Aplikace matematiky

Zbyněk Nádeník

Přibližně konformní projekce referenčního elipsoidu

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 6, 441–449

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102827

PŘIBLIŽNĚ KONFORMNÍ PROJEKCE REFERENČNÍHO ELIPSOIDU

ZBYNĚK NÁDENÍK

(Došlo dne 29. prosince 1961.)

Jako zobecnění stereografické projekce kulové plochy je vyšetřována projekce elipsoidu do jeho tečné roviny ze středů na normále dotykového bodu.

Úvod. V roce 1957 publikoval v tomto časopise J. ŠMAHEL práci [2]. V ní vyšetřoval projekci rotačního elipsoidu na jeho tečnou rovinu τ v jeho bodě O z bodu S na normále elipsoidu v bodě O, při čemž bod S leží v tom poloprostoru vyťatém rovinou τ, který obsahuje střed elipsoidu, a vzdálenost v bodu S od bodu O je $v = 2(MN)^{\frac{1}{2}}$; M, N jsou poloměry hlavních křivostí elipsoidu v bodě O. Volba vzdálenosti bodu S od bodu O není v citované práci odůvodněna.

V regulárním bodě O plochy sestrojme její tečnou rovinu τ a normálnímu řezu plochy v bodě O přiřaďme na normále v bodě O jistý bod S, ze kterého ten řez promítneme na tečnou rovinu τ. Provedeme-li to pro všecky normální řezy v bodě O, dostaneme zobrazení plochy do její tečné roviny v bodě O, které je vyšetřováno v odst. 1 a 2. V odst. 3 a 4 je toto zobrazení studováno hlavně s požadavkem co nejlepšího přiblížení v okolí bodu O k zobrazení konformnímu a v odst. 5 s doplňujícím požadavkem co nejmenšího délkového zkreslení v okolí bodu O. V odst. 5 a 6 jsou výsledky aplikovány na referenční elipsoid. Ukazuje se, že volba konstantní vzdálenosti $v = 2(MN)^{1/2}$ středu promítání S od bodu O nedává nejlepší výsledky.

1. Zvolme v prostoru soustavu pravoúhlých souřadnic x, y, z s počátkem O, v rovině (xy) ještě soustavu polárních souřadnic r, ω s týmž počátkem O a s amplitudou ω měřenou kladně ve smyslu od kladné části osy x ke kladné části osy y a konečně funkci $f(r, \omega)$ s těmito vlastnostmi: a) je definována pro $\omega \in (-\infty, \infty)$ a $r \in \langle 0, \varrho)$, kde ϱ je kladné číslo; b) je periodická v argumentu ω s periodou 2π; c) v dvojrozměrném intervalu $I = \langle 0, \varrho) \times (-\infty, \infty)$ má spojité všecky parciální derivace (tento předpoklad by bylo možno velmi zeslabit, ale bez jakéhokoliv užitku pro naše závěry); d) pro všecka ω je

$$(1,1) \qquad f(0, \omega) = 0\,, \quad \left[\frac{\partial}{\partial r} f(r, \omega)\right]_{r=0} = 0\,;$$

e) v intervalu I je

$$(1,2) \qquad \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(r, \omega) > 0\,;$$

parciální derivací (libovolného řádu) podle r v bodě s $r = 0$ rozumíme ovšem tu derivaci zprava.

