Jaroslav Hájek

Minimalisace nákladů při dosažení předepsané přesnosti současně u několika odhadů

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 6, 405–425

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102825

MINIMALISACE NÁKLADŮ PŘI DOSAŽENÍ PŘEDEPSANÉ PŘESNOSTI SOUČASNĚ U NĚKOLIKA ODHADŮ

JAROSLAV HÁJEK

(Došlo dne 30. září 1961.)

Za předpokladu, že náklad C je lineární funkcí parametrů $r_1, \ldots, r_H$ a rozptyly D_j sledovaných odhadů jsou lineárními funkcemi jejich obrácených hodnot, hledáme parametry $r_1, \ldots, r_H$, které minimalisují C při podmínce $D_j \leqq b_j$, $1 \leqq j \leqq J$. Hlavní oblastí aplikace výsledků jsou výběrová šetření.

1. ÚVOD A SHRNUTÍ

Uvažujme o náhodném pokusu, jehož smyslem je získání odhadů $t_1, \ldots, t_J$ pro ukazatele $\Theta_1, \ldots, \Theta_J$. Pokus i odhady buďtež pevně stanoveny až na H volitelných parametrů $r_1, \ldots, r_H$, které jsou nezáporné a takové, že náklad $C = C(r_1, \ldots, r_H)$, spojený s provedením pokusu a výpočtem odhadů, je rostoucí funkcí každého parametru r_h, $1 \leqq h \leqq H$. Dále budeme předpokládat, že odhady t_j, $1 \leqq j \leqq J$, jsou nevychýlené (nestranné) a že jejich rozptyly $D_j = D_j(r_{j1}, \ldots, r_H)$ jsou klesající funkcí parametrů r_h, $1 \leqq h \leqq H$. Naším úkolem bude zvolit parametry $r_1, \ldots, r_H$ tak, aby u všech odhadů bylo dosaženo přesnosti určené nerovnostmi

$$D_j = D_j(r_1, \ldots, r_H) \leqq b_j \quad (1 \leqq j \leqq J), \tag{1.1}$$

kde b_j jsou předepsané konstanty, a aby náklady C byly minimální.

Řešení úlohy podáme pro případ, kdy náklad C je lineární funkcí parametrů $r_1, \ldots, r_H$ a rozptyly D_j jsou lineárními funkcemi jejich obrácených hodnot:

$$C = \sum_{h=1}^{H} c_h r_h + c_0 , \tag{1.2}$$

$$D_j = \sum_{h=1}^{H} \frac{d_{jh}}{r_h} - d_{j0} \quad (1 \leqq j \leqq J) . \tag{1.3}$$

V těchto vzorcích všechny konstanty jsou nezáporné. V teorii pravděpodobnostního výběru (výběrových šetření) existuje celá řada případů, kdy je podmínka linearity splněna. Viz např. knihu [2], str. 117, 158, 163, 169, 262. Parametry $r_1, \ldots, r_H$ v těchto případech označují buď rozsady výběru v jednotlivých oblastech, nebo charakterisují rozsah a strukturu dvoustupňového či dvounásobného výběru apod. Výběrové pokusy však nejsou jedinou příležitostí, kde lze níže uvedené výsledky aplikovat.

Naše úloha byla pro případ oblastního výběru formulována T. DALENIUSEM v knize [1] na str. 200, kde je také pro $H = 2$ podáno geometrické řešení a pro $H > 2$ se doporučuje užít techniky nelineárního programování (str. 206, tamtéž). Podrobnosti však nejsou udány a není zřejmé, jak by se myšlenka mohla v praxi realisovat. Jak ukážeme v § 8, uvažovaná úloha zapadá také do rámce teorie her.

Numerický příklad je uveden v § 7. V § 6 je rozebrán častý případ, kdy soustavu odhadů tvoří nezávislé odhady $t_1, \ldots, t_H$ a součet těchto odhadů $t_0 = t_1 + \ldots + t_H$. V § 9 je naznačen postup pro případ, kdy C není lineární funkcí parametrů r_h.

2. ROZSAH A STRUKTURA EXPERIMENTU

Jsou-li parametry $r_1, \ldots, r_H$ určitým způsobem zvoleny, naše ocenění experimentu je určeno $J + 1$ čísly $C, D_1, \ldots, D_J$, z nichž každé na těchto parametrech závisí. K tomu, abychom mohli různé volby parametrů $r_1, \ldots, r_H$ jednoduše porovnávat, bylo by však potřeba, aby naše ocenění bylo dáno pouze jedním číslem. Toto číslo by bylo funkcí čísel $C, D_1, \ldots, D_J$ a různé takové funkce byly navrhovány. Žádná z nich však není a patrně ani nemůže být vyhovující. Ukažme, jak lze tuto obtíž obejít.

