

# Aplikace matematiky

---

Vladimír Fiřt

O vlastním kmitání oblouku a patrových ráků v rovině a prostoru

*Aplikace matematiky*, Vol. 8 (1963), No. 1, 1-29

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102835>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

O VLASTNÍM KMITÁNÍ OBLOUKŮ A PATROVÝCH RÁMŮ  
V ROVINĚ A PROSTORU

VLADIMÍR FIŘT

(Došlo dne 31. října 1961.)

Funkce kmitočtu, jejichž lineární kombinace tvoří koeficienty při neznámých v deformačních rovnicích, jsou nahrazeny aproximativními funkcemi. Jest využito specifických vlastností těchto funkcí k podstatnému zjednodušení řešení zejména složitějších úloh — určení vlastních frekvencí oblouků a patrových ráků rovinných i prostorových.

ZÁKLADNÍ OZNAČENÍ<sup>1)</sup>

$E$	— modul pružnosti materiálu v tahu (tlaku) $[\text{tm}^{-2}]$ ,
$J$	— moment setrvačnosti průřezu v jedné z hlavních rovin setrvačnosti prutu $[\text{m}^4]$ ,
$l$	— délka prutu $[\text{m}]$ ,
$i = EJ/l$	— tuhost prutu v ohybu $[\text{tm}]$ ,
$p$	— rovnoměrné zatížení prutu $[\text{tm}^{-1}]$ ,
$g$	— gravitační zrychlení $[\text{ms}^{-2}]$ ,
$\mu = p/g$	— hmota na jednotku délky $[\text{tm}^{-2}\text{s}^2]$ ,
$\omega$	— kruhová frekvence $[\text{s}^{-1}]$ ,
$P$	— plocha průřezu $[\text{m}^2]$ ,
$G$	— modul pružnosti materiálu ve smyku $[\text{tm}^{-2}]$ ,
$I_u$	— moment tuhosti průřezu k ose prutu $U$ $[\text{m}^4]$ ,
$GI_u$	— tuhost prutu v kroucení $[\text{tm}^2]$ ,
$\chi$	— hmotný moment setrvačnosti na jednotku délky $[\text{ts}^2]$ ,
$\lambda, \psi, \vartheta$	— bezrozměrné veličiny podle (1.2), (1.3) a (1.7),
$i_0$	— poloměr setrvačnosti průřezu $[\text{m}]$ ,
$l_0(f_0)$	— rozpětí (vzepětí) oblouku $[\text{m}]$ ,
$u, v, x, y, z$	— amplitudy složek posunu průřezu ve směru os $U, V, X, Y, Z$ ,
$\gamma(M)$	— amplituda pootočení průřezu (ohybového momentu),
$U, V, X, Y, Z$	— amplitudy sil ve směru os $U, V, X, Y, Z$ ,

<sup>1)</sup> Až na malé výjimky zachováváme označení stejné jako v knize [1].

- $F_j, j = 1, 2, \dots, 12, f_i, i = 1, 2, 3, 4$  – funkce kmitočtu,  
 $c, k$  – konstanty prutu podle (2.8),  
 $m$  – soustředěná hmota [ $\text{tm}^{-1}\text{s}^2$ ],  
 $i_m$  – poloměr setrvačnosti hmoty  $m$  [m],  
 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  – čtvercové matice,  
 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{q}, \mathbf{v}$  – vektory,  
 $\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$  – vektor rychlosti, vektor zrychlení,  
 $\mathbf{a}$  – řádková matice,  
 $\mathbf{I}$  – jednotková matice.

### 1. KMITÁNÍ PŘÍČNÉ, PODÉLNÉ A KROUTIVÉ

Dříve než přistoupíme k vyšetřování vlastního kmitání celých prutových soustav, a to rovinných i prostorových, všimněme si tří základních druhů harmonického kmitání prutu – příčného, podélného a kroutivého.

Uvažujme prut  $g - h$  konstantního průřezu kmitající v jedné z jeho hlavních rovin setrvačnosti. Označme kladný smysl koncových sil a momentů podle obr. 1a a kladný smysl složek deformací podle obr. 1b. Je-li prut podél své osy zatížen rovnoměrným zatížením  $p = \mu g$  a zanedbáme-li útlum, vliv smyku, otáčení prvků a případné osově statické síly, pak mezi amplitudami koncových sil a momentů a amplitudami složek deformací platí tyto vztahy<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad M_{g,h} &= t \left( -F_4 \frac{v_g}{l} - F_3 \frac{v_h}{l} + F_2 \gamma_g + F_1 \gamma_h \right), \\
 V_{g,h} &= \frac{t}{l} \left( F_6 \frac{v_g}{l} + F_5 \frac{v_h}{l} - F_4 \gamma_g + F_3 \gamma_h \right), \\
 U_{g,h} &= \frac{EP}{l} (f_1 u_g - f_2 u_h), \\
 M_{h,g} &= t \left( F_3 \frac{v_g}{l} + F_4 \frac{v_h}{l} + F_1 \gamma_g + F_2 \gamma_h \right), \\
 V_{h,g} &= \frac{t}{l} \left( F_5 \frac{v_g}{l} + F_6 \frac{v_h}{l} - F_3 \gamma_g + F_4 \gamma_h \right), \\
 U_{h,g} &= \frac{EP}{l} (-f_2 u_g + f_1 u_h),
 \end{aligned}$$

kde  $F_j = F_j(\lambda)$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ , jsou funkce parametru

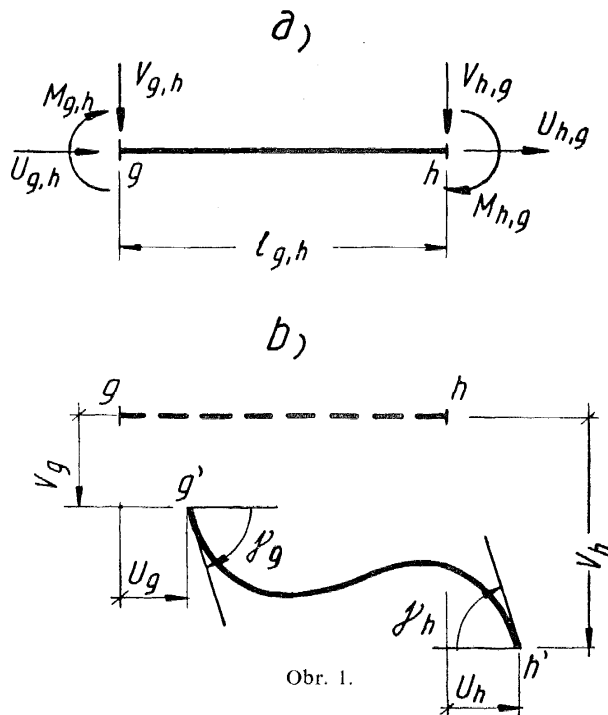
$$(1.2) \quad \lambda = l \sqrt[4]{\left( \frac{\mu \omega^2}{EJ} \right)}$$

<sup>2)</sup> Viz [1], str. 24 a tab. A, B na str. 234–237.

a  $f_1, f_2$  jsou funkce parametru

$$(1.3) \quad \psi = l \sqrt{\left(\frac{\mu\omega^2}{EP}\right)}:$$

$$(1.4) \quad f_1 = \psi \cotg \psi, \quad f_2 = \psi \operatorname{cosec} \psi.$$



V případě, že je prut na levém konci  $g$  připojen kloubově, lze použitím podmínky  $M_{g,h} = 0$  eliminovat z rovnic (1.1) úhel  $\gamma_g$ . Pak platí

$$(1.5) \quad V_{g,h} = \frac{t}{l} \left( F_{12} \frac{v_g}{l} + F_{10} \frac{v_h}{l} + F_8 \gamma_h \right),$$

$$M_{h,g} = t \left( F_8 \frac{v_g}{l} + F_9 \frac{v_h}{l} + F_7 \gamma_h \right),$$

$$V_{h,g} = \frac{t}{l} \left( F_{10} \frac{v_g}{l} + F_{11} \frac{v_h}{l} + F_g \gamma_h \right),$$

kde  $F_j = F_j(\lambda)$ ,  $j = 7, 8, \dots, 12$ , jsou opět funkce parametru  $\lambda$ . Pro amplitudy  $U_{g,h}$  a  $U_{h,g}$  zůstávají v platnosti vztahy (1.1).

Nastane-li kroutivé kmitání prutu, pak platí<sup>3)</sup>

$$(1.6) \quad M_{g,h}^u = \frac{GI_u}{l} (f_3 \gamma_g^u - f_4 \gamma_h^u),$$

$$M_{h,g}^u = \frac{GI_u}{l} (-f_4 \gamma_g^u + f_3 \gamma_h^u),$$

kde  $f_3, f_4$  jsou funkce parametru

$$(1.7) \quad \vartheta = l \sqrt{\left( \frac{\chi \omega^2}{GI_u} \right)}:$$

$$(1.8) \quad f_3 = \vartheta \cotg \vartheta, \quad f_4 = \vartheta \operatorname{cosec} \vartheta.$$

Ve vztazích (1.6) označují  $M_{g,h}^u, M_{h,g}^u$  amplitudy koncových momentů, jejichž kladný smysl je souhlasný s kladným smyslem amplitud  $\gamma_g^u, \gamma_h^u$  pootočení konců prutu kolem jeho podélné osy  $U$ . Tento kladný smysl je zvolen tak, abychom otáčení viděli ve smyslu ručiček hodinových, díváme-li se v kladném smyslu osy  $U$  (obr. 1a).

Vztahy (1.1), (1.5) a (1.6) platí za předpokladu, že deformace prutu jsou malé a pružné. Z tohoto předpokladu budeme stále vycházet.

## 2. APROXIMACE FUNKCÍ KMITOČTU PŘI MALÝCH HODNOTÁCH PARAMETRU $\lambda$

Funkce kmitočtu  $F_j, j = 1, 2, \dots, 12$ , a  $f_i, i = 1, 2, 3, 4$ , vyskytující se ve vztazích (1.1), (1.5) a (1.6) lze při malých hodnotách parametru  $\lambda$  velmi dobře aproximovat jednoduchými algebraickými funkcemi tvaru  $a + b\lambda^4$ , kde  $a, b$  jsou konstanty. Tato skutečnost, kterou si v tomto odstavci ověříme, podstatně usnadní, jak ukážeme v následujících odstavcích, vyšetřování vlastních frekvencí prutových soustav rovinných i prostorových.

Použijeme-li k rozvoji funkcí  $F_j, j = 1, 2, \dots, 12$ , v bodě  $\lambda = 0$  řady Maclaurinovy, dostaneme

$$(2.1) \quad F_j = a_j + b_j \lambda^4 + c_j \lambda^8 + d_j \lambda^{12} + \dots, \quad j = 1, 2, \dots, 12,$$

neboť derivace první až třetí, pátá až sedmá, devátá až jedenáctá atd. těchto funkcí v bodě  $\lambda = 0$  je rovna nule<sup>4)</sup>. Tato pozoruhodná specifická vlastnost funkcí  $F_j$  v bodě  $\lambda = 0$  svědčí o tom, že již výraz

$$(2.2) \quad F_j \doteq a_j + b_j \lambda^4, \quad j = 1, 2, \dots, 12,$$

bude dobře aproximovat funkce  $F_j$  v dosti velkém okolí bodu  $\lambda = 0$ , neboť v rozvoji (2.2) jest ve skutečnosti uvažováno až osm prvních členů Maclaurinovy řady.