Množina bodů o souřadnicích

$$(1,3) \qquad x = r \cos \omega\,, \quad y = r \sin \omega\,, \quad z = f(r, \omega)$$

je plocha, která se v počátku O dotýká roviny (xy); v parametrech r, ω je bod O nepodstatně singulární. Uzavřená polorovina $v(\omega)$, která má hraniční přímku v ose z a jejíž stopa na rovině (xy) má amplitudu ω, protíná plochu v normálním řezu s křivostí $1 : R(r, \omega)$, pro niž podle (1,2) platí

$$(1,4) \qquad \frac{1}{R(r, \omega)} = \frac{\partial^2 f(r, \omega)}{\partial r^2} \left\{1 + \left[\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial r}\right]^2\right\}^{-3/2}.$$

Abychom byli stručnější, zavedeme toto označení (pro poloměr křivosti uvedeného řezu v bodě O „zprava"):

$$(1,5) \qquad R(0, \omega) = R\,; \quad \left[\frac{\partial}{\partial r} R(r, \omega)\right]_{r=0} = R_r\,; \quad \left[\frac{\partial}{\partial \omega} R(r, \omega)\right]_{r=0} = R_\omega\,;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r \partial \omega} R(r, \omega)\right]_{r=0} = R_{r\omega}\,; \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} R(r, \omega)\right]_{r=0} = R_{rr}; \quad (R_\omega)^2 = R_\omega^2\,; \quad (R_r)^2 = R_r^2\,.$$

Podle (1,4) a (1,1) je pak

(1,6)
$$\left[\frac{\partial^2 f(r, \omega)}{\partial r^2}\right]_{r=0} = \frac{1}{R}\,; \quad \left[\frac{\partial^3 f(r, \omega)}{\partial r^3}\right]_{r=0} = -\frac{R_r}{R^2}\,; \quad \left[\frac{\partial^4 f(r, \omega)}{\partial r^4}\right]_{r=0} = \frac{3 + 2R_r^2 - RR_{rr}}{R^3}$$

a z (1,1) a (1,6) plyne

$$(1,7) \qquad f(r, \omega) = \frac{1}{2R} r^2 - \frac{R_r}{6R^2} r^3 + \frac{3 + 2R_r^2 - RR_{rr}}{24R^3} r^4 + (5)\,.$$

Pro koeficienty první základní formy $ds^2 = E(r, \omega)\, dr^2 + 2F(r, \omega)\, dr\, d\omega + G(r, \omega)\, d\omega^2$ plochy (1,3) platí v důsledku (1,1) a (1,7)

(1,8)
$$E(r, \omega) = 1 + \left[\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial r}\right]^2 = 1 + \frac{1}{R^2} r^2 - \frac{R_r}{R^3} r^3 + \frac{12 + 11R_r^2 - 4RR_{rr}}{12R^4} r^4 + (5)\,,$$

$$F(r, \omega) = \frac{\partial f(r, \omega)}{\partial r} \frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} = -\frac{R_\omega}{2R^3} r^3 + \frac{7R_r R_\omega - 2RR_{r\omega}}{12R^4} r^4 + (5)\,,$$

$$G(r, \omega) = r^2 + \left[\frac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega}\right]^2 = r^2 + \frac{R_\omega^2}{4R^4} r^4 + \frac{(RR_{r\omega} - 2R_r R_\omega) R_\omega}{6R^5} r^5 + (6)\,.$$

Tudíž

$$(1,9)\qquad ds^2 = dr^2 + \left\{\frac{1}{R^2}\,dr^2 + d\omega^2\right\} r^2 - \left\{\frac{R_r}{R^3}\,dr^2 + \frac{R_\omega}{R^3}\,dr\,d\omega\right\} r^3 +$$

$$+ \left\{\frac{12 + 11R_r^2 - 4RR_{rr}}{12R^4}\,dr^2 + \frac{7R_rR_\omega - 2RR_{r\omega}}{6R^4}\,dr\,d\omega + \frac{R_\omega^2}{4R^4}\,d\omega^2\right\} r^4 + (5)\,.$$

2. Zvolme dále reálnou funkci $v = v(\omega)$ s těmito vlastnostmi: a) je definovaná pro všecka ω; b) je periodická s periodou 2π; c) pro všecka ω má spojité všecky derivace; d) v intervalu I je

$$(2,1)\qquad v(\omega) - f(r, \omega) > 0\,.$$

Ve výrazech, v nichž užijeme označení (1,5), budeme zkráceně psát $v(\omega) = v$ a $dv(\omega)/d\omega = v'$.