Pro jednoduchost předpokládejme, že máme jen jeden rozptyl D, takže náš postoj je vyjádřen dvojicí čísel C, D. Nejprve si uvědomme, že zadání experimentu lze ekvivalentně vyjádřit čísly $R, \varrho_1, \ldots, \varrho_H$, kde $R = r_1 + \ldots + r_H$ a $\varrho_h = r_h/R$, $1 \leqq h \leqq H$, a jeho ocenění čísly C, $(C - c_0)(D + d_0)$. Opravdu, z čísel $R, \varrho_1, \ldots, \varrho_H$ lze snadno zpětně určit čísla $r_1, \ldots, r_H$ $(r_h = \varrho_h R)$ a z čísel $C, (C - c_0)(D + d_0)$ čísla C, D. Nyní si všimněme, že

$$(C - c_0)(D + d_0) = \sum_{h=1}^{H} c_h r_h \sum_{h=1}^{H} d_h r_h^{-1} = \sum_{h=1}^{H} c_h \varrho_h \sum_{h=1}^{H} d_h \varrho_h^{-1}, \tag{2.1}$$

takže $(C - c_0)(D + d_0)$ závisí pouze na $\varrho_1, \ldots, \varrho_H$. Nazvěme číslo R *rozsahem pokusu* a čísla $\varrho_1, \ldots, \varrho_H$ *strukturou pokusu*. Naše ocenění struktury pokusu lze vyjádřit součinem $(C - c_0)(D + d_0)$: čím je $(C - c_0)(D + d_0)$ menší, tím je struktura pokusu lepší. Je-li určena optimální struktura, pak zbývá určit rozsah R tak, aby bylo dosaženo předepsaného rozptylu D resp. předepsaných nákladů C. Snadno lze vidět, že tímto způsobem se současně řeší úloha o minimalisaci nákladů C při předepsaném rozptylu D a úloha o minimalisaci D při předepsaném C. Shrňme hlavní myšlenku tohoto odstavce: Jedním číslem lze ocenit nikoliv pokus jako celek, nýbrž pouze určitý aspekt tohoto pokusu, např. jeho strukturu.

Nyní se vraťme k obecnému případu, kdy posuzujeme J rozptylů $D_1, \ldots, D_J$. Předpokládejme, že naše ocenění pokusu závisí pouze na určité funkci $\varphi =$

$= \varphi(D_1, \ldots, D_J)$. Uvažujme o dvou speciálních případech volby funkce φ, a to

$$\varphi = \sum_{j=1}^{J} v_j(D_j + d_{j0}) \tag{2.2}$$

a

$$\varphi = \max_{1 \leq j \leq J} \frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}}, \tag{2.3}$$

kde v_j a b_j jsou určité nezáporné konstanty. Naše ocenění struktury pokusu je pak dáno součinem $(C - c_0)\,\varphi$ jkde φ je dáno buď rovnicí (2.2) nebo (2.3).

Je-li φ dáno rovnicí (2.2) a rozptyly D_j rovnicemi (1.3), pak

$$\varphi = \sum_{h=1}^{H} d_h r_h^{-1} - d_0, \tag{2.4}$$

kde

$$d_h = \sum_{j=1}^{J} v_j d_{jh} \quad (0 \leqq h \leqq H). \tag{2.5}$$

To znamená, že optimální struktura je v daném případě stejná jako při sledování jen jednoho rozptylu, daného pravou stranou rovnice (2.4).

Je-li φ dáno rovnicí (2.3), vzniká podstatně nová situace a právě ji budeme řešit v tomto článku. Zde pouze osvětleme souvislost úlohy minimalisovat součin $(C - c_0)$ . . $\max_j (D_j + d_{j0})(b_j + d_{j0})^{-1}$ s úlohou minimalisovat náklad C při splnění podmínek (1.1). Tento vztah je dán identitou

$$\min_{r_1, \ldots, r_H} \left[(C - c_0) \max_j \frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} \right] = \min_{\substack{r_1, \ldots, r_H \\ D_j \leqq b_j}} (C - c_0), \tag{2.6}$$

kde $\min_{r_1, \ldots, r_H}$ označuje minimum přes všechny možné nezáporné hodnoty parametrů $r_1, \ldots, r_H$, a na pravé straně se bere minimum jen přes ty nezáporné hodnoty parametrů $r_1, \ldots, r_H$), při kterých $D_j \leqq b_j$, $1 \leqq j \leqq J$.

Důkaz identity (2.6). Nechť minima na pravé straně rovnice (2.6) je dosaženo pro $r_h = r_h^0$, $1 \leqq h \leqq H$. Položíme-li $D_j^0 = D_j(r_1^0, \ldots, r_H^0)$, jistě platí

$$\max_j \frac{D_j^0 + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} = 1, \tag{2.7}$$

protože jinak bychom mohli parametry r_h^0 a tedy i C zmenšit bez porušení podmínky $D_j \leqq b_j$, což je ve sporu s předpokladem, že pro $r_h = r_h^0$ je dosaženo minima. Položíme-li $C^0 = C(r_1^0, \ldots, r_H^0)$,platí tedy

$$\min_{\substack{r_1, \ldots, r_H \\ D_j \leqq b_j}} (C - c_0) = (C^0 - c_0) \max_j \frac{D_j^0 + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} \geqq \min_{r_1, \ldots, r_H} \left[(C - c_0) \max_j \frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} \right].$$

Jelikož opačná nerovnost je triviální, je identita (2.6) dokázána.