Funkce  $F_j$  mají ještě další zajímavou vlastnost — každá z těchto funkcí v bodě  $\lambda = 0$  má čtvrtou, osmou, dvanáctou atd. derivaci stejného znaménka. Proto

<sup>3)</sup> Viz [1], str. 154.

<sup>4)</sup> Rozvoje (2.1) používá prof. KOLOUŠEK k výpočtu tabulek funkcí  $F_j$  pro malé hodnoty  $\lambda$ , viz [1], str. 191.

absolutní hodnotu koeficientu při  $\lambda^4$  ve (2.2) zvolíme o něco větší než je absolutní hodnota  $F_j^{(IV)}(0)/4!$ . Tím částečně zahrneme vliv ostatních členů řady, které ve (2.2) neuvažujeme. Zvolíme-li koeficient při  $\lambda^4$  tak, aby v bodě  $\lambda = 2,2$  se ztotožňovaly přesné hodnoty funkcí  $F_j$  s hodnotami přibližnými určenými výrazy (2.2) ve čtyřech desetinných místech, pak aproximace funkcí  $F_j$  jsou dány těmito výrazy ( $a_j = F_j(0)$ ,  $b_j = [F_j(2,2) - F_j(0)]/2,2^4$ ):

$$(2.3) \quad \begin{aligned} F_1 &\doteq 2 + 0,0075\lambda^4, & F_7 &\doteq 3 - 0,0209\lambda^4, \\ F_2 &\doteq 4 - 0,0099\lambda^4, & F_8 &\doteq 3 + 0,0442\lambda^4, \\ F_3 &\doteq 6 + 0,0327\lambda^4, & F_9 &\doteq -3 + 0,0931\lambda^4, \\ F_4 &\doteq -6 + 0,0543\lambda^4, & F_{10} &\doteq -3 - 0,1583\lambda^4, \\ F_5 &\doteq -12 - 0,1367\lambda^4, & F_{11} &\doteq 3 - 0,5150\lambda^4, \\ F_6 &\doteq 12 - 0,3804\lambda^4, & F_{12} &\doteq 3 - 0,2496\lambda^4. \end{aligned}$$

V tab. I jsou pro různé hodnoty  $\lambda$  uvedeny přesné hodnoty funkcí  $F_j$  a jejich přibližné hodnoty určené podle (2.3).

Uvážíme-li, že v bodech  $\lambda = 0$  a  $\lambda = 2,2$  dostaneme z rovnic (2.3) přesné hodnoty funkcí  $F_j$  a porovnáme-li v tab. I hodnoty přesné s přibližnými v dalších bodech, docházíme k závěru, že jednoduché algebraické funkce (2.3) velmi dobře aproximují funkce  $F_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$ , v intervalu

$$(2.4) \quad 0 \leq \lambda \leq 2,4.$$

Zbývající funkce  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , dané rovnicemi (1.4) a (1.8) stačí aproximovat jen v intervalech

$$(2.5) \quad 0 \leq \psi \leq 0,5, \quad 0 \leq \vartheta \leq 0,5,$$

Tabulka I

$F_j$	$\lambda = 0,8$		$\lambda = 1,6$		$\lambda = 2,0$		$\lambda = 2,4$	
	přesně	podle (2.3)	přesně	podle (2.3)	přesně	podle (2.3)	přesně	podle (2.3)
$F_1$	2,0029	2,0031	2,0475	2,0492	2,1184	2,1200	2,2555	2,2488
$F_2$	3,9961	3,9959	3,9369	3,9351	3,8433	3,8416	3,6649	3,6715
$F_3$	6,0127	6,0134	6,2060	6,2143	6,5143	6,5232	7,1122	7,0849
$F_4$	- 5,9785	- 5,9778	- 5,6534	- 5,6441	- 5,1417	- 5,1312	- 4,1720	- 4,1985
$F_5$	-12,0527	-12,0560	-12,8570	-12,8959	-14,1444	-14,1872	-16,6552	-16,5354
$F_6$	11,8478	11,8442	9,5499	9,5070	5,9608	5,9136	-0,7519	- 0,6208
$F_7$	2,9922	2,9914	2,8720	2,8630	2,6756	2,6656	2,2767	2,3066
$F_8$	3,0161	3,0381	3,2658	3,2897	3,6803	3,7072	4,5446	4,4664
$F_9$	- 2,9648	- 2,9619	- 2,4258	- 2,3899	- 1,5509	- 1,5104	+ 0,2051	+ 0,0888
$F_{10}$	- 3,0572	- 3,0648	- 3,9451	- 4,0374	- 5,4294	- 5,5328	- 8,5590	- 8,2520
$F_{11}$	2,8009	2,7891	- 0,2330	- 0,3751	5,0809	5,2400	-14,5540	-14,0865
$F_{12}$	2,9034	2,8978	1,4316	1,3642	0,9178	0,9936	- 5,5011	- 5,2811

neboť u skutečných konstrukcí, jak ukážeme v odst. 3 a 5, hodnoty parametrů  $\psi$  a  $\vartheta$  každého prutu konstrukce nepřestoupí meze intervalů (2.5) pokud hodnoty  $\lambda$  všech prutů konstrukce leží v intervalu (2.4).

Vyjádříme-li tyto funkce parabolami druhého stupně o rovnicích

$$(2.6) \quad \begin{aligned} f_1 &\doteq 1 - 0,3384\psi^2, & f_2 &\doteq 1 + 0,1714\psi^2, \\ f_3 &\doteq 1 - 0,3384\vartheta^2, & f_4 &\doteq 1 + 0,1714\vartheta^2, \end{aligned}$$

dostaneme jejich hodnoty v intervalech (2.5) téměř s přesností na čtyři desetinná místa (viz tab. II).

Tabulka II

$\psi$	$\psi = \vartheta = 0$		$\psi = \vartheta = 0,2$		$\psi = \vartheta = 0,4$		$\psi = \vartheta = 0,5$	
	přesně	podle (2.6)	přesně	podle (2.6)	přesně	podle (2.6)	přesně	podle (2.6)
$f_1 = f_3$	1,0000	1,0000	0,9866	0,9865	0,9461	0,9459	0,9152	0,9154
$f_2 = f_4$	1,0000	1,0000	1,0067	1,0069	1,0272	1,0274	1,0429	1,0429

Výrazy (2.6) představují první čtyři členy Maclaurinovy řady, neboť  $f'_i(0) = f''_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Přitom koeficienty při  $\psi^2$  a  $\vartheta^2$  jsou k lepšímu vystižení funkcí (1.4) a (1.8) v intervalech (2.5) částečně pozměněny. Je totiž  $f'_1(0) = f'_3(0) = -2/3$  a  $f''_2(0) = f''_4(0) = 1/3$ .

Z (1.2), (1.3) a (1.7) dostáváme

$$(2.7) \quad \psi = \lambda^2 \sqrt{c}, \quad \vartheta = \lambda^2 \sqrt{k},$$

kde

$$(2.8) \quad c = \frac{J}{Pl^2}, \quad k = \frac{\chi EJ}{\mu l^2 GI_u}.$$

Dosazením (2.7) do (2.6) vycházejí aproximace funkcí  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , ve tvaru (2.3)

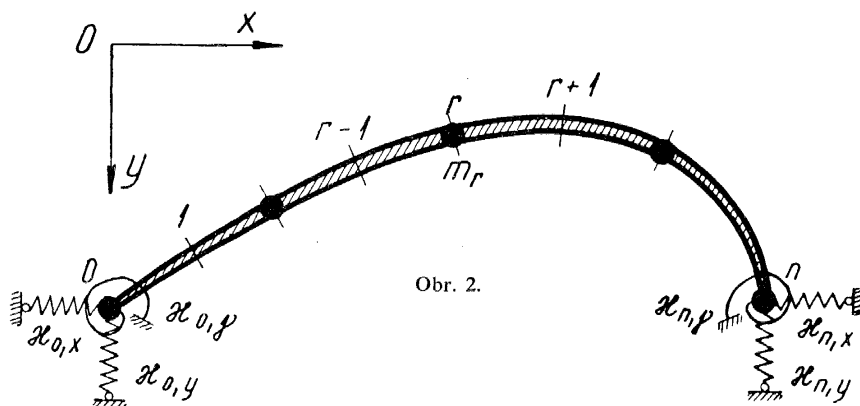
$$(2.9) \quad \begin{aligned} f_1 &\doteq 1 - 0,3384c\lambda^4, & f_2 &\doteq 1 + 0,1714c\lambda^4, \\ f_3 &\doteq 1 - 0,3384k\lambda^4, & f_4 &\doteq 1 + 0,1714k\lambda^4. \end{aligned}$$

### 3. OBLOUKY

Metody deformační lze – jak známo<sup>5)</sup> – užít k určení vlastních frekvencí a příslušných vlastních tvarů kmitání oblouků konstantního i proměnného průřezu s libovolným tvarem střednice a s libovolným (pružným) podepřením patek.

<sup>5)</sup> Viz např. [1], [2].

Rozdělíme-li oblouk (obr. 2) na  $n$  (obecně různých) částí a nahradíme-li každou část přímým prutem konstantního průřezu a konstantní hmoty  $\mu$ , dostaneme prutovou soustavu, která bude mít vlastní frekvence téměř stejné jako vyšetřovaný oblouk. Počet částí  $n$  musí být ovšem tak velký, aby nahrazení oblouku soustavou přímých prutů bylo co možná nejlepší.



V případě, že na oblouk působí kromě spojitěho zatížení ještě osamělá břemena v několika místech, je třeba oblouk rozdělit tak, aby osamělá břemena (soustředěné hmoty) připadla do vrcholů náhradního mnohoúhelníka (obr. 2). Správná volba počtu částí  $n$  závisí tedy nejen na tvaru střednice, ale i na tom, jak je oblouk zatížen a jak rychle se mění průřez oblouku.

V tomto odstavci si nejdříve všimneme toho, jaký tvar budou mít deformační rovnice platné pro vlastní kmitání oblouku v rovině, když kromě hmoty spojitě rozložené podél střednice oblouku jsou ještě soustředěné hmoty v několika bodech a když se použije přitom aproximativních funkcí (2.3) a (2.9). Pak pojednáme o tom, jakých hledisek, kromě již zde uvedených, je třeba při správné volbě počtu částí  $n$  respektovat, abychom mohli použít těchto aproximativních funkcí.

Uvažujme prut  $g - h$  konstantního průřezu, který má libovolnou polohu v rovině, kde je kromě prutových os  $U$  a  $V$  ještě zvolen obecný pravouhý systém souřadnic  $XOY$  (obr. 3).