Z bodu S o souřadnicích $[0, 0, v(\omega)]$ promítneme do roviny (xy) všecky ty body naší plochy (1,3), které patří jejímu normálnímu řezu s polorovinou $v(\omega)$. Vzhledem k (2,1) má pak bod plochy (1,3) průmět v bodě se souřadnicemi

$$(2,2)\qquad x^* = \frac{r\,.\,v(\omega)\,.\,\cos\omega}{v(\omega) - f(r, \omega)}\,,\quad y^* = \frac{r\,.\,v(\omega)\,.\,\sin\omega}{v(\omega) - f(r, \omega)}\,,\quad z^* = 0\,.$$

Čtverec lineárního elementu $ds^{*2} = E^*(r, \omega)\,dr^2 + 2F^*(r, \omega)\,dr\,d\omega + G^*(r, \omega)\,d\omega^2$ roviny (2,2) má podle (1,7) koeficienty

$$(2,3)\qquad E^*(r, \omega) = \frac{v^2(\omega)\,.\left[v(\omega) - f(r, \omega) + r\,.\,\dfrac{\partial f(r, \omega)}{\partial r}\right]^2}{[v(\omega) - f(r, \omega)]^4} =$$

$$= 1 + \frac{3}{vR}\,r^2 - \frac{4R_r}{3vR^2}\,r^3 + \frac{5v(3 + 2R_r^2 - RR_{rr}) + 57R}{12v^2R^3}\,r^4 + (5)\,,$$

$$F^*(r, \omega) =$$

$$= \frac{r\,.\,v(\omega)\,.\left[v(\omega) - f(r, \omega) + r\,.\,\dfrac{\partial f(r, \omega)}{\partial r}\right]\left[v(\omega)\,\dfrac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} - \dfrac{dv(\omega)}{d\omega}\,f(r, \omega)\right]}{[v(\omega) - f(r, \omega)]^4} =$$

$$= -\,\frac{vR_\omega + v'R}{2v^2R^2}\,r^3 + \frac{v'RR_r + v(2R_rR_\omega - RR_{r\omega})}{6v^2R^3}\,r^4 + (5)\,,$$

$$G^*(r, \omega) = r^2\,.\,\frac{v^2(\omega)\,.\,[v(\omega) - f(r, \omega)]^2 + \left[v(\omega)\,\dfrac{\partial f(r, \omega)}{\partial \omega} - \dfrac{dv(\omega)}{d\omega}\,f(r, \omega)\right]^2}{[v(\omega) - f(r, \omega)]^4} =$$

$$= r^2 + \frac{1}{vR}\,r^4 - \frac{R_r}{3vR^2}\,r^5 + (6)\,.$$

Tudíž

$$(2,4)\quad ds^{*2} = dr^2 + \left[\frac{3}{vR}\,dr^2 + d\omega^2\right] r^2 - \left[\frac{4R_r}{3vR^2}\,dr^2 + \frac{vR_\omega + v'R}{v^2R^2}\,dr\,d\omega\right] r^3 +$$

$$+ \left[\frac{5v(3 + 2R_r^2 - RR_{rr}) + 57R}{12v^2R^3}\,dr^2 + \frac{v'RR_r + v(2R_rR_\omega - RR_{r\omega})}{3v^2R^3}\,dr\,d\omega + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{vR}\,d\omega^2\right] r^4 + (5)\,.$$

