Miloš Lánský

O vlivu tenké rovinné desky na elektromagnetické pole kruhového vodiče

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 2, 81–101

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102842

O VLIVU TENKÉ ROVINNÉ DESKY NA ELEKTROMAGNETICKÉ POLE KRUHOVÉHO VODIČE

MILOŠ LÁNSKÝ

(Došlo dne 6. prosince 1961.)

V práci řeší autor Hankelovou transformací integrální rovnici, která popisuje přídavnou impedanci kruhového vodiče, do jehož pole je vložena tenká rovinná deska.

ÚVOD

V posledním desetiletí došlo k výraznému rozvoji indukční metody a jejímu praktickému využití pro rozlišování materiálů a zjišťování kazů v povrchových vrstvách. Podstata metody je v měření admitance indukční cívky, do jejíhož magnetického pole vkládáme zkoumaný předmět. Dosavadní publikace ukazují, že exaktní stanovení funkce, která by vystihovala změnu zdánlivého odporu cívky v závislosti na geometrických a elektromagnetických vlastnostech vyšetřovaného předmětu, je dosti obtížné. Tyto práce mají proto převážně empirický charakter.

Z podnětu a za laskavého přispění s. doc. inž. J. BINKA, zabýval se autor výpočtem přídavné impedance kruhového vodiče, vzniklé vložením dostatečně tenké nekonečné rovinné desky do pole vodiče kolmo na jeho osu. Tento problém řešil OLLENDORF [6], který ve své práci vychází přímo z rovnic pole. Jeho řešení je prakticky těžko použitelné. Na druhé straně LANGER [7] nahrazuje rovinu několika vhodně volenými koncentrickými kruhovými vodiči (kroužky) a dostává samozřejmě pouze přibližný výsledek. I když Langerovy výsledky jsou v souladu s měřením, zůstala otevřena otázka teoretické oprávněnosti takové aproximace. Autor této práce postupuje Langerovou metodou a ukazuje, že v limitě tato metoda vede k exaktnímu řešení. Tím je prokázána vhodnost zmíněného Langerova postupu. K numerickému zhodnocení navrhuje autor asymptotický rozvoj.

KAPITOLA I. FORMULACE PROBLÉMU

§ 1. Vzájemná indukčnost dvou tenkých kruhových vodičů

Mějme dva okruhy charakterisované ohmickými odpory R_i, vlastními indukčnostmi L_i a vzájemnými indukčnostmi L_{ik}, $i \neq k$, $i, k = 0, 1$. Označíme-li příslušné proudy I_i

a okružní napětí U_i (I_i a U_i jsou obecně komplexní „časové vektory"), dostáváme soustavu [5, 504]

$$U_0 = R_0 I_0 + j\omega L_0 I_0 + j\omega L_{01} I_1 , \tag{1}$$
$$U_1 = R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega L_{10} I_0 ,$$

kde j značí imaginární jednotku a ω je kruhová frekvence střídavého proudu. Přivádíme-li napětí pouze na okruh indexu 0 (tj. je-li $U_1 = 0$), je možno z druhé rovnice soustavy (1) vypočítat I_1 jako lineární homogenní funkci I_0 a po dosazení do prvé rovnice dostáváme

$$U_0 = (R_0 + \Delta R) I_0 + j\omega(L_0 + \Delta L) I_0 , \tag{2}$$

kde

$$\Delta R = \frac{\omega^2 L_{01} L_{10}}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} R_1 , \quad \Delta L = - \frac{\omega^2 L_{01} L_{10}}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} L_1 . \tag{3}$$

Veličinu $\Delta Z = \Delta R + j\omega \, \Delta L$ budeme nazývat přídavná impedance, neboť rovnici (2) můžeme přepsat ve tvaru

$$U_0 = R_0 I_0 + j\omega L_0 I_0 + \Delta Z I_0 . \tag{4}$$

Přídavná impedance ΔZ závisí na veličinách ω, R_1, L_1 a také na vzájemných indukčnostech L_{01}, L_{10}. Jak známo, plyne ze zákona o zachování energie vztah symetrie $L_{01} = L_{10}$. Jsou-li okruhy (1) tvořeny dvěma vláknovými vodiči tvaru uzavřených křivek σ_0 a σ_1, je vzájemná indukčnost L_{01} (za určitých fysikálních předpokladů) charakterisována magnetickou permeabilitou μ a čistě geometrickými vlastnostmi těchto křivek. Platí pro ni Neumannův vzorec [4, 2], [5]

$$L_{01} = \mu \int_{\sigma_0} \int_{\sigma_1} \frac{\cos \varepsilon}{r} \, \mathrm{d}s_0 \, \mathrm{d}s_1 . \tag{5}$$

Integrály ve vzorci (5) jsou křivkové integrály, r značí velikost spojnice bodů ležících na křivkách σ_0 a σ_1, ε je úhel tečných vektorů v těchto bodech a $\mathrm{d}s_0$, $\mathrm{d}s_1$ jsou příslušné diferenciály délky oblouku křivek σ_0, σ_1.

Jsou-li σ_0, σ_1 dvě různé kružnice, které leží ve dvou (ne nutně různých) rovnoběžných rovinách a jejichž spojnice středů je kolmá k těmto rovinám (v dalším stručně: σ_0, σ_1 „koaxiální" kružnice), dostaneme jednoduchým propočtem z Neumannova vzorce (5) Maxwellův vzorec [4, 4], [5]

$$L_{01} = 4\pi\mu \sqrt{(r_0 r_1)} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) F(k) - \frac{2}{k} E(k) \right], \tag{6}$$

kde $r_0 > 0$, $r_1 > 0$ jsou poloměry kružnic σ_0 a σ_1, $z_{01} \geqq 0$ je vzdálenost středů těchto kružnic, proměnná k je zkratka za výraz

$$k = \frac{2\sqrt{(r_0 r_1)}}{\sqrt{(z_{01}^2 + (r_0 + r_1)^2)}} \tag{7}$$

a

(8) $$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1 - k^2 \sin^2 t)}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 t)}\, \mathrm{d}t$$

jsou eliptické integrály prvního a druhého druhu [3, 725].

K numerickým výpočtům se místo vzorce (6) lépe hodí vzorec [4, 4], [9]

(9) $$L_{01} = 4\pi\mu \sqrt{(r_0 r_1)}\, k^3\, C(k)\,,$$

kde $C(k)$ je tabelovaný „normální integrál", který zavedl Emde vztahem

(10) $$C(k) = 2k^{-4}(F(k) - E(k)) - k^{-2}\, F(k)\,.$$

V dalším výkladu budeme užívat téměř výhradně vzorce, který odvodil Havelock [4, 7]

(11) $$L_{01} = 4\pi^2 \mu r_0 r_1 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda z_{01}}\, J_1(\lambda r_0)\, J_1(\lambda r_1)\, \mathrm{d}\lambda\,.$$

Zde $J_1(x)$ je Besselova funkce prvního druhu s indexem jedna, definovaná např. integrálem [3, 625]

(12) $$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\lambda - x \sin \lambda)\, \mathrm{d}\lambda\,.$$

Vzorec (11) můžeme získat buď přímo [4, 7] nebo užitím operátorového slovníku pro Laplaceovu transformaci [9] porovnáním se vzorcem (6).