Jestliže osa  $U$  svírá s osou  $X$  úhel  $\xi$ , pak podle obr. 3a,b platí tyto geometrické vztahy:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} v_g &= y_g \cos \xi_{g,h} - x_g \sin \xi_{g,h}, & v_h &= y_h \cos \xi_{g,h} - x_h \sin \xi_{g,h}, \\ u_g &= x_g \cos \xi_{g,h} + y_g \sin \xi_{g,h}, & u_h &= x_h \cos \xi_{g,h} + y_h \sin \xi_{g,h}. \end{aligned}$$

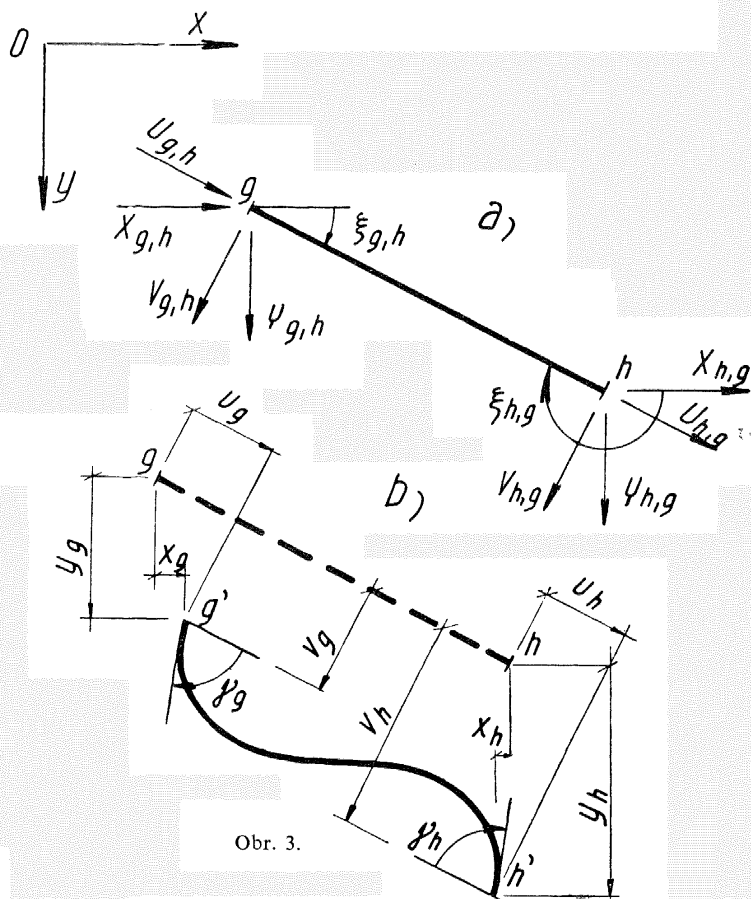
Jsou-li  $X_{g,h}$ ,  $Y_{g,h}$  amplitudy sil ve směru os  $X$  a  $Y$ , pak platí (obr. 3a)

$$(3.2) \quad X_{g,h} = U_{g,h} \cos \xi_{g,h} - V_{g,h} \sin \xi_{g,h}, \quad Y_{g,h} = U_{g,h} \sin \xi_{g,h} + V_{g,h} \cos \xi_{g,h}.$$



Dosadíme-li (3.1) do prvních tří vztahů (1.1) a pak do (3.2), vychází<sup>6)</sup>

$$(3.3) \quad \begin{aligned} X_{g,h} &= A_{1,x}x_g + A_{1,y}y_g + B_{1,\gamma}\gamma_g + C_{1,x}x_h + C_{1,y}y_h + D_{1,\gamma}\gamma_h, \\ Y_{g,h} &= A_{1,y}x_g + A_{2,y}y_g + B_{2,\gamma}\gamma_g + C_{1,y}x_h + C_{2,y}y_h + D_{2,\gamma}\gamma_h, \\ M_{g,h} &= B_{1,\gamma}x_g + B_{2,\gamma}y_g + tF_2\gamma_g - D_{1,\gamma}x_h - D_{2,\gamma}y_h + tF_1\gamma_h, \end{aligned}$$



Obr. 3.

kde

$$(3.4) \quad \begin{aligned} A_{1,x} &= \frac{t}{l^2} \left( F_6 \sin^2 \xi_{g,h} + \frac{f_1}{c} \cos^2 \xi_{g,h} \right), \\ A_{1,y} &= -\frac{t}{l^2} \left( F_6 - \frac{f_1}{c} \right) \cos \xi_{g,h} \sin \xi_{g,h}, \\ A_{2,y} &= \frac{t}{l^2} \left( F_6 \cos^2 \xi_{g,h} + \frac{f_1}{c} \sin^2 \xi_{g,h} \right), \end{aligned}$$

<sup>6)</sup> Srovnej s [1], str. 29.

$$\begin{aligned}
B_{1,y} &= \frac{t}{l} F_4 \sin \xi_{g,h}, & B_{2,y} &= -\frac{t}{l} F_4 \cos \xi_{g,h}, \\
C_{1,x} &= \frac{t}{l^2} \left( F_5 \sin^2 \xi_{g,h} - \frac{f_2}{c} \cos^2 \xi_{g,h} \right), \\
C_{1,y} &= -\frac{t}{l^2} \left( F_5 + \frac{f_2}{c} \right) \sin \xi_{g,h} \cos \xi_{g,h}, \\
C_{2,y} &= \frac{t}{l^2} \left( F_5 \cos^2 \xi_{g,h} - \frac{f_2}{c} \sin^2 \xi_{g,h} \right), \\
D_{1,y} &= -\frac{t}{l} F_3 \sin \xi_{g,h}, & D_{2,y} &= \frac{t}{l} F_3 \cos \xi_{g,h}.
\end{aligned}$$

Vztahy mezi silami  $X_{h,g}$ ,  $Y_{h,g}$ , momentem  $M_{h,g}$  a pootočeními  $\gamma_g$ ,  $\gamma_h$  a složkami deformací ve směru os  $X$ ,  $Y$  dostaneme záměnou indexů.

Pro prut na konci  $g$  kloubově uložený ( $M_{g,h} = 0$ ) můžeme místo (3.3) použít vztahů, které neobsahují úhel pootočení  $\gamma_g$ . K odvození takových vztahů se použije (1.5) místo (1.1).

Poznámka. Použijeme-li místo úhlu  $\xi_{h,g} = \pi + \xi_{g,h}$  opět úhel  $\xi_{g,h}$ , vezmeme v úvahu, že  $\cos \xi_{h,g} = -\cos \xi_{g,h}$  a  $\sin \xi_{h,g} = -\sin \xi_{g,h}$ .

Jak je z (3.4) vidět, lze všechny koeficienty při složkách deformací ve vztazích (3.3) vyjádřit jako lineární kombinace funkcí kmitočtu  $F_j$  a  $f_i$ .

Při kmitání oblouku v jeho rovině přísluší každému jejímu bodu  $r$  (obr. 2) tři složky deformací — posuny  $x_r$  a  $y_r$  ve směru os  $X$  a  $Y$  a pootočení  $\gamma_r$ . A rovněž v bodě  $r$  platí tři výminky rovnováhy. Vyjdeme-li z principu d'Alembertova, dospějeme ke třem rovnicím rovnováhy platným pro bod  $r$

$$\begin{aligned}
(3.5) \quad X_{r,r-1} + X_{r,r+1} - m_r \omega^2 x_r &= 0, \\
Y_{r,r-1} + Y_{r,r+1} - m_r \omega^2 y_r &= 0, \\
M_{r,r-1} + M_{r,r+1} - m_r i_{m,r} \omega^2 \gamma_r &= 0,
\end{aligned}$$

kde  $m_r$  je soustředěná hmota v bodě  $r$  a  $i_{m,r}$  je její poloměr setrvačnosti.

V podpoře (v bodě  $o$ , obr. 2) rovnice rovnováhy zní

$$\begin{aligned}
(3.5a) \quad X_{0,1} + (\kappa_{0,x} - m_o \omega^2) x_o &= 0, \\
Y_{0,1} + (\kappa_{0,y} - m_o \omega^2) y_o &= 0, \\
M_{0,1} + (\kappa_{0,y} - m_o i_{m,o} \omega^2) \gamma_o &= 0,
\end{aligned}$$

kde  $\kappa_{0,x}$ ,  $\kappa_{0,y}$ ,  $\kappa_{0,\gamma}$  jsou pružné charakteristiky podpory —  $\kappa_{0,x}$  ( $\kappa_{0,y}$ ) značí sílu, která vznikne následkem posunu  $x_o = 1$  ( $y_o = 1$ ) a  $\kappa_{0,\gamma}$  je moment odpovídající pootočení  $\gamma_o = 1$ . Při  $\kappa_{0,x} = \kappa_{0,y} = \kappa_{0,\gamma} = \infty$  z (3.5a) vychází  $x_o = y_o = \gamma_o = 0$  — konec  $o$  oblouku je dokonale vetknutý. Při  $\kappa_{0,x} = \kappa_{0,y} = \kappa_{0,\gamma} = 0$  je konec  $o$  volný.

Obdobné rovnice platí pro podporu  $n$ .

Poznámka. Vliv otáčení rovnoměrné rozložené hmoty na vlastní frekvenci je nepatrný a není ve funkcích kmitočtu zahrnut. U soustředěných hmot lze vliv jejich otáčení zahrnout do rovnic rovnováhy momentů – viz (3.5) a (3.5a).

Dosadíme-li za síly a momenty vyskytující se v rovnicích (3.5) a (3.5a) výrazy tvaru (3.3), dostáváme homogenní systém deformačních rovnic. V nejobecnějším případě, tj. když obě patky oblouku jsou pružně podepřeny ve dvou k sobě kolmých směrech a současně pružně vetknuty, bude tento systém obsahovat  $3(n + 1)$  rovnic a stejný počet neznámých složek deformací. Přitom koeficienty při neznámých budou lineárními kombinacemi funkcí kmitočtu  $F_j, j = 1, 2, \dots, 12$ , a  $f_1, f_2$ .

Vyjádříme parametry  $\lambda_{r-1,r}, r = 1, 2, \dots, n$ , všech prutů prostřednictvím parametru  $\lambda$  jednoho prutu (např. prutu 0–1)

$$(3.6) \quad \lambda_{r-1,r} = d_{r-1,r} \lambda_{0,1}, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

kde

$$(3.6a) \quad d_{r-1,r} = \frac{l_{r-1,r}}{l_{0,1}} \sqrt[4]{\left( \frac{\mu_{r-1,r} J_{0,1}}{\mu_{0,1} J_{r-1,r}} \right)}.$$

A stejným způsobem vyjádříme  $\omega^2$  v rovnicích (3.5) a (3.5a). Podle (1.2) jest

$$(3.7) \quad \omega^2 = K \lambda_{0,1}^4,$$

kde

$$(3.7a) \quad K = \frac{E J_{0,1}}{\mu_{0,1} l_{0,1}^4}.$$

Použijeme-li aproximativních funkcí (2.3) a (2.9) místo funkcí kmitočtu, budou mít deformační rovnice tento tvar ( $\lambda = \lambda_{0,1}$ )

$$(3.8) \quad \sum_{j=1}^s (a_{i,j} - b_{i,j} \lambda^4) x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

kde  $a_{i,j}, b_{i,j}$  jsou konstanty a  $s = 3(n + 1)$ . Užijeme-li vztahu (3.7), rovnice (3.8) zní

$$(3.9) \quad \sum_{j=1}^s (a_{i,j} - c_{i,j} \omega^2) x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

kde  $c_{i,j} = b_{i,j}/K$ . netriviálnímu řešení ( $x_j \neq 0$ ) homogenního systému rovnic (3.8), resp. (3.9), vyhovuje vlastní frekvence oblouku.