Zároveň jsme také dokázali, že hodnoty r_h^0, které minimalisují C při podmínce $D_j \leqq b_j$, minimalisují i součin

$$(2.8) \qquad (C - c_0) \max_j \frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} = \max_j \left[\sum_{h=0}^{H} c_h r_h \sum_{h=0}^{H} \frac{d_{jh}}{b_j + d_{j0}} r_h^{-1} \right].$$

Součin (2.8) je však minimalisován i kterýmkoliv hodnotami tvaru $r_h = \lambda r_h^0$, $\lambda > 0$, neboť na násobící konstantě λ nezávisí. Shrňme: Řešením úlohy o minimalisaci C při podmínce $D_j \leqq b_j$ vyřešíme i úlohu o optimální struktuře za předpokladu, že jakost struktury je uceňována (nepřímo úměrně) součinem (2.8). Zároveň je jasné, že totéž řešení, pokud jde o strukturu, má i třetí možná úloha, a to minimalisace výrazu (2.3) při pevně daných nákladech.

Nakonec poznamenejme, že *rozsahem* pokusu by bylo možno podle potřeby nazvat libovolnou funkci $R = R(r_1, \ldots, r_H)$ takovou, že

$$(2.9) \qquad R(\lambda r_1, \ldots, \lambda r_H) = \lambda R(r_1, \ldots, r_H).$$

Tato podmínka je splněna např. pro $R = C - c_0$, $R = r_h$ a $R = (D_j + d_{j0})^{-1}$ pro kterékoliv h a j, kde C a D_j jsou dány rovnicemi (1.2) a (1.3). Podobně strukturu bychom nemuseli vyjadřovat poměry $\varrho_h = r_h/R$, $1 \leqq h \leqq H$, nýbrž ji prostě definovat tak, že vektory $(r_1, \ldots, r_H)$ a $(r'_1, \ldots, r'_H)$ mají stejnou strukturu tehdy a jen tehdy, je-li $r'_h = \lambda r_h$, $1 \leqq h \leqq H$, pro některou konstantu $\lambda > 0$.

3. OBECNÁ VĚTA

Obecné vlastnosti řešení naší úlohy jsou vyjádřeny touto větou:

Věta 1. *Hodnoty $r_1^0, \ldots, r_H^0$, které minimalisují náklady C při podmínce $D_j \leqq b_j$, $1 \leqq j \leqq J$, jsou rovny*

$$(3.1) \qquad r_h^0 = \frac{1}{c_h} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^0 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jk} p_j^0 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1 \leqq h \leqq H),$$

kde $p_1^0, \ldots, p_J^0$ jsou nezáporná čísla rovná v součtu 1 a taková, že

$$(3.2) \qquad \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^0 \right)^{\frac{1}{2}} = \max_{\substack{p_1, \ldots, p_J \\ p_j \geqq 0,\ \Sigma p_j = 1}} \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \right)^{\frac{1}{2}},$$

přičemž

$$(3.3) \qquad a_{jh} = \frac{c_h d_{jh}}{b_j + d_{j0}} \quad (1 \leqq j \leqq J, 1 \leqq h \leqq H).$$

Čísla p_j^0 jsou charakterisována tím, že

$$(3.4) \qquad \sum_{h=1}^{H} a_{jh} \left(\sum_{i=1}^{J} a_{ih} p_i^0 \right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{i=1}^{J} a_{ih} p_i^0 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \textit{když} \quad p_j^0 > 0,$$
$$\leqq \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{i=1}^{J} a_{ih} p_i^0 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \textit{když} \quad p_i^0 = 0.$$

Je-li $p_j^0 > 0$, pak $D_j(r_1^0, \ldots, r_H^0) = b_j$.

Důkaz. Z podmínky $D_j \leqq b_j$, $1 \leqq j \leqq J$, vyplývá, že

$$\max_{1 \leqq j \leqq J} \frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} \leqq 1\,, \tag{3.5}$$

a tedy i

(3.6)
$$C - c_0 \geqq \max_{1 \leqq j \leqq J} \left[(C - c_0) \frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} \right] = \max_{1 \leqq j \leqq J} \left[\sum_{h=1}^{H} c_h r_h \sum_{h=1}^{H} d_{jh}(b_j + d_{j0})^{-1} r_h^{-1} \right].$$

Jelikož maximum skupiny čísel nemůže být převýšeno žádnou jejich konvexní lineární kombinací (tj. s nezápornými koeficienty rovnými v součtu 1), můžeme psát

$$\max_{1 \leqq j \leqq J} \left[\sum_{h=1}^{H} c_h r_h \sum_{h=1}^{H} d_{jh}(b_j + d_{j0})^{-1} r_h^{-1} \right] = \tag{3.7}$$
$$= \max_{p_j \geqq 0,\, \Sigma p_j = 1} \left\{ \sum_{h=1}^{H} c_h r_h \sum_{h=1}^{H} \left[r_h^{-1} \sum_{j=1}^{J} d_{jh}(b_j + d_{j0})^{-1} p_j \right] \right\}.$$