§ 2. Zobecnění na soustavu $n + 1$ koaxiálních kruhových vodičů

Pro $n + 1$ okruhů označených indexy $0, 1, 2, \ldots, n$ platí při analogickém označení jako v § 1 soustava $n + 1$ rovnic

(13) $$U_i = R_i I_i + j\omega L_i I_i + j\omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} L_{ik} I_k\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Přivádíme-li napětí pouze na okruh indexu 0 (tj. je-li $U_i = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$), je možno za jistých matematických předpokladů z n rovnic soustavy (13) (pro $i = 1, 2, \ldots, n$) vypočítat $I_1, I_2, \ldots, I_n$ jako lineární homogenní funkce I_0 a po dosazení do rovnice indexu 0 dostaneme opět rovnici (2), kde však ΔR a ΔL jsou dány obecně složitějšími vzorci, než jsou vzorce (3). Rovněž zde budeme veličinu

$$\Delta Z = \Delta R + j\omega\, \Delta L$$

nazývat přídavnou impedancí ve smyslu rovnice (4). Explicitním vyjádřením veličiny ΔZ se nebudeme zabývat [7]. Je zřejmo, že ΔZ závisí na ω, R_i, L_i $(i = 1, \ldots, n)$ a také na L_{ik} $(i \neq k,\ i, k = 0, \ldots, n)$, pro něž je $L_{ik} = L_{ki}$.

Jsou-li okruhy tvořeny vesměs $n + 1$ koaxiálními kružnicemi σ_i ($i = 0, \ldots, n$), pro L_{ik} platí za týchž předpokladů jako v § 1 vzorce (6), (7), (8) resp. (9), (10) resp. (11), (12), nahradíme-li v nich indexy 0, 1 indexy i, k ($i \neq k$, $i, k = 0, \ldots, n$).

§ 3. Aproximace tenké desky soustavou koaxiálních kruhových vodičů

Mějme rotační válec o poloměru základny $l > 0$ a poměrně malé výšce $v > 0$ z vodivého materiálu, jehož specifická vodivost je γ. Tento útvar budeme dále stručně nazývat tenká vodivá deska.

Interval $\langle 0, l \rangle$ rozdělíme na n částečných intervalů

$$\langle r_0, r_1 \rangle, \langle r_1, r_2 \rangle, \ldots, \langle r_{n-1}, r_n \rangle \quad \begin{matrix} r_0 = 0 . \\ r_n = l . \end{matrix}$$

Těmto intervalům odpovídají meziválcové vodiče (kroužky). V k-tém intervalu jistě existuje číslo $\bar{r}_k$, takže pro ohmický odpor R_k k-tého kroužku platí

$$R_k = \frac{2\pi \bar{r}_k}{\gamma v \, \Delta r_k}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{13a}$$

kde $\Delta r_k = r_k - r_{k-1}$. Definujeme dále proudovou hustotu h_k v k-tém kroužku vztahem

$$h_k = \frac{I_k}{v \, \Delta r_k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Máme-li nyní soustavu kruhový vodič plus rovnoběžná tenká vodivá deska o konečném poloměru, označíme-li parametry kruhového vodiče indexem 0 a aproximujeme-li desku soustavou n shora popsaných kruhových vodičů o poloměru $\bar{r}_k$ ($k = 1, \ldots, n$), můžeme rovnice (13) s použitím vzorců (13a) a (14) přepsat ve tvaru

$$\begin{gathered} U_0 = R_0 I_0 + j\omega L_0 I_0 + j\omega \sum_{k=1}^{n} L_{0k} h_k v \, \Delta r_k , \\ U_i = 2\pi\gamma^{-1} \bar{r}_i h_i + j\omega L_i h_i v \, \Delta r_i + j\omega L_{i0} I_0 + j\omega \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} L_{ik} h_k v \, \Delta r_k , \\ i = 1, \ldots, n , \end{gathered} \tag{15}$$

kde podle (11) je

$$\begin{gathered} L_{0k} = L_{k0} = 4\pi^2 \mu r_0 r_k \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r_0) \, J_1(\lambda r_k) \, d\lambda , \\ k = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{16}$$

a

$$\begin{gathered} L_{ik} = L_{ki} = 4\pi^2 \mu r_i r_k \int_0^\infty J_1(\lambda r_i) \, J_1(\lambda r_k) \, d\lambda , \\ i \neq k, \; i, k = 1, \ldots, n . \end{gathered} \tag{17}$$

Písmeno z ze vzorce (16) označuje vzdálenost kruhového vodiče od desky. Protože přivádíme střídavé napětí pouze na vodič indexu 0, je $U_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Dosadíme-li ze vzorců (16) a (17) a přejdeme-li v soustavě (15) k limitě pro $\max \{\Delta r_k\} \to 0$, dostaneme za předpokladu existence příslušných Riemannových integrálů rovnice

$$(18) \quad U_0 = R_0 I_0 + j\omega L_0 I_0 + j\omega \,.\, 4\pi^2 \mu v r_0 \int_0^l r\, h(r)\, \mathrm{d}r \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r_0)\, J_1(\lambda r)\, \mathrm{d}\lambda\,,$$

$$2\pi\gamma^{-1} r\, h(r) + j\omega \,.\, 4\pi^2 \mu v r \int_0^l s\, h(s)\, \mathrm{d}s \int_0^\infty J_1(\lambda r)\, J_1(\lambda s)\, \mathrm{d}\lambda =$$

$$= -\, j\omega I_0 \,.\, 4\pi^2 \mu r_0 r \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r_0)\, J_1(\lambda r)\, \mathrm{d}\lambda\,.$$

V těchto rovnicích popisuje funkce $h(r)$ závislost proudové hustoty na poloměru r příslušného kruhového vlákna desky. Přejdeme-li k limitě pro $l \to +\infty$, přejde deska o poloměru l v nekonečnou tenkou vodivou desku. Za předpokladu existence příslušných nevlastních Riemannových integrálů dostaneme místo (18) soustavu

$$(19) \quad U_0 = R_0 I_0 + j\omega L_0 I_0 + j\omega \,.\, 4\pi^2 \mu v r_0 \int_0^\infty r\, h(r)\, \mathrm{d}r \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r_0)\, J_1(\lambda r)\, \mathrm{d}\lambda\,,$$

$$2\pi\gamma^{-1} r\, h(r) + j\omega \,.\, 4\pi^2 \mu v r \int_0^\infty s\, h(s)\, \mathrm{d}s \int_0^\infty J_1(\lambda r)\, J_1(\lambda s)\, \mathrm{d}\lambda =$$

$$= -\, j\omega I_0 \,.\, 4\pi^2 \mu r_0 r \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda r_0)\, J_1(\lambda r)\, \mathrm{d}\lambda\,.$$

Zavedeme bezrozměrové parametry

$$(20) \qquad \varrho = \frac{r}{r_0}\,, \quad \nu = \frac{v}{r_0}\,, \quad \tau = \lambda r_0\,, \quad \zeta = \frac{z}{r_0}\,, \quad \sigma = s r_0\,.$$

Po jejich dosazení do (19) dostaneme

$$(21) \qquad U_0 = R_0 I_0 + j\omega L_0 I_0 +$$

$$+\, j\omega \,.\, 4\pi^2 \mu \nu r_0^3 \int_0^\infty \sqrt{(\varrho)}\, h(\varrho r_0)\, \mathrm{d}\varrho \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau} J_1(\tau) \sqrt{(\tau)}\, J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, \mathrm{d}\tau\,,$$

$$\sqrt{(\varrho)}\, h(\varrho r_0) + j\omega \,.\, 2\pi\mu\nu\gamma r_0^2 \int_0^\infty \sqrt{(\sigma)}\, h(\sigma r_0)\, \mathrm{d}\sigma \int_0^\infty \frac{1}{\tau} J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, J_1(\tau\sigma) \sqrt{(\tau\sigma)}\, \mathrm{d}\tau =$$

$$= -\, j\omega I_0 \,.\, 2\pi\mu\gamma \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau} J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, J_1(\tau) \sqrt{(\tau)}\, \mathrm{d}\tau\,.$$