Poznámka. O tom, jaké výhody získáme řešením rovnic (3.8), resp. (3.9), oproti řešení obvyklého systému deformačních rovnic, v nichž funkce kmitočtu nejsou nahrazeny aproximativními funkcemi (2.3) a (2.9), pojednáme v odst. 7 a 8.

Nyní zodpovíme otázku, na jaký počet částí je třeba rozdělit oblouk, abychom mohli použít aproximativních funkcí (2.3) a (2.9). Odpověď na tuto otázku je velmi snadná.

V deformačních rovnicích se vyskytují funkce  $f_1, f_2$  a funkce  $F_j, j = 1, 2, \dots, 6$ , resp. také funkce  $F_j, j = 7, 8, \dots, 12$ , když je patka oblouku kloubově uložena.

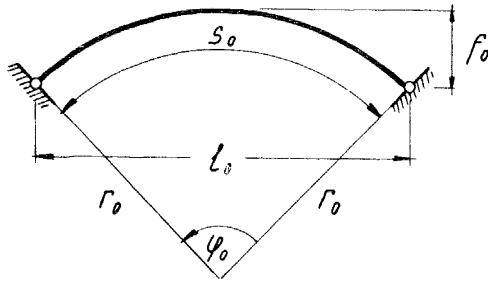
Tyto funkce jsou aproximovány jen v intervalech (2.4) a (2.5). Protože parametr  $\lambda$  je přímo úměrný délce prutu  $l$  (viz (1.2)), je vždy možné oblouk rozdělit na tolik dílů (prutů), aby byla splněna podmínka

$$(3.10) \quad \lambda \leq C,$$

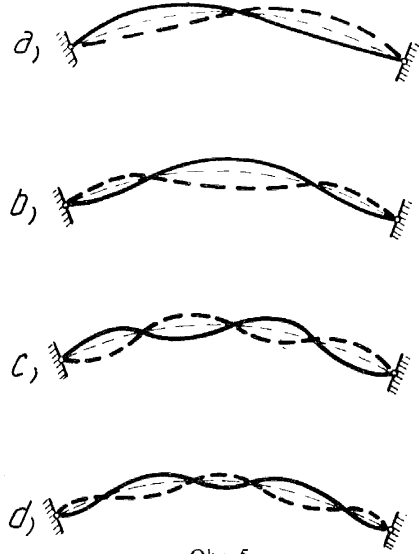
kde  $C$  je libovolné malé kladné číslo ( $C > 0$ )<sup>7)</sup>.

**Poznámka.** U oblouku konstantního průřezu, na který působí rovnoměrné zatížení podél střednice, jsou veličiny  $\mu$ ,  $EJ$  konstantami. Dosadíme-li za  $\omega$  do (1.2) vlastní frekvenci  $\omega_0$  oblouku, dostáváme, že  $\lambda/l = \text{konst.}$ , kde  $\lambda$  a  $l$  přísluší jedné části (např. 0–1) oblouku, obr. 2. Tedy, jestliže  $l \rightarrow 0$ , pak také  $\lambda \rightarrow 0$ .

Na následujícím příkladě ukážeme, jak je třeba rozdělit oblouk, aby platila podmínka (3.10), když  $C = 2,4$ , viz (2.4).



Obr. 4.



Obr. 5.

Kruhový oblouk konstantního průřezu nechť je v patkách kloubově a neposuvně uložen (obr. 4). Vlastní frekvence takového oblouku byly vyšetřovány F. W. WALKINGEM [3] pro smělosti oblouku  $f_0/l_0 = 1/16, 1/8, 1/5$ , kterým odpovídají středové úhly  $\varphi_0 = 0,4974, 0,9800, 1,5222$  a délky oblouku  $s_0 = r_0\varphi_0 = (l_0\varphi_0)/(2 \sin \frac{1}{2}\varphi_0) \doteq \doteq 1,02l_0, 1,04l_0, 1,11l_0$ . Pro štíhlosti  $l_0/i_0$  ( $i_0$  je poloměr setrvačnosti průřezu oblouku) měnící se od 50 do 650 nepřesahují hodnoty parametru

$$(3.11) \quad \lambda_0 = l_0 \sqrt[4]{\left(\frac{\mu\omega^2}{EJ}\right)}$$

při různých vlastních tvarech kmitání oblouku tyto horní meze<sup>8)</sup>:

1.  $\lambda_0 \leq 2\pi$  při vlastním tvaru kmitání podle obr. 5a,
2.  $\lambda_0 \leq 3\pi$  při vlastním tvaru kmitání podle obr. 5b,

<sup>7)</sup> Dolní meze intervalu (2.4) si nemusíme vůbec všimnout, neboť je vždy  $\lambda > 0$ .

<sup>8)</sup> Viz [3], obr. 10 na str. 447.

3.  $\lambda_0 \cong 4\pi$  při vlastním tvaru kmitání podle obr. 5c,
4.  $\lambda_0 \cong 5\pi$  při vlastním tvaru kmitání podle obr. 5d.

Poznámka. Znaménko rovnosti platí pro přímý prut ( $f_0/l_0 = 0$ ). Na obr. 5 jsou vlastní tvary kmitání nakresleny pro  $l_0/i_0 = 265$ . Při jiných štíhlostech se vlastní tvary kmitání nepatrně liší od nakreslených.

Vyjádříme-li parametr  $\lambda_0$  pro nejvyšší oblouk ( $f_0/l_0 = 1/5$ ) v závislosti na délce oblouku  $s_0 = 1,11l_0$ , máme podle (3.11)

$$(3.12) \quad 1,11\lambda_0 = s_0 \sqrt[4]{\left(\frac{\mu\omega^2}{EJ}\right)}.$$

Rozdělíme-li délku oblouku  $s_0$  na  $n$  stejných dílů o délce  $l$  ( $s_0 = nl$ ) a je-li  $\lambda$  parametr podle (1.2) příslušející jednomu dílu oblouku, pak z (3.12) dostáváme

$$\frac{1,11\lambda_0}{s_0} = \frac{\lambda}{l}$$

neboli

$$(3.13) \quad \frac{1,11\lambda_0}{n} = \lambda.$$

Dosadíme-li do (3.13) za  $\lambda$  horní mez intervalu (2.4) ( $\lambda = 2,4$ ), máme pro počet dílů  $n$  tento výraz

$$(3.14) \quad n = \frac{1,11}{2,4} \lambda_0 = 0,463\lambda_0.$$

A dosadíme-li za  $\lambda_0$  uvedené horní meze ( $\lambda_0 = 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi$ ), z (3.14) vychází

$$(3.15) \quad n = 2,9 < 3, \quad n = 4,4 < 5, \quad n = 5,8 < 6, \quad n = 7,3 < 8.$$

Hodnoty  $n$  podle (3.15) odpovídají horní mezi intervalu (2.4). Z (3.13) vyplývá, že se zvětšujícím počtem dílů  $n$  se  $\lambda$  zmenšuje. Proto parametr  $\lambda$  bude ležet uvnitř intervalu (2.4), když počet dílů  $n$  oblouku bude splňovat tyto podmínky:

1.  $n \cong 3$  pro vl. tvar kmitání oblouku podle obr. 5a,
2.  $n \cong 5$  pro vl. tvar kmitání oblouku podle obr. 5b,
3.  $n \cong 6$  pro vl. tvar kmitání oblouku podle obr. 5c,
4.  $n \cong 8$  pro vl. tvar kmitání oblouku podle obr. 5d.

To jsou kritéria pro volbu počtu dílů  $n$ , na který je nutno rozdělit kruhový dvoukloubový oblouk o smělosti  $f_0/l_0 = 1/5$ , abychom mohli použít k vyšetření jeho vlastních frekvencí aproximativních funkcí (2.3). K určení první vlastní frekvence stačí tedy daný oblouk rozdělit na tři části, zatímco k určení první i druhé vlastní frekvence je nutno výsledné deformační rovnice psát pro pět částí atd.

Pro oblouky smělosti  $f_0/l_0 = 1/8, 1/16$  bychom dostali ještě menší hodnoty pro  $n$  než jsou hodnoty (3.15), a proto uvedená kritéria platí i pro tyto případy.

U vetknutého oblouku je nutno počet dílů přiměřeně zvětšit, neboť parametr  $\lambda$  příslušející jednomu dílu takového oblouku je větší než parametr příslušející stejně

dlouhému dílu dvojklobového oblouku. Je to způsobeno různou vlastní frekvencí u obou druhů oblouků.

*Nutný počet dílů  $n$  závisí tedy na způsobu uložení oblouku a na tom, kolik vlastních frekvencí se vyšetřuje.*

Protože pro praktické účely je nejdůležitější znát první vlastní kruhovou frekvenci a jen někdy také druhou, lze funkcí (2.3) použít vždy, aniž je přitom třeba volit  $n$  velké a tím i řešit velký počet deformačních rovnic tvaru (3.8).

Zbývá ještě zdůvodnit, že je možno použít kromě funkcí (2.3) také funkcí  $f_1, f_2$  podle (2.9), které se vyskytují v deformačních rovnicích. Tyto funkce jsou aproximovány v intervalu  $0 \leq \psi \leq 0,5$ . Opět si všimněme toho, zda není překročena jen horní mez tohoto intervalu, neboť, je-li  $\lambda \geq 0$ , pak také  $\psi \geq 0$ .

Je-li  $\lambda = 2,4$ , což jest horní mez intervalu (2.4), pak podle (2.7) je

$$\psi = 2,4^2 \sqrt{c} = 5,76 \sqrt{c}$$

neboli

$$(3.16) \quad \sqrt{c} = \frac{\psi}{5,76}.$$

Avšak podle (2.8) máme

$$(3.17) \quad \sqrt{c} = \frac{1}{l} \sqrt{\frac{J}{P}} = \frac{i_0}{l},$$

což je reciproká hodnota štíhlosti  $l/i_0$  jednoho dílu oblouku. Tedy podle (3.16) a (3.17) jest

$$(3.18) \quad \frac{l}{i_0} = \frac{5,76}{\psi}.$$

Při  $\psi = 0,5$  dostáváme nejmenší přípustnou štíhlost  $l/i_0 = 11,52$ , neboť při

$$(3.19) \quad l/i_0 \geq 11,52$$

je podle (3.18)  $\psi \leq 0,5$ .

Podmínka (3.19) je však u skutečných konstrukcí splněna vždy, i když rozdělíme oblouk na tak velký počet částí, který pro výpočet vlastních frekvencí oblouků není ani žádoucí.

**Příklad.** U dvojklobového oblouku obdélníkového průřezu, který tvoří nosnou konstrukci betonových mostů, bývá v průměru  $s_0/v = 60$  až  $100$ , kde  $v$  je výška průřezu. V takovém případě je  $i_0 = 0,2887v$  a tedy  $s_0/i_0 = 208$  až  $347$ . Protože  $s_0 = nl$ , je podmínka (3.19) splněna dokonce při  $n \leq 18$  (je-li  $s_0/i_0 = 208$ ) a při  $n \leq 30$  (je-li  $s_0/i_0 = 347$ ).

Stejná hlediska, o nichž jsme pojednali v tomto odstavci, je třeba dodržet při vyšetřování vlastních frekvencí prutů proměnného průřezu, které jsou jen zvláštním případem oblouků ( $f_0/l_0 = 0$ ).

