda_j, \quad N_{j0} \neq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

přechází systém (1) na klasický systém Rutherfordův a popisuje postupné radioaktivní přeměny bez přísunu dalších atomů během procesu, kdy úbytek počtu atomů v čase je opět dán jen radioaktivní přeměnou jednotlivých členů.

Úpravou řešení (2) se získají pro počet atomů i -tého členu řady vztahy Kohlrauschovy řazené podle exponenciál [9]

$$(19) \quad N_1(t) = N_{10}e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_i(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \prod_{l=2}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{l1}} N_{10}e^{-\lambda_1 t} + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \prod_{l=k+1}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \prod_{l=j}^{k-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} N_{j0} + N_{k0} \right) e^{-\lambda_k t} +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{i-1} \prod_{l=j}^{i-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{li}} N_{j0} + N_{i0} \right) e^{-\lambda_i t}, \quad i = 2, \dots, m-1$$

nebo vztahy BATEMANOVY [2] řazené podle počátečních podmínek

$$(20) \quad N_1(t) = e^{-\lambda_1 t} N_{10},$$

$$N_i(t) = \sum_{j=1}^{i-1} \left(\sum_{k=j}^i \frac{\lambda_k}{\lambda_i} \prod_{\substack{l=j \\ l \neq k}}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} e^{-\lambda_k t} \right) N_{j0} + e^{-\lambda_i t} N_{i0}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1.$$

Při počátečních podmínkách odpovídajícím radioaktivní rovnováze

$$\lambda_1 N_{10} = \dots = \lambda_i N_{i0}, \quad N_{i0} = \frac{\lambda_j}{\lambda_i} N_{j0}$$

se vztahy (19) a (20) zjednoduší na

$$(21) \quad N_1(t) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1} N_{j0} e^{-\lambda_1 t},$$

$$N_i(t) = N_{j0} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \sum_{k=1}^i \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} e^{-\lambda_k t}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1.$$

Integrace součtu všech rovnic systému (1) dává při podmínkách (18)

$$(22) \quad \sum_{i=1}^m N_i(t) = \sum_{i=1}^m N_{i0},$$

což vyjadřuje z fyzikálního hlediska zákon zachování úhrnného počtu atomů vyskytujících se v libovolném čase v různých stavech. Z hlediska matematického je (22) jedním z prvních integrálů systému (1).

Pro součet prvních i rovnic systému (1) vychází

$$(23) \quad \lambda_i \int_0^t N_i(t) dt = \sum_{l=1}^i N_{l0} - \sum_{l=1}^i N_l(t), \quad \lambda_i \int_0^\infty N_i(t) dt = \sum_{l=1}^i N_{l0},$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1.$$

Tyto výrazy už nejsou prvními integrály, fyzikálně však je lze interpretovat jako počet atomů, který prošel i -tým stavem v časovém intervalu $\langle 0, t \rangle$.

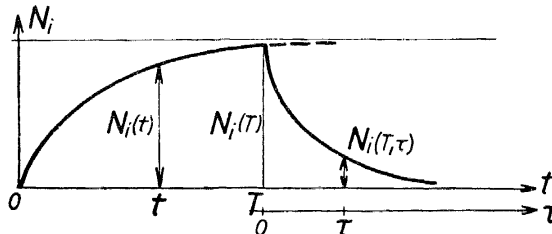
Vztahy

$$(24) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N_i(t) = \frac{\lambda_p}{\lambda_i} \prod_{l=p+1}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lp}} \left(\sum_{j=1}^{p-1} \prod_{l=j}^{p-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{lp}} N_{j0} + N_{p0} \right) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda_p t},$$

$$\lambda_p < \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, i, \quad i = 2, \dots, m-1$$

udávají asymptotické řešení. Pro dostatečně veliké t je časový průběh udán jedinou exponenciální funkcí s nejmenší rozpadovou konstantou λ_p .

Speciální, ale velmi důležitý případ počátečních podmínek je ten, jde-li o rozpad depositu rozpadových produktů zachycených na filtru. Situace je nejlépe srozumitelná dle obrázku (z něhož vysvítá i význam použitého označení): po předcházejícím odběru v čase $t \in \langle 0, T \rangle$ se deposit rozpadá pro $t \in \langle T, \infty \rangle$ nebo $\tau \in \langle 0, \infty \rangle$.



Obr. 1.