Užitím známé Cauchyovy nerovnosti ([2], str. 34) dostáváme

$$\sum_{h=1}^{H} c_h r_h \sum_{h=1}^{H} \left[r_h^{-1} \sum_{h=1}^{J} d_{jh}(b_j + d_{j0})^{-1} p_j \right] \geqq \tag{3.8}$$
$$\geqq \left\{ \sum_{h=1}^{H} \left[c_h \sum_{j=1}^{J} d_{jh}(b_j + d_{j0})^{-1} p_j \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 = \left[\sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2,$$

kde jsme užili konstant (3.3). Ze vztahů (3.6) až (3.8) vyplývá, že

$$C - c_0 \geqq \max_{p_j \geqq 0,\, \Sigma p_j = 1} \left[\sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = \left[\sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^0 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \tag{3.9}$$

Tím jsme dostali dolní hranici pro C. Dříve než dokážeme, že pro $r_1^0, \ldots, r_H^0$ daná rovnicí (3.1) je této dolní hranice při splnění podmínek $D_j \leqq b_j$ dosaženo, vyvoďme vztah (3.4) ze vztahu (3.2).

Výraz $\sum(\sum a_{jh} p_j)^{\frac{1}{2}}$ je zřejmě konkávní (druhá derivace je nekladná) funkcí argumentu $(p_1, \ldots, p_J)$, $p_j \geqq 0$, $\sum p_j = 1$, a proto každé lokální minimum je zároveň absolutním minimem. Body, v nichž je dosaženo absolutního minima, jsou charakterisovány tím, že přírůstky funkce ve všech směrech nevybočujících z oboru vymezeného nerovnostmi $p_j \geqq 0$ a rovností $\sum p_j = 1$ jsou nekladné. Řečeno jinými slovy, bod $(p_1^0, \ldots$ $\ldots, p_J^0)$ je minimem tehdy a jen tehdy, je-li totální diferenciál funkce

$$F(p_1, \ldots, p_J) = \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

v bodě $(p_1^0, \ldots, p_J^0)$ ve všech přípustných směrech nekladný. Jelikož

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} = \tfrac{1}{2} \sum_{h=1}^{H} a_{jh} \left(\sum_{i=1}^{J} a_{ih} p_i \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (1 \leqq j \leqq J)\,,$$

je totální diferenciál funkce F v bodě $(p_1^0, \ldots, p_J^0)$ roven

$$\Delta F = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} [\Delta p_j^0 \sum_{h=1}^{H} a_{jh} (\sum_{i=1}^{J} a_{ih} p_i^0)^{-\frac{1}{2}}] , \tag{3.11}$$

kde přírůstky Δp_j^0 jsou omezeny vztahy

$$\sum_{j=1}^{J} \Delta p_j^0 = 0 \quad \text{a} \quad \Delta p_j^0 \geqq 0 , \tag{3.12}$$

je-li

$$p_j^0 = 0 \quad (1 \leqq j \leqq J) ,$$

vyplývajícími z toho, že $\sum p_j^0 = \sum (p_j^0 + \Delta p_j^0)$ a $p_j^0 + \Delta p_j^0 \geqq 0$. Snadno nahlédneme, že podmínka nekladnosti totálního diferenciálu,

$$\Delta F \leqq 0 , \tag{3.13}$$

pro Δp_j^0 vyhovující vztahům (3.12), je totožná s tím, že pro některou konstantu α platí

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{H} a_{jh} (\sum_{i=1}^{J} a_{ih} p_i)^{-\frac{1}{2}} &= \alpha , \quad \text{je-li} \quad p_j^0 < 0 . \\ &\leqq \alpha , \quad \text{je-li} \quad p_j^0 = 0 . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ukažme, že podmínka (3.14) je postačující, přenechávajíce důkaz nutnosti čtenáři. Platí-li (3.14), pak z (3.11) je vidět, že

$$\Delta F = \alpha \sum_{j=1}^{J} \Delta p_j^0 - \sum_{p_j{}^0 = 0} [\alpha - \sum_{h=1}^{H} a_{jh} (\sum_{i=1}^{J} a_{ih} p_i^0)^{-\frac{1}{2}}] \, \Delta p_j^0 , \tag{3.15}$$

kde poslední součet je vykonán přes ta h, pro která $p_j^0 = 0$. Avšak z (3.12) vyplývá, že první člen na pravé straně rovnice (19) je roven 0 a druhý je nekladný, neboť v něm podle (3.12) $\Delta p_j^0 \geqq 0$ a podle (3.14) $\alpha - \sum a_{jh} (\sum a_{ih} p_i)^{-\frac{1}{2}} \geqq 0$. Vynásobíme-li rovnosti a nerovnosti (3.4) čísly p_j^0 a sečteme, snadno zjistíme, že α je rovno pravé straně vztahů (3.4), čímž je postačitelnost těchto vztahů dokázána.