V soustavě (21) položíme

$$(22) \qquad \begin{aligned} T &= 2\pi\mu\nu\gamma r_0^2\,, \\ k_\zeta(\tau) &= j\omega T\tau^{-1}e^{-\xi\tau}\,, \\ f(\varrho) &= -\,\nu^{-1}r_0^{-2}I_0\int_0^\infty k_\zeta(\tau)\,J_1(\tau\varrho)\,\surd(\tau\varrho)\,J_1(\tau)\,\surd(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \\ \varphi(\varrho) &= \surd(\varrho)\,h(\varrho r_0)\,. \end{aligned}$$

Dostaneme tak soustavu

(23)

$$U_0 = R_0I_0 + j\omega L_0I_0 + 2\pi\gamma^{-1}r_0\int_0^\infty\varphi(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\int_0^\infty k_\zeta(\tau)\,J_1(\tau\varrho)\,\surd(\tau\varrho)\,J_1(\tau)\,\surd(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$\varphi(\varrho) + \int_0^\infty\varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\int_0^\infty k_0(\tau)\,J_1(\tau\varrho)\,\surd(\tau\varrho)\,J_1(\tau\sigma)\,\surd(\tau\sigma)\,\mathrm{d}\tau = f(\varrho)\,.$$

Zavedeme-li dále symetrická jádra $K_\zeta(\varrho, \sigma)$ vztahem

$$(24) \qquad K_\zeta(\varrho, \sigma) = \int_0^\infty k_\zeta(\tau)\,J_1(\tau\varrho)\,\surd(\tau\varrho)\,J_1(\tau\sigma)\,\surd(\tau\sigma)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

přejde soustava (23) do tvaru

$$(25) \qquad \begin{aligned} U_0 &= R_0I_0 + j\omega L_0I_0 + 2\pi\gamma^{-1}r_0\int_0^\infty K_\zeta(\varrho, 1)\,\varphi(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,, \\ &\varphi(\varrho) + \int_0^\infty K_0(\varrho, \sigma)\,\varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = f(\varrho)\,. \end{aligned}$$

Tato soustava má zvláště názorný význam. Zavedeme-li opět ΔZ rovnicí (4), dostáváme z prvé rovnice (25) vzorec pro přídavnou impedanci vzniklou zařazením desky do elektromagnetického pole kruhového vodiče indexu 0:

$$(26) \qquad \Delta Z = 2\pi\gamma^{-1}I_0^{-1}r_0\int_0^\infty K_\zeta(\varrho, 1)\,\varphi(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,.$$

K tomu, abychom mohli impedanci ΔZ vypočítat, musíme znát funkci $\varphi(\varrho)$, která je řešením integrální rovnice

$$(27) \qquad \varphi(\varrho) + \int_0^\infty K_0(\varrho, \sigma)\,\varphi(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma = f(\varrho)\,.$$

Řešení (27) a (26) se podstatně zjednoduší, přihlédneme-li ke vztahu (24) a provedeme-li záměnu integračního pořadí. Místo (26) a (27) dostaneme tak náhradní soustavu (viz (23))

$$(28) \qquad \Delta Z = 2\pi\gamma^{-1}I_0^{-1}r_0\int_0^\infty k_\varrho(\tau)\,J_1(\tau)\,\surd(\tau)\,\mathrm{d}\tau\int_0^\infty\varphi(\varrho)\,J_1(\tau\varrho)\,\surd(\tau\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,,$$

$$(29) \qquad \varphi(\varrho) + \int_0^\infty k_0(\tau)\, J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, d\tau \int_0^\infty \varphi(\sigma)\, J_1(\tau\sigma) \sqrt{(\tau\sigma)}\, d\sigma = f(\varrho)\,.$$

V následující kapitole se budeme podrobněji zabývat řešením integrálních rovnic typu (29).

KAPITOLA II. ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC HANKELOVOU TRANSFORMACÍ

§ 4. Hankelova transformace, její definice a vlastnosti

Nechť K je lineární prostor nad tělesem všech komplexních čísel, jehož vektory tvoří všechny komplexní funkce definované v $(0, +\infty)$, které jsou spojité, mají konvergentní Lebesgueův integrál v $(0, +\infty)$ a jejichž reálná a imaginární část má konečnou variaci v každém konečném intervalu, který je částí $(0, +\infty)$. Sčítání vektorů a násobení vektoru číslem je definováno jako sčítání resp. násobení funkcí.

Poznámka 1. Je-li $\alpha(t)$ omezená a spojitá komplexní funkce, jejíž reálná a imaginární část má konečnou variaci v každém konečném intervalu, který je částí $(0, +\infty)$, a je-li $\Phi(t) \in K$, pak je též $\alpha(t)\, \Phi(t) \in K$. Důkaz tohoto tvrzení dostaneme snadno, rozložíme-li $\alpha(t)\, \Phi(t)$ na složky a uvážíme, že součin vyhovuje předpokladu o spojitosti, konečné variaci a integrovatelnosti.

Speciálně z poznámky 1 plyne, že pro každé $t > 0$ a $\Phi(\tau) \in K$ je $\Phi(\tau)\, J_1(t\tau) \sqrt{(t\tau)} \in K$ a konverguje tedy integrál

$$\int_0^\infty \Phi(\tau)\, J_1(t\tau) \sqrt{(t\tau)}\, d\tau\,.$$

Tímto integrálem můžeme každé funkci $\Phi(t) \in K$ přiřadit jednoznačně komplexní funkci definovanou v $(0, +\infty)$, kterou označíme $H[\Phi(t)]$. Toto zobrazení je zřejmě lineární.

Obraz prostoru K v zobrazení H můžeme opět pokládat za lineární prostor, který označíme $H[K]$. Dá se ukázat, že pro každé $t > 0$ a každou funkci $\varphi(\tau) \in H[K]$ existuje opět (event. zobecněný) Lebesgueův integrál

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)\, J_1(t\tau) \sqrt{(t\tau)}\, d\tau\,,$$

který konverguje. Zavedeme-li pro tuto funkci stejné označení jako v předcházejícím případě, bude

$$H[\varphi(t)] = \int_0^\infty \varphi(\tau)\, J_1(t\tau) \sqrt{(t\tau)}\, d\tau\,.$$

Toto zobrazení je opět lineární. Obraz prostoru $H[K]$ v tomto zobrazení můžeme pokládat zase za lineární prostor, který označíme $H[H[K]]$. Zmíněná dvě lineární zobrazení prostoru K na $H[K]$ resp. $H[K]$ na $H[H[K]]$ budeme v dalším stručně nazývat Hankelova transformace. Ze zavedení je patrno, že je $H[0] = 0$.

Podle známé Hankelovy věty platí [1, 240]

$$H[H[\Phi(t)]] = \Phi(t) \tag{30}$$

pro všechny funkce $\Phi(t) \in K$. Je tedy $H[H[K]] = K$. Protože ke každé funkci $\varphi(t) \in H[K]$ existuje $\Phi(t) \in K$, takže platí $\varphi(t) = H[\Phi(t)]$, je tedy podle vzorce (30) $H[H[\varphi(t)]] = H[H[H[\Phi(t)]]] = H[\Phi(t)] = \varphi(t)$. Platí tedy

$$H[H[\varphi(t)]] = \varphi(t) \tag{31}$$

pro všechny funkce $\varphi(t) \in H[K]$.

Poznámka 2. Z Hankelovy věty plyne, že všechny úvahy obsažené v této kapitole, v nichž se využívá Hankelovy transformace, by se daly slovo za slovem přenést i na Hankelovu transformaci zprostředkovanou Besselovou funkcí $J_n(x)$ pro libovolné $n \geqq -\frac{1}{2}$.