3. Podle (1,8) a (2,3) je

$$(3,1)\quad h_e(r, \omega) = F(r, \omega)\,G^*(r, \omega) - F^*(r, \omega)\,G(r, \omega) = \frac{v'R^2 - v^2R_\omega + vRR_\omega}{2v^2R^3}\,r^5 -$$

$$- \frac{2v'R^2R_r - v^2(7R_rR_\omega - 2RR_{r\omega}) + 2vR(2R_rR_\omega - RR_{r\omega})}{12v^2R^4}\,r^6 + (7)\,,$$

$$h_f(r, \omega) = G(r, \omega)\,E^*(r, \omega) - G^*(r, \omega)\,E(r, \omega) = \frac{8R^3 + v(R_\omega^2 - 4R^2)}{4vR^2}\,r^4 +$$

$$+ \frac{v(6R^2R_r - 2R_rR_\omega^2 + RR_\omega R_{r\omega}) - 6R^3R_r}{6vR^5}\,r^5 + (6)\,,$$

$$h_g(r, \omega) = E(r, \omega)\,F^*(r, \omega) - E^*(r, \omega)\,F(r, \omega) = -\frac{v'R^2 - v^2R_\omega + vRR_\omega}{2v^2R^3}\,r^3 +$$

$$+ \frac{2v'R^2R_r - v^2(7R_rR_\omega - 2RR_{r\omega}) + 2vR(2R_rR_\omega - RR_{r\omega})}{12v^2R^4}\,r^4 + (5)\,.$$

Diskuzi v odst. 3 a 4 provedeme jen pro takové body, které jsou na rotačním elipsoidu. Jsou to tyto tři typy bodů: I. bod nikoliv kruhový, který alespoň pro jeden svůj normální řez není vrchol (body rotačního elipsoidu mimo rovník a póly); II. bod nikoliv kruhový, který je vrchol na všech svých normálních řezech (jen body na rovníku); III. bod kruhový, jehož všecky normální řezy mají v něm vrchol (jen oba póly). Bod O naší plochy je ovšem kruhový při $R(0, \omega) = R =$ konst. a považujeme jej za vrchol normálního řezu s polorovinou $\nu(\omega)$, jestliže $[\partial R\,(r, \omega)/\partial r]_{r=0} = R_r = 0$. Z (3,1) plyne

$$(3,2)\qquad \lim_{r\to 0} \frac{h_e}{r^5} = -\lim_{r\to 0} \frac{h_g}{r^3} = \frac{v'R^2 - v^2R_\omega + vRR_\omega}{2v^2R^3}\,,$$

$$(3,3)\qquad \lim_{r\to 0} \frac{h_f}{r^4} = \frac{v(R_\omega^2 - 4R^2) + 8R^3}{4vR^2}\,.$$

Identickým anulováním v ω limit (3,2) dostaneme pro funkci $v = v(\omega)$ Riccatiho rovnici s obecným řešením

$$(3,4)\qquad v = \frac{2R}{1 + 2cR^2}\,,\quad c = \text{konst.}\,;$$

konstanta c je omezena předpoklady a) a d) z odst. 2. Při (3,4) plyne z (3,3)

$$\lim_{r\to 0} \frac{h_f}{r^4} = \frac{8cR^4 + R_\omega^2}{4R^2}. \tag{3,5}$$

Identickým anulováním v ω této limity dostaneme pro R diferenciální rovnici, z níž vzhledem k periodicitě funkce R plyne $R =$ konst. Z toho a z (3,1) se pak již snadno odvodí:

V bodě O typu I nebo II vymizí identicky v ω limity (3,2) jedině při (3,4); limita (3,5) pak identicky v ω nevymizí. V bodě O typu II je potom ještě (neboť v něm je $R_r = 0$ identicky v ω)

$$\lim_{r\to 0} \frac{h_e}{r^6} = \lim_{r\to 0} \frac{h_g}{r^4} = 0, \tag{3,6}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^5} \left(h_f - \frac{8cR^4 + R_\omega^2}{4R^2} r^4 \right) = 0. \tag{3,7}$$

V bodě O typu III (v němž je $R_\omega = R_r = 0$ identicky v ω) vymizí limity (3,2) a (3,3) identicky v ω jedině při $v = 2R$, tj. pro (3,4) s $c = 0$, a pak ještě platí (3,6) a $\lim\limits_{r\to 0} h_f : r^5 = 0$.