V závěru tohoto odstavce připomínáme, že aproximativní funkce (2.3) je možno

použit jen tehdy, když parametry  $\lambda$  všech částí oblouku leží v intervalu (2.4). Proto je výhodné rozdělit oblouk tak, aby tyto parametry u jednotlivých částí oblouku se od sebe příliš nelišily nebo byly sobě rovný. Rovnost parametrů  $\lambda$  nastane, když ve vztahu (3.6) je  $d_{r-1,r} = 1$ . Zvolíme-li délku  $l_{0,1}$  části 0-1 (obr. 2), pak délky ostatních částí jsou již určeny při  $d_{r-1,r} = 1$  vztahem (3.6a)

$$(3.20) \quad l_{r-1,r} = l_{0,1} \sqrt[4]{\left(\frac{\mu_{0,1} J_{r-1,r}}{\mu_{r-1,r} J_{0,1}}\right)}, \quad r = 2, 3, \dots, n.$$

#### 4. PATROVÉ RÁMY ROVINNÉ

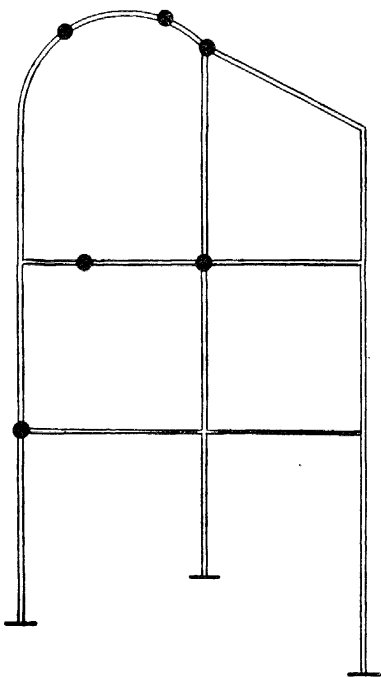
Aproximativních funkcí (2.3) a  $f_1, f_2$  podle (2.9) lze užít k určení nejen první, ale i vyšších vlastních frekvencí libovolné rovinné prutové soustavy sestávající z přímých i křivých prutů a s hmotou rozloženou spojitě i soustředěnou v několika bodech (obr. 6). A to proto, že vhodným rozdělením prutů (křivých i přímých) na části

lze vždy splnit podmínky  $\lambda \leq 2,4$ ,  $\psi \leq 0,5$ , kde  $\lambda$  a  $\psi$  se vztahuje k určité části prutu (odst. 3).

Universální použitelnost těchto funkcí však nevylučuje nevhodnost použít jich pro každý případ.

Tak např. není vhodné dělit na části pruty přímé s rovnoměrně rozloženou hmotou, neboť v každém dělicím bodě je třeba uvažovat v obecném případě další tři neznámé složky deformací. Následkem toho se počet deformačních rovnic značně zvětšuje a tím se komplikuje i jejich řešení. Ani v těch případech, kdy je hmota prutu rozložena rovnoměrně a současně soustředěna v několika bodech nemusí se rozdělovat prut v místech soustředěných hmot.

Vztahy mezi koncovými silami a momenty a složkami koncových deformací prutu s takto rozloženou hmotou jsou odvozeny v [4], přičemž jest uvažován také vliv osové síly.



Obr. 6.

Poznámka 1. Jsou-li soustředěné hmoty umístěny jen ve styčnicích a nikoliv uvnitř dělek prutů, lze jejich vliv zcela zahrnout do styčnickových a patrových rovnic, a tedy celkový počet deformačních rovnic se jejich přítomností nezvětšuje.

Poznámka 2. U pravoúhlých rámců se často pro zjednodušení řešení, ač ne vždy

oprávněně, soustřeďuje hmota rozložena podél prutů do přilehlých styčnicků. Takové pruty se pak uvažují jako nehmotné, pro něž je  $\lambda = 0$ . Při použití aproximativních funkcí není třeba takové zjednodušení zavádět, neboť se při řešení nezíská značný efekt.

Poznámka 3. V práci [4] jsou funkce kmitočtu  $F_j$  označeny písmeny malé řecké abecedy. Ve výrazu (147) na str. 39 jsou dvě tiskové chyby – správně má být  $\alpha_{ab} = \alpha_{ba} = [\lambda(\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda)] / (1 - \cos \lambda \cosh \lambda)$ . Rovněž čítec výrazu (133) na str. 38 pro tutéž funkci, v níž je zahrnut také vliv tahové síly, je chybně vysázen – správně jest

$$(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) (\sin \lambda_2 \cosh \lambda_1 - \lambda_2 / \lambda_1 \cos \lambda_2 \sinh \lambda_1).$$

V tomto odstavci chceme poznamenat, že u patrových ráků není zpravidla zapotřebí ke splnění podmínky  $\lambda \leq 2,4$  ( $\psi \leq 0,5$ ) vůbec dělit ani jeden prut, když se uvažuje posuvnost styčnicků.

Již u sdruženého ráku s posuvnými styčnickými, jehož všechny stojky jsou v patkách dokonale vetknuty, hodnota parametru  $\lambda_s$  stojek pro nejnižší vlastní frekvenci  $\omega_{(1)}$  nepřevyšuje hodnotu 2,365, viz [5], tab. 4 a str. 165. Vyjde-li podle (3.6), že pro parametr  $\lambda_p$  příčelí platí  $\lambda_p \leq \lambda_s$ , pak lze k určení  $\omega_{(1)}$  použít aproximativních funkcí. Totéž platí pro sdružený rák s kloubově a pružně uloženými stojkami.

U patrových ráků jsou poměry mnohem příznivější, neboť následkem jejich menších tuhostí ve vodorovném směru jsou jejich vlastní frekvence menší než u sdružených ráků se stejným počtem polí. Proto [viz (1.2)] parametry  $\lambda$  jak stojek, tak i příčelů jsou téměř vždy menší než 2,4, a to nejen při první vlastní frekvenci, ale i při vyšších vlastních frekvencích.

Jako příklad uvádíme souměrný třípatrový rák o jednom poli se stojkami dokonale vetknutými, který byl řešen v [6]. Hodnoty parametrů  $\lambda_s$  (stojek) a  $\lambda_p$  (příčelů) jsou pro první čtyři vlastní frekvence  $\omega_{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , uvedeny v tab. III.

Tabulka III

$\omega_{(i)}$	$\omega_{(1)} = 8,5 \text{ s}^{-1}$	$\omega_{(2)} = 25,8 \text{ s}^{-1}$	$\omega_{(3)} = 42,4 \text{ s}^{-1}$	$\omega_{(4)} = 157 \text{ s}^{-1}$
$\lambda_s$	0,98	1,70	2,18	4,19
$\lambda_p$	0,86	1,50	1,92	3,68

Vidíme, že v daném případě bychom mohli použít aproximativních funkcí k určení až tří vlastních frekvencí. Kdybychom chtěli určit i  $\omega_{(4)}$  použitím aproximativních funkcí, museli bychom každou stojku a každý příčel rozdělili na dvě rovné části a pro takto rozčleněný rák napsat deformační rovnice. Podle (1.2) a tab. III při  $\omega_{(4)}$  dostáváme pro část představující polovinu stojky  $\bar{\lambda}_s = \lambda_s / 2 = 2,095$  a pro příslušnou část příčel  $\bar{\lambda}_p = \lambda_p / 2 = 1,84$ , což je méně než 2,4. V obou případech deformační rovnice mají tvar (3.8), avšak pro rozčleněný rák jejich počet je větší.



Docházíme tedy k závěru, že u patrových rámu s posuvnými styčníky lze vyšetřit několik vlastních frekvencí z deformačních rovnic tvaru (3.8), jejichž počet je *stejný* s počtem deformačních rovnic, v nichž se vyskytují funkce kmitočtu přímo a nikoliv jejich aproximace.

## 5. PRUTOVÉ SOUSTAVY PROSTOROVÉ

Při kmitání prutových soustav prostorových dochází v obecném případě k posunům a pootočením jejich styčníků.

Rozložíme-li vektor posunu a pootočení libovolného styčníku  $g$  do směrů tří os zvoleného pravoúhlého systému souřadnic  $OXYZ$ , dostaneme šest složek deformací  $x_g, y_g, z_g, \gamma_g^x, \gamma_g^y, \gamma_g^z$ . První tři složky určují posun a zbývající tři složky určují pootočení styčníku  $g$ .

Nepůsobí-li na prutovou soustavu vnější harmonicky proměnné síly a momenty, dostáváme pro styčník  $g$  použitím principu d'Alembertova šest výminek rovnováhy

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sum X_{g,h} - m_g \omega^2 x_g &= 0, & \sum M_{g,h}^x - m_g i_{m,g} \omega^2 \gamma_g^x &= 0, \\ \sum Y_{g,h} - m_g \omega^2 y_g &= 0, & \sum M_{g,h}^y - m_g i_{m,g} \omega^2 \gamma_g^y &= 0, \\ \sum Z_{g,h} - m_g \omega^2 z_g &= 0, & \sum M_{g,h}^z - m_g i_{m,g} \omega^2 \gamma_g^z &= 0, \end{aligned}$$

kde  $X_{g,h}, Y_{g,h}, Z_{g,h}$  jsou složky amplitudy koncové síly a  $M_{g,h}^x, M_{g,h}^y, M_{g,h}^z$  jsou složky amplitudy momentu, které přísluší konci  $g$  prutu  $g - h$ . V rovnicích (5.1) se znak  $\sum$  vztahuje na všechny pruty sbíhající se ve styčníku  $g$ ,  $m_g$  značí hmotu soustředěnou ve styčníku  $g$  a  $i_{m,g}$  je její poloměr setrvačnosti.

Vztahy mezi složkami amplitud koncových sil a momentů prutu a složkami deformací jeho konců jsou odvozeny v [1] na str. 155–158. V těchto vztazích<sup>9)</sup> se vyskytují kromě funkcí  $F_1, \dots, F_6$  a  $f_1, f_2$  také funkce  $f_3, f_4$  podle (1.8). Přitom všechny tyto funkce kmitočtu se vyskytují jen v lineárních kombinacích. Dosadíme-li tyto vztahy do rovnic (5.1), dostaneme systém deformačních rovnic, jejichž koeficienty při neznámých budou tvořit lineární kombinace uvedených funkcí kmitočtu.

Pro každý prut kmitající v prostoru přísluší čtyři parametry

$$(5.2) \quad \psi, \vartheta, \lambda_v, \lambda_w,$$

přičemž parametry  $\psi$  a  $\vartheta$  jsou dány výrazy (1.3) a (1.7) a parametry  $\lambda_v$  a  $\lambda_w$  jsou dány výrazem (1.2), dosadíme-li za  $J$  momenty setrvačnosti  $J_v, J_w$  k hlavním osám setrvačnosti  $V$  a  $W$  průřezu uvažovaného prutu. Proto mezi parametry  $\lambda_v$  a  $\lambda_w$  platí podle (1.2) vztah

$$(5.3) \quad \lambda_v = \lambda_w \sqrt[4]{\left(\frac{J_w}{J_v}\right)}.$$

Podle (2.7), (5.3) a (3.6) můžeme tedy vyjádřit všechny čtyři parametry (5.2)

<sup>9)</sup> Viz [1], výrazy (281) na str. 157.

každého prutu prostřednictvím jednoho parametru  $\lambda$  příslušejícího jednomu (zvolenému) prutu vyšetřované prutové soustavy.