Počáteční podmínky jsou v tomto případě explicitně udány rovnicemi (12) nebo (13) jako funkce konstant d_i a doby odběru T . Dosadí-li se vztahy (12) nebo (13) jako počáteční podmínky do (19), nebo (20) vychází po úpravě pro počet atomů i -tého členu řady v čase τ výrazy

$$(25) \quad N_i(T, \tau) = \frac{1}{\lambda_1} d_1 (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 \tau},$$

$$N_i(T, \tau) = \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \prod_{l=2}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{li}} d_1 (1 - e^{-\lambda_l T}) e^{-\lambda_l \tau} + \sum_{k=2}^{i-1} \prod_{l=k+1}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \prod_{l=j}^{k-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} d_j + d_k \right) \cdot (1 - e^{-\lambda_k T}) e^{-\lambda_k \tau} + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \prod_{l=j}^{i-1} \frac{\lambda_l}{\lambda_{li}} d_j + d_i \right) (1 - e^{-\lambda_i T}) e^{-\lambda_i \tau} \right\},$$

$$i = 2, 3, \dots, m-1$$

nebo řazeno podle konstant d_j

$$(26) \quad N_i(T, \tau) = \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 \tau} d_1,$$

$$N_i(T, \tau) = \frac{1}{\lambda_i} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=j}^i \prod_{l=j}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} (1 - e^{-\lambda_k T}) e^{-\lambda_k \tau} d_j + (1 - e^{-\lambda_i T}) e^{-\lambda_i \tau} d_i \right\},$$

$$i = 2, \dots, m-1.$$

Výrazy (25) jsou značně jednodušší než udává MERCER [10].

Jsou-li zachycovaná množství d_j v radioaktivní rovnováze, zjednoduší se (25) a (26) na

$$(27) \quad N_1(T, \tau) = \frac{d_1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 T}) e^{-\lambda_1 \tau},$$

$$N_i(T, \tau) = d_i \sum_{k=1}^i \frac{1}{\lambda_k} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^i \frac{\lambda_l}{\lambda_{lk}} (1 - e^{-\lambda_k T}) e^{-\lambda_k \tau}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1.$$

Výrazy (25), (26) se používají k vyhodnocení měření aktivity depositu. Např. u radonu je možno pomocí tří změřených alfa aktivit $(\lambda_1 N_1 + \lambda_3 N_3$ v časech $\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ na rozpadové křivky stanovit koncentrace tří krátkodobých rozpadových produktů (RaA, RaB, RaC) ve vzduchu [5].

3.3. Ventilace ohraničeného prostoru s emanujícími stěnami

Podmínkami

$$(28) \quad d_1 = a, \quad d_j = 0 \quad \text{pro } j = 2, \dots, m, \quad \kappa_i = \lambda_i + \lambda_0, \quad \lambda_0 = Q/V,$$

kde V je objem uvažovaného ohraničeného prostoru s emanujícími stěnami; a počet atomů radonu nebo toronu, které vniknou do objemu za časovou jednotku; Q rychlost výměny vzduchu, je v systému (1) zachycen účinek ventilace ohraničeného prostoru s emanujícími stěnami. Je to nejjednodušší model pro studium mechanismu porušování rovnováhy mezi koncentracemi rozpadových produktů. Mateřský plyn i jeho rozpadové produkty jsou vzduchem odvětrány, což se projeví jako přídatný úbytkový člen v rovnicích (1). Předpokládá se ovšem, že koncentrace jsou v objemu V homogenní, tzn. že promísení je dostatečně rychlé. Tento případ byl vyřešen TSI-VOGLOUEM a AYEREM [11] pro 4 členy řady. Obecné řešení zní

$$(29) \quad N_1(t) = \frac{a}{\kappa_1} + \left(N_{10} - \frac{a}{\kappa_1} \right) e^{-\kappa_1 t},$$

$$N_2(t) = \frac{a\lambda_1}{\kappa_1\kappa_2} + \frac{\lambda_1}{\kappa_{21}} \left(N_{10} - \frac{a}{\kappa_1} \right) e^{-\kappa_1 t} + \left[\frac{\lambda_1}{\kappa_{12}} \left(N_{10} - \frac{a}{\kappa_2} \right) + N_{20} \right] e^{-\kappa_2 t},$$

$$N_i(t) = \frac{a}{\lambda_i} \prod_{l=1}^i \frac{\lambda_l}{\kappa_l} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \prod_{l=2}^i \frac{\lambda_l}{\kappa_{l1}} \left(N_{10} - \frac{a}{\kappa_1} \right) e^{-\kappa_1 t} + \frac{\lambda_2}{\lambda_i} \prod_{l=3}^i \frac{\lambda_l}{\kappa_{l2}} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\lambda_1}{\kappa_{12}} \left(N_{10} - \frac{a}{\kappa_2} \right) + N_{20} \right] e^{-\kappa_2 t} + \sum_{j=3}^{i-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \prod_{l=j+1}^i \frac{\lambda_l}{\kappa_{lj}} \cdot$$