Geometrický význam těchto tvrzení pro hlavní ortogonální kongruence křivek našeho zobrazení s diferenciální rovnicí $h_g \, dr^2 - h_f \, dr \, d\omega + h_e \, d\omega^2 = 0$ je jasný a nebudeme jej podrobně rozvádět.

4. Dejme tomu, že má matice

$$\begin{pmatrix} E & F & G \\ E^* & F^* & G^* \end{pmatrix}$$

v jistém okolí bodu O — s výjimkou bodu O samého — hodnost 2. To znamená, že v každém bodě tohoto okolí s výjimkou bodu O existuje maximální a minimální délkové zkreslení $ds^* : ds$. Označme je σ_1 a σ_2. Jejich čtverce jsou kořeny rovnice v σ^2

$$(EG - F^2)\,\sigma^4 - (EG^* + GE^* - 2FF^*)\,\sigma^2 + (E^*G^* - F^{*2}) = 0. \tag{4,1}$$

Z (1,8), (2,3) a (4,1) lze vypočítat σ_1 a σ_2 pro naše zobrazení a pak zkreslení σ ve směru, svírajícím úhel α se směrem se zkreslením σ_1, ze známé relace $\sigma^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \sin^2 \alpha$ [1]).

[1]) Fundamentální částí simultánní geometrie první a druhé základní formy plochy π je Eulerova věta, objevená Eulerem r. 1760. K ní se přimyká indikatrix, studovaná Dupinem r. 1813. Z těchto výsledků pouhou zcela formální záměnou druhé základní formy plochy π za první základní formu jiné plochy π^* dostaneme tu část simultánní geometrie prvních základních forem ploch π a π^*, která se v matematické kartografii při studiu základů zobrazení plochy π na plochu π^* spojuje se jménem Tissotovým (Tissotova indikatrix aj.). Tissot publikoval dotyčné výsledky v r. 1877—1881 a proto se mi zdá užívání jeho jména v uvedených souvislostech velmi problematické.

Pro výpočet čtverce zkreslení $\sigma^2 = ds^{*2} : ds^2$ zvolíme jinou cestu: Vyjádříme je ve tvaru $\sigma^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + (4)$, kde $\alpha_0, \ldots, \alpha_3$ jsou funkce jen argumentů ω a $d\omega : dr$.

Ve směru $dr = 0$ je čtverec délkového zkreslení $ds^{*2} : ds^2 = G^*(r, \omega) : G(r, \omega)$, takže z (1,8) a (2,3) dostaneme – ovšem v bodě různém od O:

$$(4,2)\qquad \frac{ds^{*2}}{ds^2} = 1 + \frac{4R^3 - vR_\omega^2}{4vR^4} r^2 - \frac{v(RR_{r\omega} - 2R_r R_\omega) R_\omega + 2R^3 R_r}{6vR^5} r^3 + (4)\,.$$

Elementárním výpočtem se přesvědčíme o správnosti tohoto pomocného tvrzení: Mají-li funkce $h(x)$ a $g(x)$ v bodě x_0 derivace čtvrtého řádu a $g(x_0) \neq 0$, $g^{\cdot}(x_0) = h^{\cdot}(x_0) = 0$ (tečka znamená derivaci podle x), je v bodě x_0

$$\left(\frac{h}{g}\right)^{\cdot} = 0\,, \quad \left(\frac{h}{g}\right)^{\cdot\cdot} = \frac{1}{g^2}(h^{\cdot\cdot}g - hg^{\cdot\cdot})\,, \quad \left(\frac{h}{g}\right)^{\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{g^2}(h^{\cdot\cdot\cdot}g - hg^{\cdot\cdot\cdot})\,,$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{g^3}\left[f^{\cdot\cdot\cdot\cdot}g^2 - 6f^{\cdot\cdot}gg^{\cdot\cdot} + f(6g^{\cdot\cdot 2} - gg^{\cdot\cdot\cdot\cdot})\right].$$