Nyní již snadno důkaz dokončíme. Dosadíme-li $r_1^0, \ldots, r_H^0$ dané rovnicí (3.1) do vzorce (1.2) pro C, dostáváme, že

$$C - c_0 = [\sum_{h=1}^{H} (\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^0)^{\frac{1}{2}}]^2 , \tag{3.16}$$

takže dolní hranice je skutečně dosaženo. Kromě toho, dosadíme-li tato $r_1^0, \ldots, r_H^0$ do vzorce (6) pro D_j, dostáváme, že

$$\frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} = \sum_{h=1}^{H} a_{jh} c_h^{-1} (r_h^0)^{-1} = \sum_{h=1}^{H} a_{jh} (\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^0)^{-\frac{1}{2}} \cdot [\sum_{h=1}^{H} (\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^0)^{\frac{1}{2}}]^{-1} ,$$

odkud se zřetelem na (3.4) vyplývá, že

$$\frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} \leqq 1 \quad (1 \leqq j \leqq J) , \tag{3.17}$$

přičemž rovnosti je dosaženo pro všechna j, pro která $p_j^0 > 0$. Nerovnosti (3.17) jsou zřejmě ekvivalentní s nerovnostmi $D_j \leqq b_j$, čímž je důkaz ukončen.

4. VYLOUČENÍ NEPODSTATNÝCH ODHADŮ

Aby bylo možno větu 1 aplikovat, je třeba vypočítat čísla p_j^0, která budeme nazývat vahami (p_j^0 je vahou odhadu t_j). Především je třeba v každém konkrétním případě prozkoumat, které váhy budou rovny nule. Je-li $p_j^0 = 0$, pak řešení je stejné, jako by odhad t_j vůbec nebyl vzat v počet. To je bezprostředně patrno ze vzorce (3.1). Prozkoumat případy $p_j^0 = 0$ znamená tedy totéž, jako zjistit, které odhady t_j lze vypustit z úvahy. U takových odhadů t_j bude nerovnost $D_j \leqq b_j$ důsledkem splnění těchže nerovností pro zbývající odhady. Odhady t_j, pro které platí $p_j^0 = 0$, budeme nazývat *nepodstatnými*, a zbývající odhady *podstatnými*. Může se stát, že pouze jeden odhad, řekněme t_q, je podstatný, a potom prostě

$$r_h^0 = c_h^{-1} a_{qh}^{\frac{1}{2}} \sum_{h=1}^{H} a_{qh}^{\frac{1}{2}} = (d_{qh}/c_h)^{\frac{1}{2}} (b_q + d_{q0})^{-1} \sum_{h=1}^{H} \sqrt{(c_h d_{qh})} \quad (1 \leqq h \leqq H)\,. \tag{4.1}$$

Věta 2. *Existují-li nezáporná čísla λ_i, $i \neq k$, rovná v součtu 1 a taková, že pro všechna $h = 1, \ldots, H$*

$$a_{kh} \leqq \sum_{i \neq k} \lambda_i a_{ih} \quad (1 \leqq h \leqq H)\,, \tag{4.2}$$

pak lze maxima dosáhnout v bodě, v němž $p_k^0 = 0$.

Budiž A určitá podmnožina množiny čísel $\{1, \ldots, J\}$ a B její doplněk, $B = \{1, \ldots, J\} - A$. Platí-li

$$\sum_{h=1}^{H} a_{ih}^{\frac{1}{2}} \geqq \sum_{h=1}^{H} a_{jh} a_{ih}^{-\frac{1}{2}} \quad (i \in A, j \in B) \tag{4.3}$$

pro každé i z A a každé j z B, pak lze maxima dosáhnout v bodě, v němž $p_j^0 = 0$ pro všechna j z B.

Důkaz. Z (4.2) bezprostředně vyplývá, že pro každé h

$$\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j = a_{kh} p_k + \sum_{i \neq k} a_{ih} p_i \leqq \sum_{i \neq k} a_{ih} \lambda_i p_k + \sum_{i \neq k} a_{ih} p_i = \sum_{i \neq k} a_{ih}(p_i + \lambda_i p_k) = \sum_{j=1}^{J} a_{jh} p'_j\,,$$

kde $p'_k = 0$. To znamená, že maxima výrazu $\sum_{h=1}^{H} (\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j)^{\frac{1}{2}}$ lze dosáhnout při $p_k^0 = 0$. Nyní dokážeme druhou část věty. Položme

$$\alpha = \sum_{i \in A} p_i\,,$$

$$q_i = \frac{p_i}{\alpha} \quad \text{pro} \quad i \in A\,,$$

$$l_j = \frac{p_j}{1 - \alpha} \quad \text{pro} \quad j \in B\,.$$

Toto označení nám dovoluje psát

$$\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j = \alpha \sum_{i \in A} a_{ih} q_i + (1 - \alpha) \sum_{j \in B} a_{jh} l_j\,,$$

kde $\sum_{j \in A} q_i = \sum_{j \in B} l_j = 1$, a dále

$$(4.4)\qquad \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{h=1}^{H} \left[\alpha \sum_{i \in A} a_{ih} q_i + (1-\alpha) \sum_{j \in B} a_{jh} l_j \right]^{\frac{1}{2}} = G(\alpha) .$$