Vztahy (28) a (29) můžeme nyní pomocí Hankelovy transformace přepsat takto:

$$\Delta Z = 2\pi\gamma^{-1} I_0^{-1} r_0 \, H[k_\zeta(1) \, H[\varphi(1)]] \,, \tag{32}$$

$$\varphi(\varrho) + H[k_0(\varrho) \, H[\varphi(\varrho)]] = f(\varrho) \,, \tag{33}$$

kde funkce $k_\zeta(\varrho), f(\varrho)$ a $\varphi(\varrho)$ mají význam podle (22).

§ 5. Věta o řešení integrálních rovnic

Věta. *Mějme lineární integrální rovnici*

$$\varphi(t) + H[k(t) \, H[\varphi(t)]] = f(t) \,, \tag{34}$$

kde je $f(t) \in H[K]$ a $[1 + k(t)]^{-1}$ je omezená a spojitá komplexní funkce, jejíž reálná a imaginární část má konečnou variaci v každém konečném intervalu, který je částí $(0, +\infty)$. Pak řešení této rovnice je dáno vzorcem

$$\varphi(t) = H[(1 + k(t))^{-1} \, H[f(t)]] \tag{35}$$

a je jediným řešením v $H[K]$.

Důkaz: I. *Důkaz existence.* Ukážeme především, že funkce daná vzorcem (35) existuje a je z $H[K]$. Podle předpokladu je $f(t) \in H[K]$ a tedy podle (30) je $H[f(t)] \in K$. Podle předpokladu věty vyhovuje funkce $(1 + k(t))^{-1}$ předpokladům pro funkci $\alpha(t)$ v Poznámce 1 z § 4 a je tedy

$$(1 + k(t))^{-1} \, H[f(t)] \in K \,. \tag{36}$$

Funkce $\varphi(t)$ daná vzorcem (35) tedy existuje a patří do $H[K]$. Musíme nyní dokázat, že funkce daná vzorcem (35) vyhovuje rovnici (34).

Protože je $\varphi(t) \in H[K]$, existuje $H[\varphi(t)]$ a podle vzorce (30) a (35) je

$$H[\varphi(t)] = H[H[(1 + k(t))^{-1} \, H[f(t)]]] = (1 + k(t))^{-1} \, H[f(t)] \,. \tag{37}$$

Ze vztahu (37) vypočteme $H[f(t)]$:

$$H[f(t)] = (1 + k(t))\, H[\varphi(t)]\,. \tag{38}$$

Odtud

$$H[f(t)] - H[\varphi(t)] = k(t)\, H[\varphi(t)]\,. \tag{39}$$

Z linearity Hankelovy transformace v $H[K]$ plyne

$$H[f(t) - \varphi(t)] = k(t)\, H[\varphi(t)]\,. \tag{40}$$

Protože je $f(t) - \varphi(t) \in H[K]$, plyne odtud s použitím vzorce (31) vztah

$$f(t) - \varphi(t) = H[k(t)\, H[\varphi(t)]]\,, \tag{41}$$

který je ekvivalentní rovnici (34). Tím jsme dokázali, že funkce $\varphi(t)$ daná vzorcem (35) je řešením rovnice (34).

II. *Důkaz jednoznačnosti.* Zbývá dokázat, že řešení (35) je jediné v $H[K]$. Nechť $\varphi(t)$, $\varphi^*(t)$ jsou dvě řešení rovnice (34) v $H[K]$. Potom platí

$$\begin{aligned} \varphi(t) + H[k(t)\, H[\varphi(t)]] &= f(t)\,, \\ \varphi^*(t) + H[k(t)\, H[\varphi^*(t)]] &= f(t)\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme

$$\varphi^*(t) = \varphi(t) + H[k(t)\, H[\varphi^*(t)]] - H[k(t)\, H[\varphi(t)]] = 0\,. \tag{43}$$

Z linearity Hankelovy transformace plyne postupně

$$\varphi^*(t) - \varphi(t) + H[k(t)\, H[\varphi^*(t)] - k(t)\, H[\varphi(t)]] = 0\,, \tag{44}$$

$$\varphi^*(t) - \varphi(t) + H[k(t)\, (H[\varphi^*(t)] - H[\varphi(t)])] = 0\,, \tag{45}$$

$$\varphi^*(t) - \varphi(t) + H[k(t)\, H[\varphi^*(t) - \varphi(t)]] = 0\,. \tag{46}$$

Ze vzorce (30) dostaneme

$$H[\varphi^*(t) - \varphi(t)] + k(t)\, H[\varphi^*(t) - \varphi(t)] = 0 \tag{47}$$

čili

$$(1 + k(t))\, H[\varphi^*(t) - \varphi(t)] = 0\,. \tag{48}$$

Protože však je pro všechna t $1 + k(t) \neq 0$, neboť jinak by došlo k porušení předpokladu o omezenosti $(1 + k(t))^{-1}$, plyne z (48)

$$H[\varphi^*(t) - \varphi(t)] = 0 \tag{49}$$

a tedy podle vzorce (31)

$$\varphi^*(t) - \varphi(t) = 0\,. \tag{50}$$

Tím je dokázána jednoznačnost řešení v $H[K]$.

§ 6. Výpočet proudové hustoty

K výpočtu proudové hustoty nám slouží rovnice (33). Abychom mohli použít věty z předcházejícího § 5, musíme si ověřit, zda funkce $f(\varrho)$ a funkce $h_0(\varrho)$ dané vzorci (22) vyhovují předpokladům platnosti této věty.

A. Podle (22) je

$$f(\varrho) = - \nu^{-1} r_0^{-2} I_0 \, H[k_\zeta(\varrho) \, J_1(\varrho) \sqrt{(\varrho)}] . \tag{51}$$

Aby bylo $f(\varrho) \in H[K]$, stačí tedy dokázat, že je

$$k_\zeta(\varrho) \, J_1(\varrho) \sqrt{(\varrho)} \in K . \tag{52}$$

Dosadíme-li do vztahu (52) za $k_\zeta(\varrho)$ z (22), máme dokázat, že je

$$j\omega T \, . \, \varrho^{-1} \mathrm{e}^{-\zeta\rho} \, J_1(\varrho) \sqrt{(\varrho)} \in K \tag{53}$$

neboli

$$\varrho^{-\frac{1}{2}} e^{-\zeta\rho} \, J_1(\varrho) \in K . \tag{54}$$

Tato funkce je dokonce reálná, je spojitá v $(0, +\infty)$ a má konečnou variaci v každém konečném intervalu, který je částí $(0, +\infty)$. K důkazu (54) zbývá ověřit konvergenci Lebesgueova integrálu

$$\int_0^\infty \varrho^{-\frac{1}{2}} e^{-\zeta\rho} \, J_1(\varrho) \, \mathrm{d}\varrho . \tag{55}$$

Za tímto účelem rozdělíme integrál na dva, a to

$$\int_0^1 \varrho^{-\frac{1}{2}} e^{-\zeta\rho} \, J_1(\varrho) \, \mathrm{d}\varrho , \quad \int_1^\infty \varrho^{-\frac{1}{2}} e^{-\zeta\rho} \, J_1(\varrho) \, \mathrm{d}\varrho . \tag{56}$$