Pomocí tohoto pravidla a (1,9) a (2,4) snadno zjistíme první čtyři parciální derivace podle r funkce $ds^{*2} : ds^2$ a získáme tak pro čtverec zkreslení ve směru $d\omega : dr$ při $dr \neq 0$:

(4,3)

$$\frac{ds^{*2}}{ds^2} = 1 + \frac{3R - v}{vR^2} r^2 + \left[\frac{(3v - 4R) R_r}{3vR^3} - \frac{v'R^2 - v^2 R_\omega + vRR_\omega}{v^2 R^3} \cdot \frac{d\omega}{dr}\right] r^3 +$$
$$+ \left[-\frac{v^2(11R_r^2 - 4RR_{rr}) + vR(21 - 10R_r^2 + 5RR_{rr}) - 57R^2}{12v^2R^4} + \right.$$
$$+ \frac{2v'R^2R_r - v^2(7R_rR_\omega - 2RR_{r\omega}) + 2vR(2R_rR_\omega - RR_{r\omega})}{6v^2R^4} \cdot \frac{d\omega}{dr} +$$
$$\left. + \frac{v(4R^2 - R_\omega^2) - 8R^3}{4vR^4} \cdot \left(\frac{d\omega}{dr}\right)^2\right] r^4 + (5)\,.$$

Z (4,3) pak snadno plyne: Volíme-li funkci $v(\omega)$ podle (3,4), je při libovolné konstantě c v bodě O typu I a II

$$(4,4)\qquad \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^3}\left\{\frac{ds^{*2}}{ds^2} - \left[1 + \frac{1 + 6cR^2}{2R^2} r^2 + \frac{(1 - 4cR^2) R_r}{3R^3} r^3\right]\right\} = 0$$

a v bodě O typu III je při $v = 2R$

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^4}\left\{\frac{ds^{*2}}{ds^2} - \left[1 + \frac{1}{2R^2} r^2 + \frac{5 + 2RR_{rr}}{16R^4} r^4\right]\right\} = 0\,.$$

5. Konstantu c v (3,4) můžeme při bodu O typu I nebo II volit podle různých hledisek. Uvedeme jedno. Budeme žádat, aby naše zobrazení mělo v okolí bodu O

délkové zkreslení co nejméně se lišící od 1. Tomuto požadavku se jistě přiblížíme, když koeficient $1 : (2R^2) + 3c$ při r^2 v hranaté závorce v (4,4) bude pro všecka ω blízký nule. Toho dosáhneme např. při střední hodnotě $c = -\left[\int_0^{2\pi} R^{-2} \mathrm{d}\omega\right] : (12\pi)$. Nechť dále $R(\omega + \pi) = R(\omega)$. Označíme-li R_1 maximální a R_2 minimální poloměr normální křivosti naší plochy v bodě O a užijeme-li Eulerovy věty, dostaneme po elementární integraci

$$c = -\frac{3(R_1 + R_2)^2 - 4R_1R_2}{48R_1^2R_2^2} < 0\,. \tag{5,1}$$

Snadno se zjistí, že při $c < 0$ je funkce v definovaná v (3,4) rostoucí funkcí argumentu R. Označíme-li $v_1 = \max v$, $v_2 = \min v$, vyplní středy S našich projekcí normálních řezů v bodě O na normále v bodě O úsečku délky

$$v_1 - v_2 = \frac{2(R_1 - R_2)}{1 + 2c(R_1 + R_2) + 4c^2R_1R_2}\,. \tag{5,2}$$

V dalším budeme uvažovat referenční elipsoid, který v roce 1940 zavedl F. N. Krasovskij. Poloměr a jeho rovníku a poloviční vzdálenost b jeho pólů jsou (za jednotku bereme stále metr)

$$a = 6\,378\,245{,}000 \quad b = 6\,356\,864{,}019\,. \tag{5,3}$$

(Všecky numerické údaje jsou převzaty z tabulek v [1].) Později budeme ještě užívat označení běžného v matematické kartografii