Derivováním se snadno přesvědčíme, že výraz na pravé straně, jakožto funkce argumentu α, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, je konkávní funkcí (druhá derivace je záporná). Naším cílem je dokázat že

$$G(1) \geqq G(\alpha) \quad (0 \leqq \alpha \leqq 1) ,$$

tj. že anulace vah p_j, $j \in B$, nevede ke snížení hodnoty výrazu (4.4). Jelikoň $G(\alpha)$ je konkávní (vydutá směrem vzhůru), stačí, aby derivace v bodě $\alpha = 1$ byla nezáporná. Avšak

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=1} = \tfrac{1}{2} \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{i \in A} a_{ih} q_i \right)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{J \in B} a_{jh} l_j \right) \left(\sum_{i \in A} a_{ih} q_i \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Zbývá tedy dokázat, že z (4.3) pro jakákoliv q_i a l_j plyne

$$(4.5)\qquad \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{i \in A} a_{ih} q_i \right)^{\frac{1}{2}} \geqq \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j \in B} a_{jh} l_j \right) \left(\sum_{i \in A} a_{ih} q_i \right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Uvědomme si, že funkce $f(x_1, .., x_H) = \sum_{h=1}^{H} x_h^{\frac{1}{2}}$, $x_h \geqq 0$, je konkávní. Položíme-li $x_h = a_{ih}$ a užijeme-li Jensenovy nerovnosti (viz [7]), dostáváme

$$(4.6)\qquad \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{i \in A} a_{ih} q_i \right)^{\frac{1}{2}} \geqq \sum_{i \in A} q_i \sum_{h=1}^{H} a_{ih}^{\frac{1}{2}} .$$

Dále vzhledem k předpokladu (4.3) platí

$$(4.7)\qquad \sum_{i \in A} q_i \sum_{h=1}^{H} a_{ih}^{\frac{1}{2}} = \sum_{i \in A} q_i \sum_{h=1}^{H} \sum_{j \in B} l_j a_{ih}^{\frac{1}{2}} \geqq \sum_{i \in A} q_i \sum_{h=1}^{H} a_{ih}^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in B} l_j a_{jh} \right) .$$

Funkce $g(x_1, \ldots, x_H) = \sum_{h=1}^{H} x_h^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in B} l_j a_{jh} \right)$, $x_h \geqq 0$, je konvexní. Položíme-li v (4.7) $x_h = a_{ih}$ a užijeme-li opět Jensenovy nerovnosti, dostáváme

$$(4.8)\qquad \sum_{i \in A} q_i \sum_{h=1}^{H} a_{ih}^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in B} a_{jh} l_j \right) \geqq \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{i \in A} q_i a_{ih} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{j \in B} l_j a_{jh} \right) .$$

Nyní vidíme, že (4.5) snadno vyplývá ze spojení vztahů (4.6), (4.7) a (4.8). Tím je důkaz ukončen.

Věty užíváme tak, že nejprve vypíšeme matici čísel

$$(4.9)\qquad \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1H} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2H} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{J1}, & a_{J2}, & \ldots, & a_{JH} \end{pmatrix}$$

a prozkoumáme všechny páry řádků, zda jeden nedominuje druhý v tom smyslu, že $a_{ih} \geqq a_{kh}$ pro všechna h. Je-li některý z řádků dominován jiným řádkem, vyškrtneme jej z matice a příslušný odhad vypustíme z úvah o volbě pokusu. Potom zkusmo zkoušíme, zda některý řádek není dominován konvexní lineární kombinací jiných řádků ve smyslu podmínky (4.2). Nakonec na základě matice složené ze zbylých řádků vypočteme čtvercovou matici

$$\begin{pmatrix} M_{11}, & \ldots, & M_{1I} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{I1}, & \ldots, & M_{II} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

kde

$$M_{ij} = \sum_{h=1}^{H} a_{jh} a_{ih}^{-\frac{1}{2}} \quad (1 \leqq i, j \leqq I)\,, \tag{4.11}$$

a $I \leqq J$ označuje počet řádků v proškrtané matici, ve které jsou řádky přečíslovány čísly od 1 do I. Na základě matice (4.9) prověříme, zda nelze vytvořit skupiny indexů A a B tak, aby byla splněna podmínka (4.2). Připomeňme si, že sjednocením množin A a B je celá množina $\{1, \ldots, I\}$. Podaří-li se nám takové rozdělení najít, pak vyškrtneme všechny řádky označené indexem z množiny B a ponecháme jen řádky označené indexem z množiny A. Tím je vylučování nepodstatných odhadů na základě věty 2 skončeno.

Poznámka. Rozdělení odhadů na podstatné a nepodstatné je jednoznačné tehdy, když výraz $\sum(\sum a_{jh} p_j)^{\frac{1}{2}}$ nabývá svého maxima pouze v jednom bodě, což můžeme považovat za obvyklý případ.