Protože podle [8, 23] je

$$\lim_{\rho \to 0} \varrho^{-1} \, J_1(\varrho) = \tfrac{1}{2} ,$$

je

$$\lim_{\rho \to 0} \varrho^{-\frac{1}{2}} e^{-\zeta\rho} \, J_1(\varrho) = 0 ,$$

integrand prvního integrálu je omezená spojitá funkce a příslušný integrál tedy konverguje. Protože dále $J_1(\varrho) \sqrt{\varrho}$ je omezená funkce v intervalu $(0, +\infty)$, existuje $M > 0$, pro něž platí

$$|J_1(\varrho) \sqrt{\varrho}| \leqq M \tag{57}$$

a integrand druhého integrálu je možno majorisovat v intervalu $\langle 1, +\infty)$ takto:

$$|\varrho^{-\frac{1}{2}} e^{-\zeta\rho} \, J_1(\varrho)| = \varrho^{-1} e^{-\zeta\rho} |J_1(\varrho) \sqrt{\varrho}| \leqq M \, . \, e^{-\zeta\rho} . \tag{58}$$

Tím je dokázána i konvergence druhého integrálu (56). Je tedy

$$f(\varrho) \in H[K] .$$

B. Podle (22) je

$$k_0(\varrho) = j\omega T \varrho^{-1}$$

a tedy

(59) $$(1 + k_0(\varrho))^{-1} = \frac{\varrho}{\varrho + j\omega T} = \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + \omega^2 T^2} - j\omega T \frac{\varrho}{\varrho^2 + \omega^2 T^2} .$$

Ze vzorce (59) je patrno, že funkce $(1 + k_0(\varrho))^{-1}$ je omezená a spojitá komplexní funkce, jejíž reálná a imaginární část má konečnou variaci v každém konečném intervalu, který je částí $(0, +\infty)$.

Tím jsme dokázali, že také $k_0(\varrho)$ vyhovuje předpokladům věty § 5.

Smíme tedy užít vzorce (35) a dostaneme

(60) $$\varphi(\varrho) = H[(1 + k_0(\varrho))^{-1} H[f(\varrho)]] .$$

Ze vzorce (51) a (30) je

(61) $$H[f(\varrho)] = - \gamma^{-1} r_0^{-2} I_0 \, k_\zeta(\varrho) \, J_1(\varrho) \sqrt{\varrho} .$$

Dosadíme za $k_\zeta(\varrho)$ z (22) a dostaneme

(62) $$H[f(\varrho)] = - j\omega T v^{-1} r_0^{-2} I_0 \varrho^{-\frac{1}{2}} e^{-\zeta\rho} J_1(\varrho) .$$

Dosadíme-li dále ze vzorců (62) a (59) do (60), dostaneme

(63) $$\varphi(\varrho) = - j\omega T v^{-1} r_0^{-2} I_0 \, H\left[\frac{e^{-\zeta\rho}}{\varrho + j\omega T} J_1(\varrho) \sqrt{\varrho}\right] .$$

Odtud podle (22) je proudová hustota dána předpisem

(64) $$h(\varrho r_0) = - j\omega T v^{-1} r_0^{-2} I_0 \varrho^{-\frac{1}{2}} H\left[\frac{e^{-\zeta\rho}}{\varrho + j\omega T} J_1(\varrho) \sqrt{\varrho}\right] .$$

Vzorec (64) můžeme též přepsat v integrálním tvaru

(65) $$h(\varrho r_0) = - j\omega T v^{-1} r_0^{-2} I_0 \varrho^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau + j\omega T} J_1(\tau) \sqrt{(\tau)} \, J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)} \, d\tau .$$

§ 7. Výpočet přídavné impedance

K výpočtu přídavné impedance užijeme vzorce (32). Ze vzorce (63) vypočteme pomocí (30)

(66) $$H[\varphi(\tau)] = - j\omega T v^{-1} r_0^{-2} I_0 \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau + j\omega T} J_1(\tau) \sqrt{\tau} .$$

Dokážeme, že výraz

$$(67) \qquad k_\zeta(\tau)\, H[\varphi(\tau)] = \omega^2 T^2 \nu^{-1} r_0^{-2} I_0 \frac{\tau^{-1} e^{-2\zeta\tau}}{\tau + j\omega T} J_1(\tau) \sqrt{\tau}\,,$$

který jsme získali pomocí (22) a (66), patří do K. K tomu stačí ukázat, že je

$$(68) \qquad \frac{\tau^{-\frac{1}{2}} e^{-2\zeta\tau}}{\tau + j\omega T} J_1(\tau) \in K$$

neboli

$$(69) \qquad \frac{e^{-2\zeta\tau} J_1(\tau) \sqrt{\tau}}{\tau^2 + \omega^2 T^2} - j\omega T \frac{\tau^{-\frac{1}{2}} e^{-2\zeta\tau} J_1(\tau)}{\tau^2 + \omega^2 T^2} \in K\,.$$

Je zřejmo, že funkce je spojitá a její reálná a imaginární část má konečnou variaci v každém konečném intervalu, který je částí $(0, +\infty)$.

Zbývá dokázat, že konverguje Lebesgueův integrál této funkce v $(0, +\infty)$. Rozdělíme-li integrál na dva integrály, první od 0 do 1 a druhý od 1 do $+\infty$ a přihlédneme-li podobně jako v § 6 k tomu, že je $\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1} J_1(\tau) = \frac{1}{2}$, vidíme, že první integrál konverguje. Konvergence druhého integrálu plyne, užijeme-li vzorce (57), z této majorisace v $\langle 1, +\infty)$:

$$(70) \qquad \left| \frac{e^{-2\zeta\tau} J_1(\tau) \sqrt{\tau}}{\tau^2 + \omega^2 T^2} \right| = \frac{e^{-2\zeta\tau}}{\tau^2 + \omega^2 T^2} \left| J_1(\tau) \sqrt{\tau} \right| \leqq \frac{M}{1 + \omega^2 T^2} e^{-2\zeta\tau}\,,$$

$$\left| - \omega T \frac{\tau^{-\frac{1}{2}} e^{-2\zeta\tau} J_1(\tau)}{\tau^2 + \omega^2 T^2} \right| = \frac{\omega T e^{-2\zeta\tau}}{\tau(\tau^2 + \omega^2 T^2)} \left| J_1(\tau) \sqrt{\tau} \right| \leqq \frac{M \omega T}{1 + \omega^2 T^2} e^{-2\zeta\tau}\,.$$

Odtud plyne platnost (69) resp. (68) a existuje proto podle (67)

$$(71) \qquad H[k_\zeta(\tau)\, H[\varphi(\tau)]] = \omega^2 T^2 \nu^{-1} r_0^{-2} I_0\, H \left[\frac{\tau^{-1} e^{-2\zeta\tau}}{\tau + j\omega T} J_1(\tau) \sqrt{\tau} \right].$$

Odtud máme

$$(72) \qquad H[k_\zeta(1)\, H[\varphi(1)]] = \omega^2 T^2 \nu^{-1} r_0^{-2} I_0 \int_0^\infty \frac{e^{-2\zeta\tau} J_1^2(\tau)}{\tau + j\omega T} \,\mathrm{d}\tau$$

a podle (32) je tedy přídavná impedance

$$(73) \qquad \Delta Z = 2\pi\omega^2 T^2 \nu^{-1} r_0^{-1} \gamma^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-2\zeta\tau} J_1^2(\tau)}{\tau + j\omega T} \,\mathrm{d}\tau\,.$$

Dosadíme-li z (22) za T, dostaneme po úpravě koeficientu

$$(74) \qquad \Delta Z = 4\pi^2 \omega^2 T r_0 \mu \int_0^\infty \frac{e^{-2\zeta\tau} J_1^2(\tau)}{\tau + j\omega T} \,\mathrm{d}\tau\,.$$