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 0{,}006\,693\,\ldots, \quad e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = 0{,}006\,738\,\ldots\,. \tag{5,4}$$

V bodě O uvažovaného elipsoidu se zeměpisnou šířkou φ je

$$R_1 = N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}, \quad R_2 = M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{5,5}$$

Speciálně např. v bodě O na rovnoběžce se zeměpisnou šířkou $\varphi = 50°$ (přibližně zeměpisná šířka Prahy) je $R_1 = 6\,390\,808,\ldots$ a $R_2 = 6\,373\,065,\ldots$ a z (5,1) plyne $c = -(0{,}41 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-14}$. Konstanta $|c|$ je tak malá, že lze jistě položit $c = 0$, což znamená podstatné zjednodušení ve vzorcích pro zkreslení aj.

Při našem zobrazení referenčního elipsoidu lze tedy bez podstatného zhoršení výsledků jistě položit $c = 0$ a dosáhnout tak velkého zjednodušení ve vzorcích z odst. 3 a 4. Středy promítání pak podle (5.2) vyplní na normále v bodě O úsečku délky $2(N - M)$.

6. Počátek pravoúhlé soustavy souřadnic x, y, z zvolme v bodě O našeho referenčního elipsoidu se zeměpisnou šířkou φ a osu z orientujme od bodu O dovnitř elipsoidu. Je-li bod O pól, volme osy x a y i jejich orientace zcela libovolně. Není-li bod O pól, zvolíme osu x resp. y v tečně meridiánu resp. rovnoběžky procházející bodem O; je-li bod O na rovníku, orientujme osu x libovolně, v opačném případě ji orientujme ve směru od bodu O k pólu bližšímu bodu O. Osu y orientujme libovolně. Ve zvolené soustavě souřadnicové má náš elipsoid rovnici (viz [3], str. 413)

$$(6{,}1)\qquad x^2(1 + e'^2 \cos^2 \varphi) + y^2 + z^2(1 + e'^2 \sin^2 \varphi) - 2xze'^2 \sin \varphi \cos \varphi - \\ - 2Nz = 0\,.$$

V jistém okolí bodu O (je jasné, v jakém) má náš elipsoid parametrické rovnice (1,3), kde – jak snadno plyne z (6,1):

$$f(r, \omega) = \frac{e'^2 r \cos \omega \sin \varphi \cos \varphi + N}{1 + e'^2 \sin^2 \varphi} - \\ - \left[\left(\frac{e'^2 r \cos \omega \sin \varphi \cos \varphi + N}{1 + e'^2 \sin^2 \varphi}\right)^2 - \frac{r^2(1 + e'^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varphi)}{1 + e'^2 \sin^2 \varphi}\right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1 + e'^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varphi}{2N} r^2 - \frac{e'^2(1 + e'^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varphi) \cos \omega \cos \varphi \sin \varphi}{2N^2} r^3 + (4)\,.$$

Srovnáním s (1,7) plyne podle (5,5)

$$(6{,}2)\qquad R = \frac{a}{W} \cdot \frac{1}{1 + e'^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varphi}\,, \quad R_r = \frac{3e'^2 \cos \omega \cos \varphi \sin \varphi}{1 + e'^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varphi}\,,$$

kde $W = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$. Z (6,2) dále plyne

$$(6{,}3)\qquad R_\omega = \frac{a}{W} \cdot \frac{e'^2 \sin 2\omega \cos^2 \varphi}{(1 + e'^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varphi)^2}\,,$$

$$R_{r\omega} = -\frac{3e'^2(1 - e'^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varphi) \sin \omega \cos \varphi \sin \varphi}{(1 + e'^2 \cos^2 \omega \cos^2 \varphi)^2}\,.$$

Čtyři relace (6,2) a (6,3) umožňují aplikaci obecných vzorců z odst. 3 a 4 na naše zobrazení referenčního elipsoidu do jeho tečné roviny.