5. VÝPOČET VAH p_j^0

Předpokládejme, že jsme vyloučili nepodstatné odhady zjistitelné na základě věty 2. Zbývající odhady označme opět $t_1, \ldots, t_J$, neboť na označení nezáleží. Naším úkolem je určit váhy p_j^0, které maximalisují výraz $\sum(\sum a_{jh} p_j)^{\frac{1}{2}}$. Váha p_j^0 je jakousi měrou závažnosti odhadu t_j pro volbu pokusu. Roku 1934 J. NEYMAN doporučoval řešit problém více odhadů tak, že mezi nimi najdeme jeden, který má převládající význam, a pak optimalisovat pokus vzhledem k němu. To v našich pojmech odpovídá situaci, kdy existuje odhad t_q takový, že $p_q^0 = 1$ nebo alespoň $p_q^0 = 1 - \varepsilon$, kde ε je malé. Věty 1 a 2 nám tedy jednak umožňují pojem „převládajícího" odhadu matematicky definovat, a jednak dávají řešení i v případech, kdy žádný z odhadů nepřevládá.

Maximalisaci výrazu $\sum(\sum a_{jh} p_j)^{\frac{1}{2}}$ lze nejsnadněji vykonat postupnými aproximaci, z nichž každá spočívá ve vyřešení systému lineárních rovnic. Vyjdeme od určité výchozí sestavy $p_j = p_j^I$, kterou zvolíme např. tak, že položíme $p_j^I = J^{-1}$. Druhou aproximaci dostaneme tak, že funkci $F(p_1, \ldots, p_J) = \sum(\sum a_{jh} p_j)^{\frac{1}{2}}$ rozvineme v Taylorovu řadu do kvadratických členů kolem bodu $(p_1^I, \ldots, p_J^I)$

$$F(p_1, \ldots, p_J) \doteq F^I + \sum_{j=1}^{J} F_j^I (p_j - p_j^I) + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{J} \sum_{j=1}^{J} F_{ij}^I (p_i - p_i^I)(p_j - p_j^I)\,, \tag{5.1}$$

kde $F_j = \partial F/\partial p_j$, $F_{ij} = \partial^2 F/\partial p_i \partial p_j$ a F_j^I a F_{ij}^I označuje hodnoty těchto derivací v bodě $(p_1^I, \ldots, p_J^I)$. Zřejmě platí

$$F_j = \tfrac{1}{2} \sum_{h=1}^{H} a_{jh} \Big(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \Big)^{-\frac{1}{2}} \quad (1 \leqq j \leqq J), \tag{5.2}$$

$$F_{ij} = -\tfrac{1}{4} \sum_{h=1}^{H} a_{ih} a_{jh} \Big(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \Big)^{-\frac{3}{2}} \quad (1 \leqq i, j \leqq J). \tag{5.3}$$

Naším úkolem je maximalisovat F, čehož přibližně dosáhneme maximalisací pravé strany vztahu (5.3). Jelikož $\sum (p_j - p_j^I) = 0$, musíme při hledání maxima buď použít Lagrangeovy metody nebo jednu z neznámých vyloučit. Druhá metoda je v našem případě prostší, a proto vylučme $p_J - p_J^I$ tím, že za ně dosadíme $-\sum_{j=1}^{J-1} (p_j - p_j^I)$. Tím z (5.1) dostaneme

$$F(p_1, \ldots, p_J) \doteq F^I + \sum_{j=1}^{J-1} (F_j^I - F_J^I)(p_j - p_j^I) + \tag{5.4}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{J-1} \sum_{j=1}^{J-1} (F_{ij}^I + F_{JJ}^I - F_{iJ}^I - F_{jJ}^I)(p_i - p_i^I)(p_j - p_j^I).$$

Položíme-li derivace kvadratické funkce na pravé straně rovny nule, dostaneme systém lineárních rovnic

$$-\sum_{j=1}^{J-1} (F_{ij}^I + F_{JJ}^I - F_{iJ}^I - F_{jJ}^I)(p_j - p_j^I) = F_i^I - F_J^I \quad (1 \leqq i \leqq J - 1). \tag{5.5}$$

Vyřešením podle neznámých $(p_j - p_J^I)$, obdržíme „opravy" Δ_j hodnot p_j^I. Potom položíme

$$p_j^{II} = p_j^I + \Delta_j \quad (1 \leqq j \leqq J - 1), \tag{5.6}$$

a celý proces opakujeme tak dlouho, dokud se hodnoty neustálí. Vezmeme-li zřetel na (5.2) a (5.3), pro $J = 2$ dostáváme

$$p_1^{II} = p_1^I + 2 \frac{\sum_{h=1}^{H} (a_{1h} - a_{2h}) \Big(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^I \Big)^{-\frac{1}{2}}}{\sum_{h=1}^{H} (a_{1h} - a_{2h}) \Big(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^I \Big)^{-\frac{3}{2}}} \tag{5.7}$$

a $p_2^{II} = 1 - p_1^{II}$.