Zavedeme-li podobně jako v § 1 nebo § 2

$$\Delta R = \mathrm{Re}\,(\Delta Z)\,, \quad \Delta L = \frac{1}{\omega}\,I(\Delta Z)\,, \tag{75}$$

dostaneme ze (74)

$$\Delta R = 4\pi^2\omega^2 T r_0 \mu \int_0^\infty \frac{e^{-2\zeta\tau}\, J_1^2(\tau)\, \tau}{\tau^2 + \omega^2 T^2}\, \mathrm{d}\tau \tag{76}$$

a

$$\Delta L = -\, 4\pi^2\omega^2 T^2 r_0 \mu \int_0^\infty \frac{e^{-2\zeta\tau}\, J_1^2(\tau)}{\tau^2 + \omega^2 T^2}\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{77}$$

§ 8. Asymptotický rozvoj

Porovnáním výsledků (65) a (74) dojdeme k závěru, že praktický výpočet proudové hustoty a přídavné impedance se redukuje na výpočet integrálu

$$L_\zeta(\varrho, \sigma) = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau(\tau + j\omega T)}\, J_1(\varrho\tau) \sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau) \sqrt{(\sigma\tau)}\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{78}$$

Podle (65) je pak

$$h(\varrho r_0) = j\omega T v^{-1} r_0^{-2} I_0 \varrho^{-\frac{1}{2}}\, \frac{\partial L_\zeta(\varrho, 1)}{\partial\zeta} \tag{79}$$

a podle (74) je

$$\Delta Z = 4\pi^2\omega^2 T r_0 \mu\, L_{2\zeta}(1,1)\,. \tag{80}$$

Dokážeme nyní, že integrál (78) je možno vyjádřit pro $\omega T \to +\infty$ asymptotickým rozvojem

$$L_\zeta(\varrho, \sigma) \approx \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j\omega T}\right)^k \frac{\partial^k M_\zeta(\varrho, \sigma)}{\partial\zeta^k}\right] \frac{1}{j\omega T}\,, \tag{81}$$

kde

$$M_\zeta(\varrho, \sigma) = \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau}\, J_1(\varrho\tau) \sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau) \sqrt{(\sigma\tau)}\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{82}$$

Zřejmě pro $\zeta > 0$ je

$$\frac{\partial^k M_\zeta(\varrho, \sigma)}{\partial\zeta^k} = \int_0^\infty \frac{(-\tau)^k\, e^{-\zeta\tau}}{\tau}\, J_1(\varrho\tau) \sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau) \sqrt{(\sigma\tau)}\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{83}$$

Pro n-tý částečný součet rozvoje (81) dostaneme po dosazení z (83)

$$^{n}L_\zeta(\varrho, \sigma) = \frac{1}{j\omega T} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{j\omega T}\right)^k \int_0^\infty \frac{(-\tau)^k\, e^{-\zeta\tau}}{\tau}\, J_1(\varrho\tau) \sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau) \sqrt{(\sigma\tau)}\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{84}$$

Odtud

$$(85) \qquad {}^{n}L_\zeta(\varrho, \sigma) = \frac{1}{j\omega T} \int_0^\infty \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau} J_1(\varrho\tau)\sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau)\sqrt{(\sigma\tau)}\,\mathrm{d}\tau \,.\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-\tau}{j\omega T}\right)^k$$

a tedy

$$(86) \qquad {}^{n}L_\zeta(\varrho, \sigma) = \int_0^\infty \frac{1 - \left(\dfrac{-\tau}{j\omega T}\right)^n}{j\omega T + \tau} \,.\, \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau} J_1(\varrho\tau)\sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau)\sqrt{(\sigma\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Zřejmě je podle (86) a (78)

$$(87) \qquad {}^{n}L_\zeta(\varrho, \sigma) - L_\zeta(\varrho, \sigma) = -\int_0^\infty \frac{\left(\dfrac{j\tau}{\omega T}\right)^n e^{-\zeta\tau}}{\tau(\tau + j\omega T)} J_1(\varrho\tau)\sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau)\sqrt{(\sigma\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Je tedy

(88)

$$(\omega T)^n \left|{}^{n}L_\zeta(\varrho, \sigma) - L_\zeta(\varrho, \sigma)\right| = \left|\int_0^\infty \frac{\tau^n e^{-\zeta\tau}}{\tau(\tau + j\omega T)} J_1(\varrho\tau)\sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau)\sqrt{(\sigma\tau)}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq$$

$$\leqq M^2 \int_0^\infty \frac{\tau^{n-1} e^{-\varrho\tau}}{\tau^2 + \omega^2 T^2}\,\mathrm{d}\tau \leqq \frac{M^2}{\omega^2 T^2} \int_0^\infty \tau^{n-1} e^{-\zeta\tau}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Odtud plyne, že je

$$(89) \qquad \lim_{\omega T \to +\infty} (\omega T)^n \left|{}^{n}L_\zeta(\varrho, \sigma) - L_\zeta(\varrho, \sigma)\right| = 0$$

a tedy platí vztah (81).

Význam rozvoje (81) tkví mezi jiným v tom, že jsou v něm odděleny výrazy obsahující čistě geometrické údaje (83) a údaje geometricko-fyzikální $[(1/j\omega T)^k]$.

Ukážeme použití rozvoje (81) k aproximaci přídavné impedance. V první aproximaci je podle (81)

$$(90) \qquad L_\zeta(\varrho, \sigma) \approx \frac{1}{j\omega T} M_\zeta(\varrho, \sigma)$$

a tedy podle (80) je

$$(91) \qquad \Delta Z \approx -4\pi^2 j\omega r_0 \mu\, M_{2\zeta}(1, 1)\,.$$

Užijeme-li vzorce (82), dostaneme

$$(92) \qquad \Delta Z \approx -4\pi^2 j\omega r_0 \mu \int_0^\infty e^{-2\zeta\tau} J_1^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Podle (75) je

$$(93) \qquad \Delta R \approx 0 \quad \text{a} \quad \Delta L \approx -4\pi^2 r_0 \mu \int_0^\infty e^{-2\zeta\tau} J_1^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Vrátíme-li se podle (20) k rozměrovým veličinám, je

$$\Delta L \approx -\ 4\pi^2 r_0^2 \mu \int_0^\infty e^{-2z\lambda}\ J_1^2(\lambda r_0)\ \mathrm{d}\lambda\ . \tag{94}$$

Srovnáním se vzorcem (11) snadno nahlédneme, že přídavná impedance desky v prvé asymptotické aproximaci má stejnou velikost, jako kdybychom místo desky zařadili do elektromagnetického pole koaxiálně kruhový vodič téže velikosti jako vodič indexu 0 ve vzdálenosti $2z$, kterým by protékal proud téže velikosti, ale opačného smyslu (tzv. zrcadelný obraz). Ze vzorce pro T (20) plyne, že asymptotická rovnost přejde ve skutečnou rovnost např. pro nekonečně vodivou desku.