Dosadíme-li aproximativní funkce (2.3) a (2.9) do deformačních rovnic, dostaneme systém rovnic tvaru (3.8), resp. (3.9), kterému vyhovují vlastní frekvence prutové soustavy.

Poznamenejme, že použitelnost aproximativních funkcí je vázána podmínkami (viz (2.4) a (2.5))

$$(5.4) \quad \lambda_v \leq 2,4, \quad \lambda_w \leq 2,4, \quad \psi \leq 0,5, \quad \vartheta \leq 0,5,$$

které musí být splněny pro každý prut prutové soustavy.

K tomu, aby byly první dvě podmínky (5.4) splněny, je třeba respektovat hlediska uvedená v odst. 3 a 4. Třetí podmínka ( $\psi \leq 0,5$ ) je vždy splněna (odst. 3), a proto k ní nemusíme vůbec přihlížet. Rovněž podmínka  $\vartheta \leq 0,5$  je prakticky vždy splněna, když jsou splněny první dvě podmínky (5.4), jak nyní ukážeme.

Pro jednoduchost uvažujme přímý prut kruhového průřezu a předpokládejme, že na tento prut nepůsobí kromě jeho vlastní váhy žádné jiné zatížení. Je pak

$$J_v = J_w = J = Pi_0^2, \quad \lambda_v = \lambda_w = \lambda, \quad \chi = \frac{Hl_u}{P},$$

což dosazeno do (2.8) dává

$$(5.5) \quad k = \frac{E}{G} \left( \frac{i_0}{l} \right)^2.$$

Dosazením  $\lambda = 2,4$  a (5.5) do druhého vztahu (2.7) vychází

$$(5.6) \quad \vartheta = 5,76 \frac{i_0}{l} \sqrt{\left( \frac{E}{G} \right)}.$$

Nejmenší přípustná štíhlost  $l/i_0$  prutu z (5.6) vychází při  $\vartheta = 0,5$ . Proto, aby  $\vartheta \leq 0,5$  ( $\lambda \leq 2,4$ ), musí platit

$$(5.7) \quad \frac{l}{i_0} \geq 11,52 \sqrt{\left( \frac{E}{G} \right)},$$

což je kritérium pro použitelnost funkcí  $f_3$  a  $f_4$  daných výrazy (2.9).

Z (5.7) dostáváme pro ocelový prut ( $E = 21 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ ,  $G = 8,1 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ )  $l/i_0 \geq 19$  a pro prut zhotovený ze dřeva nebo z betonu ( $E/G \doteq 3$ )  $l/i_0 \geq 20$ .

Obdobná kritéria dostaneme pro pruty, které mají různé průřezy a jsou různě zatíženy. Vesměs vycházejí nejmenší přípustné štíhlosti  $l/i_0$  prutů (při  $\lambda \leq 2,4$ ) tak malé, že u skutečných konstrukcí je podmínka  $\vartheta \leq 0,5$  vždy splněna.

## 6. APROXIMACE FUNKCÍ KMITOČTU PŘI $\lambda > 2,4$

U prutových soustav s neposuvnými styčníky je zpravidla alespoň pro některý prut  $\lambda > 2,4$  již při první vlastní frekvenci. V takových případech je možno použít metod navržených v [7] a [8] nebo postupovat následovně.





kde  $a_j = F_j(0)$ ,  $b_j = F_j^{(V)}(0)/4!$  a konstanty  $c_j$  určíme z podmínky, aby v bodě  $\lambda_c$  přesné hodnoty funkcí  $F_j$  se ztotožňovaly v hodnotami určenými podle (6.11)

$$(6.12) \quad c_j = \frac{1}{\lambda_c^8} (F_j(\lambda_c) - a_j - b_j \lambda_c^4).$$

Poznámka. Za koeficienty  $b_j$  v (6.11) a (6.12) lze dosadit hodnoty uvedené ve 2. sloupci tab. IV pro  $\lambda = 0,8$  (odst. 8).

Užijeme-li rozvoje (6.11), pak i pro funkce  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , je vhodné užít rozvoje (viz odst. 2)

$$(6.13) \quad \begin{aligned} f_1 &\doteq 1 - \frac{1}{3}\psi^2 + d_1\psi^4, & f_2 &\doteq 1 + \frac{1}{6}\psi^2 + d_2\psi^4, \\ f_3 &\doteq 1 - \frac{1}{3}\vartheta^2 + d_3\vartheta^4, & f_4 &\doteq 1 + \frac{1}{6}\vartheta^2 + d_4\vartheta^4. \end{aligned}$$

Dosadíme-li (2.7) do (6.13), máme

$$(6.14) \quad \begin{aligned} f_1 &\doteq 1 - \frac{1}{3}c\lambda^4 + d_1c^2\lambda^8, & f_2 &\doteq 1 + \frac{1}{6}c\lambda^4 + d_2c^2\lambda^8, \\ f_3 &\doteq 1 - \frac{1}{3}k\lambda^4 + d_3k^2\lambda^8, & f_4 &\doteq 1 + \frac{1}{6}k\lambda^4 + d_4k^2\lambda^8. \end{aligned}$$

Přítom konstanty  $d_1, d_2, d_3, d_4$  v (6.14) určíme opět z podmínky, aby v bodě  $\lambda_c$  se ztotožňovaly přesné hodnoty funkcí  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , s hodnotami určenými podle (6.14).

Dosadíme-li výrazy (6.11) a (6.14) do (6.2) a pak do (6.1), získají deformační rovnice tvar

$$(6.15) \quad (\mathbf{A}_1 + \lambda^4 \mathbf{B}_1 + \lambda^8 \mathbf{C}_1) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

který je shodný s tvarem rovnic (6.6), kde místo  $\lambda^4$  a  $\lambda^8$  je  $\lambda$  a  $\lambda^2$ .

## 7. O ŘEŠENÍ VÝSLEDNÝCH ROVNIC

Použitím aproximativních funkcí kmitočtu jsme dospěli k homogenním systémům rovnic (3.8), (6.6), (6.8) a (6.10). Tím jsme převedli stanovení vlastních frekvencí prutových soustav na výpočet charakteristických čísel  $\lambda$ -matic.

V tomto odstavci učiníme několik poznámek k řešení rovnic (3.8), (6.6), (6.8) a (6.10), aby bylo patrné, jakého zjednodušení řešení se dosáhlo zavedením aproximativních funkcí kmitočtu.

Systém rovnic (3.8) v maticovém vyjádření má tvar

$$(7.1) \quad (\mathbf{A}_1 - \lambda^4 \mathbf{B}_1) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{A}_1 = \|a_{i,j}\|$ ,  $\mathbf{B}_1 = \|b_{i,j}\|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, s$ , jsou čtvercové matice a  $\mathbf{x}$  je vektor.

Je-li matice  $\mathbf{B}_1$  regulární, vynásobíme rovnici (7.1) inverzní maticí  $\mathbf{B}_1^{-1}$ . Máme

$$(7.2) \quad (\mathbf{A} - \lambda^4 \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{A} = \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{A}_1$  a  $\mathbf{I}$  je jednotková matice.

Netriviální řešení rovnic (7.2) ( $\mathbf{x} \neq 0$ ) vyhovuje charakteristické rovnici

$$(7.3) \quad |\mathbf{A} - \lambda^4 \mathbf{I}| = 0.$$

Určíme-li několik vlastních frekvencí, je výhodné determinant na levé straně rovnice (7.3) vyjádřit mnohočlenem.

Označíme-li

$$(7.4) \quad \alpha = \lambda^4,$$

je s rovnicí (7.3) ekvivalentní tato algebraická rovnice  $s$ -tého stupně vzhledem k  $\alpha$

$$(7.5) \quad p_0 + p_1 \alpha + p_2 \alpha^2 + \dots + p_{s-1} \alpha^{s-1} + \alpha^s = 0.$$

Výpočet koeficientů  $p_0, p_1, \dots, p_{s-1}$  v rovnici (7.5) lze provést mnoha způsoby [10–17].

Poznámka. Přímé rozvádění determinantu  $|\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I}|$  je příliš pracné.

Jednoduchý je způsob založený na Cayley-Hamiltonově větě, která říká, že každá čtvercová matice  $\mathbf{A}$  vyhovuje své vlastní charakteristické rovnici<sup>11)</sup>.

Píšeme-li charakteristickou rovnici (7.3) ve tvaru (7.5), pak

$$(7.6) \quad p_0 \mathbf{I} + p_1 \mathbf{A} + p_2 \mathbf{A}^2 + \dots + p_{s-1} \mathbf{A}^{s-1} + \mathbf{A}^s = 0.$$

Vynásobíme-li zprava každý člen rovnice (7.6) libovolným (nenulovým) vektorem  $\mathbf{v}_0$  a utvoříme-li posloupnost vektorů

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{A} \mathbf{v}_0, & \mathbf{v}_2 &= \mathbf{A} \mathbf{v}_1 = \mathbf{A}^2 \mathbf{v}_0, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{A} \mathbf{v}_2 = \mathbf{A}^3 \mathbf{v}_0, & \dots, & \mathbf{v}_s = \mathbf{A} \mathbf{v}_{s-1} = \mathbf{A}^s \mathbf{v}_0, \end{aligned}$$

pak dosazením (7.7) do (7.6) dostáváme systém  $s$  lineárních rovnic pro  $s$  neznámých koeficientů  $p_0, p_1, \dots, p_{s-1}$

$$(7.8) \quad p_0 \mathbf{v}_0 + p_1 \mathbf{v}_1 + \dots + p_{s-1} \mathbf{v}_{s-1} = -\mathbf{v}_s.$$

Analogicky můžeme postupovat, použijeme-li upravené metody Krylovovy (Krylovovy transformace)<sup>12)</sup>.

Místo vektorů  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$  použijeme řádkových matic

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{a}_0 \mathbf{A}, & \mathbf{a}_2 &= \mathbf{a}_1 \mathbf{A} = \mathbf{a}_0 \mathbf{A}^2, \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}_2 \mathbf{A} = \mathbf{a}_0 \mathbf{A}^3, & \dots, & \mathbf{a}_s = \mathbf{a}_{s-1} \mathbf{A} = \mathbf{a}_0 \mathbf{A}^{s-1}, \end{aligned}$$

kde  $\mathbf{a}_0$  je libovolná (nenulová) řádková matice o  $s$  prvcích. A sestavíme Krylovův determinant

$$(7.10) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1, & {}^{(0)}a_1, & {}^{(0)}a_2, & \dots, & {}^{(0)}a_s \\ \alpha, & {}^{(1)}a_1, & {}^{(1)}a_2, & \dots, & {}^{(1)}a_s \\ \alpha^2, & {}^{(2)}a_1, & {}^{(2)}a_2, & \dots, & {}^{(2)}a_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^s, & {}^{(s)}a_1, & {}^{(s)}a_2, & \dots, & {}^{(s)}a_s \end{vmatrix}.$$

<sup>11)</sup> Viz [11], str. 70 a str. 142.

<sup>12)</sup> Viz [12], [14], str. 167–177, [15], str. 78 a [16], str. 263–271.