$$\cdot \left[\prod_{l=1}^{j-1} \frac{\lambda_l}{\kappa_{lj}} \left(N_{10} - \frac{a}{\kappa_j} \right) + \sum_{k=2}^{j-1} \prod_{l=k}^{j-1} \frac{\lambda_l}{\kappa_{lj}} N_{k0} + N_{j0} \right] e^{-\kappa_j t} +$$

$$+ \left[\prod_{l=1}^{i-1} \frac{\lambda_l}{\kappa_{li}} \left(N_{10} - \frac{a}{\kappa_i} \right) + \sum_{k=2}^{i-1} \prod_{l=k}^{i-1} \frac{\lambda_l}{\kappa_{li}} N_{k0} + N_{i0} \right] e^{-\kappa_i t},$$

$$i = 3, 4, \dots, m (!)$$

Vztahy (23) se používají ke stanovení stupně porušení radioaktivní rovnováhy mezi členy řady v závislosti na ventilaci.

Současně je možno stanovit emanační mohutnost stěn.

Ze vztahů (23) vyplývá několik závažných důsledků:

1. stacionární stavy nejsou na počátečním stavu už vůbec závislé,
2. radioaktivní rovnováha mezi členy rozpadové řady je porušena i sebemenším větráním,

3. pro aktivity $A_i = \lambda_i N_i$ platí

$$(30) \quad A_i(\infty) < A_j(\infty), \quad A_i(\infty) < A_i^*(\infty), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad i > j,$$

kde hvězdičkou je označena aktivita rovnovážného stavu při $Q = 0$. Platí tedy za daných podmínek vždy $1 \geq r_{jk} \geq r_{ik}$ při $i > j > k$ a $Q \geq 0$.

Literatura

- [1] *Rutherford E.*: Radioactivity, London 1905.
- [2] *Bateman H.*: The solution of a system of differential equations occurring in the theory of radioactive transformations, Proc. Cambr. Phil. Soc. 15, 423–427, 1908/10.
- [3] *Poduzun H. M., Poduzuna E. H.*: Последовательные химические реакции, Москва 1960.
- [4] Radiation Dosimetry, ed. G. J. Hine, G. L. Brownell, New York 1956, Chap. 17; kniha má ruský překlad.
- [5] *Tsivoglou E. C., Ayer H. E., Holaday D. A.*: Occurrence of non-equilibrium atmospheric mixtures of radon and its daughters, Nucleonics 11, 9, 40–45, 1953.
- [6] *Kusnetz H. L.*: Radon daughters in mine atmosphere, Am. Ind. Hyg. Ass. Quart. 17, 85–88, 1956.
- [7] *Hultqvist B.*: Studies on naturally occurring ionizing radiations, Kungl. Svenska Vetenskaps-akademiens Handlingar, Band 6, Nr. 3, 1956; kniha má ruský překlad.
- [8] *Kořínek V.*: Základy algebry, Praha 1956.
- [9] *Kohlrausch K. W.*: Radioaktivität, Hdb. d. Exp. Phys., sv. 15, 1928.
- [10] *Mercer T. T.*: Atmospheric monitoring for α -emitters, Arch. Ind. Hyg. Occ. Med. 10, 372–380, 1954.
- [11] *Tsivoglou E. C., Ayer H. E.*: Ventilation of uranium mines, A. M. A. Arch. Ind. Hyg. Occup. Med. 10, 363–371, 1954.

Резюме

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ РАСПАДОВ – ПРИЛОЖЕНИЯ К ЕСТЕСТВЕННОЙ АТМОСФЕРНОЙ РАДИОАКТИВНОСТИ

ИОСЕФ ТОМАС (Josef Thomas)

Отношения, которые используются при оценивании результатов измерения естественной радиоактивности воздуха или при исследовании влияния вентиляции на степень отклонения радиоактивного равновесия между продуктами распада радона и торона, получены путем решения системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений при помощи дополнительных допущений. Приводится ряд тождеств общей действительности (3)-(8), которые значительно облегчают операции над указанными отношениями.

Summary

SYSTEMS OF EQUATIONS FROM THE THEORY OF SUCCESSIVE DESINTEGRATIONS—APPLICATIONS TO NATURAL RADIOACTIVITY IN THE ATMOSPHERE

JOSEF THOMAS

Relations which occur in studies of natural radioactivity in the atmosphere, such as measuring of radon daughter product concentrations or influence of ventilation on the departure of radioactive equilibrium, are derived from a solution of a system of non-homogenous linear differential equations with supplementary conditions. There are summarized some generally valid identities (3)-(8) facilitating operations with the given relations.

Adresa autora: Josef Thomas, Ústav hygieny práce a chorob z povolání, Šrobárova 48, Praha 10 – Vinohrady.