Abychom určili další členy rozvoje (81), stačí uvážit, že podle (82), (11) a (6) platí

$$M_\zeta(\varrho, \sigma) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)F(k) - \frac{2}{k}\,E(k)\right], \tag{95}$$

kde podle (7) je

$$k = \frac{2\sqrt{(\varrho\sigma)}}{\sqrt{[\zeta^2 + (\varrho + \sigma)^2]}} \tag{96}$$

a $F(k)$, $E(k)$ jsou dány vzorci (8). Abychom skutečně vyčíslili hodnoty $[\partial^2 M_\zeta(\varrho, \sigma)]/\partial\zeta^k$, užijeme vzorce (95) a známých vzorců pro derivaci eliptických funkcí

$$F'(k) = \frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{F(k)}{k}\,,\ E'(k) = \frac{E(k) - F(k)}{k}\,. \tag{97}$$

Tak např.

$$\frac{\partial M_\zeta(\varrho, \sigma)}{\partial\zeta} = \frac{1}{\pi}\frac{\partial k}{\partial\zeta}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)F(k) + \frac{2}{k^2}\,E(k)\right]' = -\frac{1}{\pi}\,k\,\frac{\zeta}{\zeta^2 + (\varrho + \sigma)^2}\,.$$

$$\cdot\left[-\left(\frac{2}{k^2} + 1\right)F(k) + \left(\frac{2}{k} - k\right)\left(\frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{F(k)}{k}\right) + \frac{2}{k^2}\,E(k) - \frac{2}{k}\,\frac{E(k) - F(k)}{k}\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,k\,\frac{\zeta}{\varrho^2 + (\varrho + \sigma)^2}\left[\left(-\frac{2}{k^2} - 1 - \frac{2}{k^2} + 1 + \frac{2}{k^2}\right)F(k) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{k^2(1 - k^2)} - \frac{1}{1 - k^2} + \frac{2}{k^2} - \frac{2}{k^2}\right)E(k)\right] =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\,k\,\frac{\zeta}{\zeta^2 + (\varrho + \sigma)^2}\left(-\frac{2}{k^2}\,F(k) + \frac{2 - k^2}{k^2(1 - k^2)}\,E(k)\right) =$$

$$= \frac{\zeta k}{4\pi\varrho\sigma}\left(2\,F(k) - \frac{2 - k^2}{1 - k^2}\,E(k)\right).$$

Podobně postupujeme při výpočtu derivací vyšších řádů.

Jinou souvislost mezi integrály (78) a (82), než je vzorec (81), ukazuje vztah

$$L_{\zeta_1}(\varrho, \sigma) = e^{j\omega T\zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\infty} e^{-j\omega T\zeta} M_\zeta(\varrho, \sigma)\, d\zeta\,, \tag{99}$$

který nám umožňuje nahradit v jistém smyslu vodivou desku nekonečným kruhovým válcem. Pro praktické účely je však výhodnější asymptotický rozvoj (81).

Použitá literatura

[1] *E. C. Titchmarsh*: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford 1948.
[2] *V. Jarník*: Diferenciální počet, NČSAV, Praha 1953.
[3] *V. Jarník*: Integrální počet II, NČSAV, Praha 1955.
[4] *J. Hak*: Eisenlose Drosselspulen, K. F. Koehler Verlag, Leipzig 1938.
[5] *V. Petržílka, M. Šafrata*: Elektřina a magnetismus, Praha.
[6] *F. Ollendorf*: Die Rückwirkung flächenhafter Leiter auf das magnetische Feld von Spulen, E. N. T. 1929, Band 6, Heft 12, 479—500.
[7] *E. Langer*: Rozlišování materiálů a zjišťování trhlin indukční methodou, Elektrotechn. svaz československ., Praha 1947.
[8] *A. Grey, G. B. Mathews*: A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics, 1931, ruský překlad Moskva 1953.
[9] *V. A. Ditkin, P. I. Kuzněcov*: Příručka operátorového počtu. Základy theorie a tabulky operátorů. Překlad z ruštiny, NČSAV, Praha 1954.

Резюме

О ВЛИЯНИИ ТОНКОЙ ПЛОСКОСТНОЙ ПЛАСТИНКИ НА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ КОЛЬЦЕВОГО ПРОВОДНИКА

МИЛОШ ЛАНСКИ (Miloš Lánský)

Показывается, что добавочный импеданс ΔZ кольцевого проводника, в поле которого была параллельно всунута тонкая плоскостная проводящая пластинка, определяется формулой

$$\Delta Z = 2\pi\gamma^{-1} I_0^{-1} r_0 \int_0^{+\infty} k_\rho(\tau)\, J_1(\tau) \sqrt{(\tau)}\, d\tau \int_0^{+\infty} \varphi(\varrho)\, J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, d\varrho\,, \tag{1}$$

где $\varphi(\varrho)$ является решением интегрального уравнения

$$\varphi(\varrho) + \int_0^{+\infty} k_0(\tau)\, J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, d\tau \int_0^{+\infty} \varphi(\sigma)\, J_1(\tau\sigma) \sqrt{(\tau\sigma)}\, d\sigma = f(\varrho)\,. \tag{2}$$

В этих выражениях

$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\mu\nu\gamma r_0^2,\\
k_\rho(\tau) &= j\omega T\tau^{-1}e^{-\rho\tau},\\
\varphi(\varrho) &= \sqrt{(\varrho)}\, h(\varrho r_0),\\
f(\varrho) &= -\,\nu^{-1}r_0^{-2}I_0\int_0^{+\infty} k_\zeta(\tau)\, J_1(\tau\varrho)\sqrt{(\tau\varrho)}\, J_1(\tau)\sqrt{(\tau)}\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned}
$$

с безразмерными параметрами

$$\nu = \frac{v}{r_0}, \qquad \zeta = \frac{z}{r_0},$$

где примененные символы имеют следующее значение:

γ — удельная проводимость пластинки,
I_0 — временный вектор тока в кольцевом проводнике,
r_0 — радиус кольцевого проводника,
j — мнимая единица,
ω — угловая частота переменного напряжения, приводимого на кольцевой проводник,
μ — магнитная проницаемость материала,
v — толщина пластинки,
$J_1(\tau)$ — функция Бесселя первого рода с индексом 1,
$h(r)$ — плотность тока, индуцированного в пластинке на расстоянии r от оси кольцевого проводника,
z — перпендикулярное расстояние пластинки от кольцевого проводника.

Пусть K — линейное пространство комплексных чисел, векторы которого образуют все комплексные функции, определенные в $(0, +\infty)$, которые непрерывны и обладают сходящимся в $(0, +\infty)$ интегралом Лебега и действительная и мнимая часть которых имеет конечное изменение во всяком конечном промежутке, являющемся частью $(0, +\infty)$. Сложение векторов и умножение вектора на число определяется как сложение или умножение функций. Линейное отображение функций $\Phi(\tau) \in K$ в множество комплексных функций $\varphi(t)$ одного действительного переменного, определенное формулой

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \Phi(\tau)\, J_1(t\tau)\sqrt{(t\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

ограничивает пространство образов $H[K]$. Пишем

$$H[\Phi(t)] = \varphi(t)\,.$$

Аналогично можно этой формулой всякой функции $\varphi(t) \in H[K]$ сопоставить

$$\Phi(\tau) \in K\,.$$

Отображение H в этих двух значениях называется преобразованием Ганкеля. Для этого преобразования верна фундаментальная теорема Ганкеля:

$$H[H[\Phi(\tau)]] = \Phi(\tau) \in K$$

или

$$H[H[\varphi(t)]] = \varphi(t) \in H[K].$$

В настоящей статье доказывается следующая

Теорема. *Имеем линейное интегральное уравнение*

$$\varphi(t) + H[k(t)\, H[\varphi(t)]] = f(t),$$

где

$$f(t) \in H[K] \quad \text{и} \quad [1 + k(t)]^{-1}$$

ограниченная и непрерывная комплексная функция, действительная и мнимая часть которой имеет конечное изменение во всяком конечном промежутке, являющемся частью $(0, +\infty)$. *Тогда решение того уравнения определено формулой*

$$\varphi(t) = H[(1 + k(t))^{-1}\, H[f(t)]]$$

и является единственным решением в $H[K]$.