Kromě této výhody se zmiňme ještě o další výhodě.

Při řešení deformačních rovnic (6.1) určujeme hodnotu parametru  $\lambda$  který těmto rovnicím vyhovuje. Dopustíme-li se přitom relativní chyby  $\delta_\lambda$ , pak podle (3.7) je relativní chyba  $\delta_\omega$  vlastní frekvence dvojnásobná ( $\delta_\omega = 2\delta_\lambda$ ).

Při řešení rovnic (3.8) určujeme nikoliv  $\lambda$ , ale  $\alpha = \lambda^4$ . Za předpokladu, že se dopustíme relativní chyby  $\delta_\alpha$ , která je stejná jako  $\delta_\lambda$  ( $\delta_\alpha = \delta_\lambda$ ), pak  $\delta_\omega = \delta_\lambda/2$ . Dostáváme tedy vlastní frekvenci s chybou čtyřikrát menší, než v předcházejícím případě ( $\delta_\omega = \delta_\alpha/4$ ).

K určení vlastních frekvencí prutové soustavy lze místo rovnic (3.8) užít rovnic (3.9), které v maticovém tvaru zní

$$(7.14) \quad (\mathbf{A}_1 - \omega^2 \mathbf{B}) \mathbf{x} = 0.$$

Rovnice

$$(7.15) \quad |\mathbf{A}_1 - \omega^2 \mathbf{B}| = 0$$

představuje charakteristickou rovnici homogenního systému obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty:

$$(7.16) \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{q} + \mathbf{B} \ddot{\mathbf{q}} = 0.$$

Rovnice (7.16) se formálně (tj. co do tvaru) ztotožňují se systémem Lagrangeových dynamických rovnic platných pro vlastní netlumené kmitání konservativní mechanické soustavy hmotných bodů o  $s$  stupních volnosti<sup>13</sup>). Přitom složky vektoru  $\mathbf{q}$  jsou zobecněnými souřadnicemi soustavy a složky vektoru  $\ddot{\mathbf{q}}$  jsou zobecněnými zrychleními.

Tim ovšem není řečeno, že prutovou soustavu s hmotou spojitě rozloženou a současně soustředěnou v několika bodech, pro jejíž vlastní kmitání platí rovnice (7.14), je možno nahradit soustavou hmotných bodů, která by měla aspoň několik vlastních frekvencí stejných jako vyšetřovaná prutová soustava. Za jistých podmínek snad takové nahrazení bude možné. Touto otázkou se zde nebudeme zabývat.

Poznámka. Za velmi hrubé přiblížení lze považovat nahrazení prutové soustavy soustavou osamělých hmot uložených na nehmotných prutech – u pravoúhlých rámců se hmota soustřeďuje do styčnicků [2]. Při takovém přiblížení však dostaneme výsledek s uspokojivou přesností jen v některých případech.

Další tvar systému  $n$  rovnic (6.6), k němuž jsme dospěli, je vhodné převést na systém  $2n$  rovnic tvaru

$$(7.17) \quad (\mathbf{C}_2 - \lambda \mathbf{I}_{2n}) \mathbf{y} = 0,$$

kde  $\mathbf{I}_{2n}$  je jednotková matice řádu  $2n$ .

Rovnici  $|\mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} + \lambda^2 \mathbf{C}| = 0$ , které vyhovuje řešení systému (6.6) přiřadíme systém diferenciálních rovnic druhého řádu

$$(7.18) \quad \mathbf{A} \mathbf{q} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \ddot{\mathbf{q}} = 0,$$

<sup>13</sup>) Viz [18], str. 375.



který převedeme známým způsobem na systém diferenciálních rovnic prvního řádu

$$(7.19) \quad Dy = C_2 y,$$

kde  $D$  je diferenciální operátor a

$$(7.20) \quad y = \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} O, & I_n \\ -C^{-1}A, & -C^{-1}B \end{pmatrix},$$

přičemž  $I_n$  je jednotková matice řádu  $n$ . Dosazením  $\lambda$  místo  $D$  v rovnicích (7.19) dostáváme systém (7.17), který můžeme dále řešit jako systém (7.1).

Rovněž systém (6.8) je vhodné převést na tvar (7.17), jak doporučuje akad. A. N. KRYLOV [12]. Takové převedení nevyžaduje žádných početních operací, neboť místo matice  $C$  vyskytující se v rovnicích (6.6) máme zde jednotkovou matici  $I$ . Přitom převaha diagonálních členů nad ostatními členy, která existuje u deformačních rovnic, se vůbec neporuší. Proto s výhodou můžeme k dalšímu řešení použít iterační metody navržené W. RITZEM<sup>14</sup>).

Ze stejných důvodů je vhodné použít Ritzovy metody k řešení rovnic (6.10).

## 8. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Hodnoty  $\lambda$  vyhovující rovnicím (7.1) a jim odpovídající vektory  $x$ , které určují tvar vlastního kmitání konstrukce, jsou přibližnými hodnotami charakteristických čísel a charakteristických vektorů, neboť v deformačních rovnicích jsou funkce kmitočtu nahrazeny aproximativními funkcemi (2.3) a (2.9). Ke zpřesnění těchto hodnot můžeme použít iterační metody navržené v [7].

Přesnost výsledných hodnot je ovlivňována jen použitím funkcí (2.3) a nikoliv funkcí (2.9), neboť funkce (2.9) v intervalech (2.5) se téměř ztotožňují s přesnými funkcemi (1.4) a (1.8) (viz tab. II).

Koeficienty  $b_j$  při  $\lambda^4$  ve (2.2) byly stanoveny tak, aby se dosáhlo dobrého přiblížení funkcí  $F_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$ , v celém intervalu (2.4), tj. když v podmínce (3.10) je  $C = 2,4$ . V těch případech, kdy lze očekávat splnění podmínky (3.10) pro  $C < 2,4$  (např. u vysokých konstrukcí tvořených mnoha podlažimi nebo u oblouků, které rozdělíme na velký počet částí a u nichž určujeme jen nejnižší kmitočty), je vhodné k dosažení větší přesnosti výsledných hodnot použít koeficientů  $b_j$  při  $\lambda^4$  ve (2.2) nepatrně odlišných od těch koeficientů, které se vyskytují ve (2.3).

V tab. IV jsou uvedeny koeficienty  $b_j$ , které jsme určili z podmínky, aby hodnoty funkcí tvaru (2.2) se ztotožňovaly s přesnými hodnotami funkcí  $F_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$ , v bodech  $\lambda = 0,8; 1,2; 1,6; 2,0; 2,4$ , když  $a_j = F_j(0)$ .

Jestliže podmínka (3.10) je splněna např. při  $C = 1$ , je vhodné místo koeficientů  $b_j$  při  $\lambda^4$  ve (2.3) použít koeficienty uvedené v tab. IV pro  $\lambda = 0,8$ . Tím vystihneme téměř přesně funkce  $F_j$  v intervalu  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Při  $C = 1,8$  užijeme koeficientů uvedených

<sup>14</sup>) Viz [19], str. 292–294.

v tab. IV pro  $\lambda = 1,6$  apod. Leží-li charakteristické číslo příslušející určitému prutu konstrukce v blízkém okolí bodu  $\lambda = 2,4$ , vezmeme koeficienty z posledního sloupce tab. IV.

Tabulka IV

$b_j \backslash \lambda$	$\lambda = 0,8$	$\lambda = 1,6$	$\lambda = 1,8$	$\lambda = 2,0$	$\lambda = 2,4$
$b_1$	0,007153	0,007176	0,007246	0,007403	0,007701
$b_2$	-0,009521	-0,009558	-0,009631	-0,009793	-0,010101
$b_3$	0,030981	0,031101	0,031432	0,032146	0,033522
$b_4$	0,052417	0,052541	0,052890	0,053646	0,055098
$b_5$	-0,128711	-0,129258	-0,130762	-0,134026	-0,140313
$b_6$	-0,371582	-0,372188	-0,373849	-0,377450	-0,384351
$b_7$	-0,019067	-0,019198	-0,19530	-0,020273	-0,021800
$b_8$	0,039355	0,039680	0,040555	0,042516	0,046554
$b_9$	0,085840	0,086304	0,087622	0,090566	0,096606
$b_{10}$	-0,139575	-0,140813	-0,144212	-0,151838	-0,167553
$b_{11}$	-0,486182	-0,488079	-0,493321	-0,505054	-0,529091
$b_{12}$	-0,235938	-0,236830	-0,239313	-0,244863	-0,256230

Poznamenejme přitom, že při snížení hodnoty  $C$  ve (3.10) se sníží rovněž přípustná nejmenší štíhlost  $l/i_0$  jednoho dílu oblouku nebo prutu konstrukce.

Tak např. při  $C = \lambda = 1$  místo (3.19) máme podmínku (viz (3.16) až (3.18))  $l/i_0 \geq 2$  a místo (5.7) platí (viz (5.5) a (5.6))  $l/i_0 \geq 2\sqrt{(E/G)}$ .

Snadno podle (1.2) a (2.8) můžeme zjistit, že dělením oblouku (prutu) na *libovolně* velký počet částí je možno splnit nejen podmínku (3.10), ale i podmínky (2.5), které jsou ekvivalentní s podmínkami pro přípustnou nejmenší štíhlost (odst. 3 a 5). Zkrátíme-li totiž délku  $l$  libovolně části oblouku (prutu)  $n$ -krát, pak se zmenší i štíhlost  $l/i_0$  této části také  $n$ -krát. Přípustná štíhlost (při  $\psi = \vartheta = 0,5$ ) však se zmenší až  $n^2$ -krát (viz (3.16) a (5.6)). Proto při libovolně velkém  $n$  je skutečná štíhlost jedné části vždy větší než přípustná nejmenší štíhlost.

K velmi přesnému vyjádření funkcí  $F_j$  v intervalu (2.4) je možno použít rozvoje (6.11), kde za  $b_j$  dosadíme hodnoty z tab. IV pro  $\lambda = 0,8$  a konstanty  $c_j$  určíme z (6.12), dosadíme-li  $\lambda_c = 2,2$ . Rozvoje (6.14) lze užít k dokonalému vyjádření funkcí (1.4) a (1.8) uvnitř i vně intervalů (2.5).

Často se vyžaduje výpočet jen první vlastní frekvence nebo prvních dvou až tří vlastních frekvencí konstrukce. Pak je výhodné rovnice (7.1) vynásobit maticí  $\mathbf{A}_1^{-1}$ , která je inverzní k  $\mathbf{A}_1$ . Místo (7.2) dostáváme

$$(8.1) \quad \left( \mathbf{B} - \frac{1}{\lambda^4} \mathbf{I} \right) \mathbf{x} = 0,$$

kde  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1$ .

Pro první vlastní kruhovou frekvenci  $\omega_{(1)}$  platí

$$(8.2) \quad \omega_{(1)} = \lambda_{\min}^2 \sqrt{K},$$

kde  $K$  je hodnota podle (3.7a) a  $\lambda_{\min}$  je charakteristické číslo vyhovující rovnicím (7.1) nebo (8.1). Přitom  $K$  i  $\lambda_{\min}$  se musí vztahovat k jedné (zvolené) části oblouku nebo k jednomu prutu dané konstrukce. Proto hodnota

$$(8.3) \quad \beta_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\min}^4}$$

je dominantním charakteristickým číslem matice  $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1$ .