Literatura

[1] *F. Kuska:* Matematická kartografia. Bratislava 1960.

[2] *J. Šmahel:* Přibližné konformní zobrazení Besselova elipsoidu. Aplikace matematiky 2 (1957), str. 297–313.

[3] *P. Tardi — G. Laclavère:* Traité de géodésie, Tome I, Fasc. II. Paris 1954.

Резюме

ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО КОНФОРМНАЯ ПРОЕКЦИЯ РЕФЕРЕНЦ-ЭЛЛИПСОИДА

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník)

Пусть O – точка аналитической поверхности положительной кривизны, τ – касательная к ней плоскость в точке O; $N(\omega)$ – нормальное сечение поверх-

ности в точке O в направлении ω; наконец, $R(\omega)$ – радиус кривизны в точке O нормального сечения $N(\omega)$. Каждому нормальному сечению $N(\omega)$ ставим в соответствие точку $S(\omega)$ на нормали поверхности, построенной в точке O, а именно на той стороне касательной плоскости τ, на которой лежит поверхность. Проектируем каждое нормальное сечение $N(\omega)$ из его соответствующей точки $S(\omega)$ в плоскость τ и таким образом получаем проекцию Z поверхности в ее касательную плоскость (отд. 1 и 2). В отд. 3 и 4 изучаем отображения Z, требуя как можно большего приближения конформному отображению, и в отделе 5 с дополнительным требованием самых малых искажений длин, всегда в известной окрестности точки O. Первое условие выполняется при $\overline{OS} = 2R(\omega) : [1 + 2cR^2(\omega)]$, $c =$ konst., и второе условие, например, при $c = -(12\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} R^{-2} \mathrm{d}\omega$. В отд. 5 и 6 пользуемся общими результатами в том случае, когда поверхность является референц-эллипсоидом.

Zusammenfassung

ANNÄHERND KONFORME PROJEKTION DES REFERENZELLIPSOIDES

ZBYNĚK NÁDENÍK

Es sei O ein Punkt einer analytischen Fläche positiver Krümmung; τ ihre Tangentenebene im Punkte O; $N(\omega)$ der Normalschnitt der Fläche im Punkte O in der Richtung ω; endlich $R(\omega)$ der Krümmungsradius im Punkte O des Normalschnittes $N(\omega)$. Man ordnet jedem Normalschnitt $N(\omega)$ einen Punkt $S(\omega)$ auf der Normale der Fläche im Punkte O zu, und zwar auf der Seite der Tangentenebene τ, in welcher die Fläche liegt. Man projiziert jeden Normalschnitt $N(\omega)$ aus seinem zugehörigen Punkte $S(\omega)$ in die Ebene τ und bekommt so eine Projektion Z der Fläche in ihre Tangentenebene (die Abschn. 1 und 2). In den Abschn. 3 und 4 studiert man die Abbildung Z besonders mit Rücksicht auf die größte Annäherung zu einer konformen Abbildung und im Abschn. 5 mit ergänzender Forderung der kleinsten Längenverzerrungen, immer in gewisser Umgebung des Punktes O. Man erfüllt die erste Bedingung, falls der Punkt O kein Nabelpunkt ist, bei $\overline{OS} = 2R : [1 + 2cR^2]$, $c =$ konst. und die zweite z. B. bei $c = -(12\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} R^{-2} \mathrm{d}\omega$. In den Abschn. 5 und 6 verwendet man die bisherigen allgemeinen Ergebnisse zur Projektion des Referenzellipsoides.

Adresa autora: Doc. dr. *Zbyněk Nádeník* C.Sc., ČVUT, Praha 2, Trojanova 13.