Уравнение (2) можем с помощью преобразования Ганкеля переписать в виде

$$\varphi(\varrho) + H[k_0(\varrho)\, H[\varphi(\varrho)]] = f(\varrho).$$

Так как физические предположения согласованы с условием верности выше указанной теоремы, это уравнение имеет в $H[K]$ единственное решение

$$(2') \qquad \varphi(\varrho) = -j\omega T v^{-1} r_0^{-2} I_0\, H\left[\frac{e^{-\zeta\rho}}{\varrho + j\omega T}\, J_1(\varrho)\sqrt{\varrho}\right].$$

Так как отношение (1) можно выразить тоже с помощью преобразования Ганкеля, верна формула

$$(1') \qquad \Delta Z = 2\pi\gamma^{-1} I_0^{-1} r_0\, H[k_\zeta(1)\, H[\varphi(1)]].$$

С помощью подстановки из (1') в (2') получаем

$$\Delta Z = 4\pi^2\omega^2 T r_0 \mu \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\zeta\tau}\, J_1^2(\tau)}{\tau + j\omega T}\, d\tau.$$

Для применения результата надо знать функции типа

$$L_\zeta(\varrho, \sigma) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau(\tau + j\omega T)}\, J_1(\varrho\tau)\sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau)\sqrt{(\sigma\tau)}\, d\tau,$$

для которых годен асимптотический ряд

$$L_\zeta(\varrho, \sigma) \approx \frac{1}{j\omega T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j\omega T}\right)^k \frac{\partial^k M_\zeta(\varrho, \sigma)}{\partial \zeta^k},$$

где

$$M_\zeta(\varrho, \sigma) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right) F(k) - \frac{2}{k} E(k)\right].$$

Здесь

$$k = \frac{2\sqrt{\varrho\sigma}}{\sqrt{(\zeta^2 + (\varrho + \sigma)^2)}}$$

и $F(k)$, $E(k)$ суть эллиптические интегралы первого и второго рода.

Summary

ON THE INFLUENCE OF A THIN SLAB ON THE ELECTROMAGNETIC FIELD OF A CIRCULAR CONDUCTOR

MILOŠ LÁNSKÝ

The additional impedance ΔZ of a circular conductor in the field of which there is introduced a parallel-plane thin conductive slab, is expressed by the formula

$$\text{(1)} \qquad \Delta Z = 2\pi\gamma^{-1} I_0^{-1} r_0 \int_0^{+\infty} k_\rho(\tau)\, J_1(\tau) \sqrt{(\tau)}\, \mathrm{d}\tau \int_0^{+\infty} \varphi(\varrho)\, J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, \mathrm{d}\varrho\,,$$

where $\varphi(\varrho)$ represents a solution of the integral equation

$$\text{(2)} \qquad \varphi(\varrho) + \int_0^{+\infty} k_0(\tau)\, J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, \mathrm{d}\tau \int_0^{+\infty} \varphi(\sigma)\, J_1(\tau\sigma) \sqrt{(\tau\sigma)}\, \mathrm{d}\sigma = f(\varrho)\,.$$

Here

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\mu\nu\gamma r_0^2\,, \\ k_\rho(\tau) &= j\omega T \tau^{-1} e^{-\rho\tau}\,, \\ \varphi(\varrho) &= \sqrt{(\varrho)}\, h(\varrho r_0)\,, \\ f(\varrho) &= -\nu^{-1} r_0^{-2} I_0 \int_0^{+\infty} k_\zeta(\tau)\, J_1(\tau\varrho) \sqrt{(\tau\varrho)}\, J_1(\tau) \sqrt{(\tau)}\, \mathrm{d}\tau\,, \end{aligned}$$

with dimensionless parameters

$$\nu = \frac{v}{r_0}\,, \quad \zeta = \frac{z}{r_0}\,,$$

where the symbols used denote, respectively,

γ – the specific conductivity of the slab,
I_0 – the time vector of the current in the circular conductor,
r_0 – the radius of the circular conductor,

j – the imaginary unit,
ω – the angular frequency of the harmonic voltage on the circular conductor,
μ – the magnetic permeability,
v – the thickness of the slab,
$J_1(\tau)$ – the Bessel function of order 1 and index 1,
$h(r)$ – the density of the current induced in the slab at distance r from the axis of the circular conductor,
z – the distance of the slab from the circular conductor.

Let K be a linear space over the field of all complex numbers, consisting of all complex functions defined on $(0, +\infty)$, continuous and with a convergent Lebesgue integral in $(0, +\infty)$, and whose real and imaginary parts have finite variation in every finite subinterval of $(0, +\infty)$. The addition of vectors and the multiplication of a vector by scalar is defined in the same manner as for functions.

A linear mapping of $\Phi(\tau) \in K$ into the set of complex functions $\varphi(t)$ of one real variable defined by the formula

$$\varphi(t) = \int_0^{+\infty} \Phi(\tau)\, J_1(t\tau) \sqrt{(t\tau)}\, d\tau$$

determines the space of the maps $H[K]$. We write

$$H[\Phi(t)] = \varphi(t) .$$

In a similar way it is possible to map each function

$$\varphi(t) \in H[K] \quad \text{onto} \quad \Phi(\tau) \in K$$

using the above formula. The mapping H used in these two connexions is called Hankel's transformation. By the well known Hankel's theorem there is

$$H[H[\Phi(\tau)]] = \Phi(\tau) \in K$$

or

$$H[H[\varphi(t)]] = \varphi(t) \in H[K]$$

respectively.

In this article the following theorem is proved:

Theorem. *Consider a linear integral equation*

$$\varphi(t) + H[k(t)\, H[\varphi(t)]] = f(t) ,$$

where

$$f(t) \in H[K]$$

and $[1 + k(t)]^{-1}$ *is a bounded continuous complex function, whose real and imaginary parts have finite variation in each finite subinterval of* $(0, +\infty)$. *Then the solution of this equation is given by the formula*

$$\varphi(t) = H[(1 + k(t))^{-1}\, H[f(t)]]$$

and represents the unique solution in $H[K]$.

The equation (2) can be written by means of Hankel's transformation in the form

$$\varphi(\varrho) + H[k_0(\varrho)\, H[\varphi(\varrho)]] = f(\varrho)\,.$$

Physical assumptions agree with the conditions of applicability of the above theorem and therefore this equation has a unique solution in $H[K]$,

$$(2') \qquad \varphi(\varrho) = -\, j\omega T v^{-1} r_0^{-2} I_0 H \left[\frac{e^{-\zeta\rho}}{\varrho + j\omega T}\, J_1(\varrho) \sqrt{\varrho} \right].$$

As the relation (1) can also be expressed by means of Hankel's transformation

$$(1') \qquad \Delta Z = 2\pi\gamma^{-1} I_0^{-1} r_0\, H\, [k_\zeta(1)\, H[\varphi(1)]]\,,$$

we obtain on substituting from (1') into (2') and after slight modifications

$$\Delta Z = 4\pi^2\omega^2 T r_0 \mu \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\zeta\tau}\, J_1^2(\tau)}{\tau + j\omega T}\, d\tau\,.$$

The result shows the necessity of studying functions of the type

$$L_\zeta(\varrho, \sigma) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\zeta\tau}}{\tau(\tau + j\omega T)}\, J_1(\varrho\tau) \sqrt{(\varrho\tau)}\, J_1(\sigma\tau) \sqrt{(\sigma\tau)}\, d\tau\,,$$

for which the following asymptotic expansion is valid:

$$L_\zeta(\varrho, \sigma) \approx \frac{1}{j\omega T} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{j\omega T} \right)^k \frac{\partial^k M_\zeta(\varrho, \sigma)}{\partial \zeta^k}\,.$$

Here

$$M_\zeta(\varrho, \sigma) = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) F(k) - \frac{2}{k}\, E(k) \right],$$

where k is given by

$$k = \frac{2\sqrt{\varrho\sigma}}{\sqrt{(\zeta^2 + (\varrho + \sigma)^2)}}$$

and $F(k)$, $E(k)$ are elliptic integrals of the first and second type respectively.

Adresa autora: Dr. *Miloš Lánský* C.Sc., Pedagogický institut, tř. Jednotných odborů 11, Karlovy Vary.