Bylo vypracováno k určení dominantního charakteristického čísla několik velmi efektivních metod (např. metoda iterační, metoda vycházející z platnosti Sylvestrový věty) a značný počet odhadů horních i spodních hranic tohoto čísla [11], [15], [16], [20], [21]. Užití zmíněných metod a odhadů nevyžaduje převádění charakteristické rovnice v mnohočlen.

Máme-li určené dominantní charakteristické číslo  $\beta_{\max}$  matice  $\mathbf{B}$ , můžeme určit (např. snížením řádu charakteristické rovnice  $|\mathbf{B} - \beta \mathbf{I}| = 0$ ,  $\beta = 1/\lambda^4$ ) také subdominantní charakteristické číslo a z něho vypočítat druhou vlastní frekvenci konstrukce. Obdobně lze určit i vyšší vlastní frekvence.

Prvky matice  $\mathbf{A}_1$  v (7.1) jsou lineárními kombinacemi jen hodnot funkcí kmitočtu  $F_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, 12$ , a  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  v bodě  $\lambda = \psi = \vartheta = 0$ . Proto matice  $\mathbf{A}_1$  je maticí tuhosti vyšetřované prutové soustavy a její prvky tvoří koeficienty při neznámých v deformačních rovnicích platných pro statické zatížení. Z tohoto důvodu je matice  $\mathbf{A}_1$  vždy regulární ( $|\mathbf{A}_1| \neq 0$ ), a proto existuje inverzní matice  $\mathbf{A}_1^{-1}$ , které použijeme k určení matice  $\mathbf{B}$ .

Změna rozložení hmoty (zatížení) podél jednotlivých prutů dané konstrukce se projeví jen změnou prvků matice  $\mathbf{B}_1$  a nikoliv změnou prvků matice  $\mathbf{A}_1$ . Proto matice  $\mathbf{A}_1^{-1}$  lze s výhodou použít k vyšetření vlastních frekvencí konstrukce při různých případech rozložení hmoty.

Prvky matice  $\mathbf{B}_1$  v (7.1) lze použitím tab. IV upřesnit, známe-li přibližnou hodnotu  $\bar{\lambda}$  charakteristického čísla.

Je-li  $\bar{\mathbf{B}}_1$  matice se zpřesněnými prvky, pak místo (8.1) máme

$$(8.4) \quad (\bar{\mathbf{B}} - 1/\lambda^4 \mathbf{I}) \mathbf{x} = 0,$$

kde  $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{A}_1^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1$ .

Hodnota  $\lambda$  vyhovující rovnicím (8.4) je pak zpřesněním přibližné hodnoty  $\bar{\lambda}$ .

Matice  $\mathbf{A}_1^{-1}$  je možno použít i k řešení rovnic (6.15), k nimž jsme dospěli použitím rozvoju (6.12) a (6.14).

Označíme-li

$$(8.5) \quad \beta = \frac{1}{\lambda^4}$$

a dělíme-li rovnice (6.15) veličinou  $\lambda^8$ , máme

$$(8.6) \quad (\mathbf{C}_1 + \beta \mathbf{B}_1 + \beta^2 \mathbf{A}_1) \mathbf{x} = 0.$$

Rovnice (8.6) převedeme pak na tvar (7.17) stejným způsobem jako rovnice (6.6). Tedy

$$(8.7) \quad \mathbf{C}_1 \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}_1 \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_1 \ddot{\mathbf{q}} = 0,$$

a proto

$$(8.8) \quad (\mathbf{D} - \beta \mathbf{I}) \mathbf{y} = 0,$$

kde

$$(8.9) \quad \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{Bmatrix} \mathbf{O}, & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1, & -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1 \end{Bmatrix}.$$

První vlastní kruhovou frekvenci  $\omega_{(1)}$  nebo základní kmitočet  $n_{(1)} = \omega_{(1)}/2\pi$  určíme opět z dominantního charakteristického čísla  $\beta_{\max}$  matice  $\mathbf{D}$ .

V projekční praxi je hledání vlastních frekvencí konstrukcí spojeno s prováděním statického výpočtu. Provádíme-li statický výpočet konstrukce metodou deformační, můžeme s výhodou k řešení výsledného systému deformačních rovnic s několika různými pravými stranami použít matice  $\mathbf{A}_1^{-1}$ , která je inverzní k matici tuhosti  $\mathbf{A}_1$ .

Takový postup podstatně usnadní počítařskou práci spojenou se statickým i dynamickým posouzením konstrukcí.

#### Literatura

- [1] Koloušek V.: Dynamika stavebních konstrukcí II. SNTL, Praha, 1956.
- [2] Снитко Н. К.: Динамика сооружений. Госстройиздат, Москва, 1960.
- [3] Waltking F. W.: Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern. Ingenieur-Archiv 6 (V), S. 429—449, 1934.
- [4] Чудновский В. Г.: Частота власних коливань стрижнів і рам і динамічний критерій їх стійкості. Вид. АН СССР, Київ, 1939.
- [5] Чудновский В. Г.: Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Изд. АН УССР, Киев, 1952.
- [6] Koloušek V.: Kmitání patrových rámtů. Technický obzor, č. 21—23, 1942.
- [7] Fiřt V.: Výpočet vlastních čísel na základě transformace homogenního systému algebraických rovnic. Aplikace matematiky 2(6), 1961.
- [8] Fiřt V.: Příspěvek k výpočtu vlastních (charakteristických) čísel. Aplikace matematiky 1 (7), 1962.
- [9] Пиковский А. А.: Статика стержневых систем со сжатыми элементами. Физматгиз, Москва, 1961.
- [10] Кармишин А. В., Шолухова Р. С.: Некоторые формулы приведения алгебраических определителей к полиномиальному виду. Вопросы механики, вып. 193. Изд. московского университета, 1961.
- [11] Frazer R. A., Duncan W. J., Collar A. R.: Elementary Matrices and some Applications to Dynamics and Differential Equations. University Press, Cambridge, 1955.
- [12] Крылов А. Н.: О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. Известия АН СССР, отд. мат. и естеств. наук, стр. 491—539, 1931.

- [13] Данилевский А.: О численном решении векового уравнения. Математический сборник, т. 2 (44), вып. 1, № 1, стр. 169—171, Москва, 1931.
- [14] Гантмахер Ф. Р.: Теория матриц. Гостехтеорегиздат, Москва, 1953.
- [15] Смирнов А. Ф.: Устойчивость и колебания сооружений. Трансжелдориздат, Москва, 1958.
- [16] Фадеев Л. К., Фадеева В. Н.: Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, Москва, 1960.
- [17] Kriso K.: Beitrag zur Ermittlung der Eigewerte aus Eigewertdeterminanten. Abhandlungen der IVVN, V. VII., S. 227—244, A.—G. Gebr. Leemann, Zürich, 1943/44.
- [18] Lagrange J. L.: Mécanique analytique. Oeuvres, Gauthier-Villars, Paris, 1888.
- [19] Ritz W.: Oeuvres. Gauthier-Villars, Paris, 1911.
- [20] Parodi M.: La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications. Gauthier-Villars, Paris, 1959.
- [21] Маянц Л. С.: Теория и расчет колебаний молекул. Изд. АН СССР, Москва, 1960.

## Резюме

### О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ АРОК И ЭТАЖНЫХ РАМ В ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВЕ

ВЛАДИМИР ФИРСТ (Vladimír Fiřt)

Функции частоты  $F_j, j = 1, 2, \dots, 12, f_i, i = 1, 2, 3, 4$ , встречающиеся в соотношениях (1.1), (1.5), (1.6), (3.3) и в соотношениях, выражающих зависимость между концевыми силами и деформациями стержня, колеблющегося в пространстве (см. [1], стр. 156—158), заменены аппроксимационными функциями.

С учетом специфических свойств функций  $F_j, j = 1, 2, \dots, 12$ , в точке  $\lambda = 0$  (где  $\lambda$  — параметр, определенный формулой (1.2)) предложено представить эти функции в интервале  $0 \leq \lambda \leq 2,4$  в виде (2.2), где  $a_j = F_j(0)$  и  $b_j, j = 1, 2, \dots, \dots, 12$ , — константы. Функции  $f_i, i = 1, 2, 3, 4$ , аппроксимируются в интервалах (2.5) уравнениями (2.9), где  $c$  и  $k$  — константы стержня по (2.8). К более точному представлению функций частоты можно использовать разложения (6.11) и (6.14).

В отделах 3, 5 и 8 показано, что произвольную действительную стержневую систему, колеблющуюся в плоскости или пространстве, можно всегда разделить на столько частей, чтобы выполнялись условия (2.4) и (2.5).

В случае этажных рам с подвижными узлами условия (2.4) и (2.5) обычно выполнены при нескольких собственных частотах, и не надо отдельные стержни делить на части (отдел 4).

В результате применения аппроксимационных функций вида (2.2) и (2.9) получена однородная система уравнений деформаций вида

$$\sum_{j=1}^s (a_{i,j} - b_{i,j}\lambda^4) x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

где  $a_{i,j}, b_{i,j}$  — константы. Применяв разложения (6.11) и (6.14), получим систему уравнений в конечном виде (6.15).

В отделе 6 предложены разложения функций частоты в степенные ряды для  $\lambda > 2,4$ .

В двух последних отделах настоящей статьи говорится о решении конечных уравнений, и указываются выгоды, которых можно достичь, применяя предложенные аппроксимационные функции.

## Summary

### PROPER OSCILLATIONS OF ARCHES AND FRAMES IN THE PLANE AND IN SPACE

VLADIMÍR FIŘT

The functions  $F_j, f_i$  ( $j = 1, 2, \dots, 12, i = 1, 2, 3, 4$ ) of frequency, which appear in (1.1), (1.5), (1.6), (3.3) and in the relations between terminal forces and deflections of a bar oscillating in space (see [1], pp. 156–158) are approximated.

Taking into account the specific behaviour of the functions  $F_j$  at  $\lambda = 0$  ( $\lambda$  is the parameter determined by (1.2)), it is proposed to use approximations of the form (2.2) in the interval  $0 \leq \lambda \leq 2,4$ , with  $a_j = F_j(0)$  and constants  $b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 12$ ). The functions  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) are approximated in the intervals (2.5) by functions (2.9) where  $c, k$  are constants chosen according to (2.8). More accurate expressions are obtained by using the expansions (6.11) and (6.14).

In sections 3, 5 and 8 it is shown that every actual frame network performing planer or spatial oscillations can be subdivided into parts which satisfy the conditions (2.4) and (2.5).

For frames with movable joints, these conditions are often satisfied for several proper frequencies without recourse to subdivision (section 4).

Using approximating functions in the form (2.2) and (2.9), the following homogenous system of equations of deflections is obtained:

$$\sum_{j=1}^s (a_{i,j} - b_{i,j}\lambda^4) x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s;$$

here the  $a_{i,j}, b_{i,j}$  are constants. Using the expressions (6.11), (6.14), we obtain the final system of equations (6.15).

In section 6 there are proposed power series expansions of these functions for  $\lambda > 2,4$ .

The concluding two sections treat the solution of the equations obtained and the advantages obtained by employing the proposed approximating functions.

Adresa autora: Inž. Vladimír Fiřt, Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.