Jelikož p_j musí být nezáporné, je třeba dát návod jak postupovat, je-li $p_j^{II} = p_j^I + \Delta_j < 0$. V takovém případě všechna záporná p_j^{II} nahradíme nulou, tj. všechny opravy převyšující příslušné p_j^I nahradíme opravou $-p_j^I$. V souhlase s tím musíme redukovat i kladné opravy, a to tak, že je vynásobíme koeficientem

$$\kappa = \frac{\sum_{i \in Z} \min(p_i^I, -\Delta_i)}{\sum_{j \in K} \Delta_j},$$

kde $\sum_{i \in Z}$ označuje součet přes záporná Δ_i a $\sum_{j \in K}$ přes kladná Δ_j. Jsou-li všechna p_j^{II} nezáporná (tj. žádná oprava není menší než $-p_j^I$), pak zřejmě $\kappa = 1$, neboť absolutní součet kladných a záporných oprav je stejný. Obecně platí $\kappa \leqq 1$. Například je-li $p_1^I = 0{,}1$, $p_2^I = 0{,}4$ a $p_3^I = 0{,}5$ a $\Delta_1 = -0{,}2$, $\Delta_2 = 0{,}05$ a $\Delta_3 = 0{,}15$, pak $\kappa = \frac{1}{2}$ a $p_1^{II} = 0$, $p_2^{II} = 0{,}425$ a $p_3^{III} = 0{,}575$.

Obvykle již po prvé opravě se dostaneme blízko k maximu. Jelikož čísla a_{jh}, na kterých řešení závisí, bývají určena dosti neostře, není tu ani rozumný důvod snažit se o velkou přesnost. Stačí, aby p_j^0 byly nalezeny s chybou nepřevyšující 2 až 4 setiny. Aplikaci výše popsaného postupu ukážeme v § 7 na konkrétním příkladu. Otázku konvergence postupných řešení ponecháme v tomto článku stranou.

6. DŮLEŽITÝ SPECIÁLNÍ PŘÍPAD

Mějme odhady $t_0, t_1, \ldots, t_H$ $(J = H + 1)$ takové, že

$$D_j = \frac{d_j}{r_j} - d_{j0} \quad (1 \leqq j \leqq H) \tag{6.1}$$

a

$$D_0 = \sum_{j=1}^{H} D_j = \sum_{j=1}^{H} \frac{d_j}{r_j} - d_0 \,. \tag{6.2}$$

Tato situace nastane například tehdy, je-li pokus rozdělen na H dílčích nezávislých pokusů, přičemž r_j označuje rozsah j-tého dílčího pokusu a

$$t_0 = t_1 + \ldots + t_H \,. \tag{6.3}$$

Typickým příkladem je oblastní výběr (viz [2], kap. IIB], při kterém nás zajímá nejen odhad celkového úhrnu, nýbrž i odhady jednotlivých oblastních úhrnů.

Jsou-li předepsány horní hranice pro rozptyly $b_0, b_1, \ldots, b_H$, mohou nastat tři různé případy:

(I) Nechť $b_1 + \ldots + b_H \leqq b_0$. Potom z nerovností $D_j \leqq b_j$ $(1 \leqq j \leqq H)$ plyne $D_0 \leqq b_0$, takže odhad t_0 je nepodstatný a řešení je dáno rovnicemi $D_j = b_j$ $(1 \leqq \leqq j \leqq H)$, tj.

$$r_j^0 = \frac{d_j}{b_j + d_{j0}} \quad (1 \leqq j \leqq H)\,. \tag{6.4}$$

(II) Nechť $b_1 + \ldots + b_H \geqq b_0$ a

$$\sum_{h=1}^{H} (c_h d_h)^{\frac{1}{2}} \geqq (c_j d_j)^{\frac{1}{2}} \, \frac{b_0 + d_0}{b_j + d_{j0}} \quad (1 \leqq j \leqq H)\,. \tag{6.5}$$

Potom řešení optimální vzhledem k t_0, které dostaneme dosazením $q = 0$ do (4.1),

$$r_j^0 = c_j^{-\frac{1}{2}} d_j^{\frac{1}{2}} (b_0 + d_0)^{-1} \sum_{h=1}^{H} (c_h d_h)^{\frac{1}{2}} \quad (1 \leqq j \leqq H)\,, \tag{6.6}$$

bude splňovat podmínky $D_j(r_j^0) \leqq b_j$, $1 \leqq j \leqq H$, jak vyplývá z nerovnosti (6.5). V tomto případě tedy naopak odhady $t_1, \ldots, t_H$ jsou nepodstatné a t_0 je jediným podstatným odhadem.

(III) Nechť $b_1 + \ldots + b_H \geqq b_0$, avšak nerovnosti (6.5) jsou porušeny aspoň pro jedno h, $1 \leqq j \leqq H$. Přečíslujeme odhady tak, že nerovnosti (6.5) neplatí pro $1 \leqq j \leqq H'$ a platí pro $H' < j \leqq H$. To znamená, že řešení optimální vzhledem k t_0 dává pro odhady $t_1, \ldots, t_{H'}$, nedostačující přesnost. Učiňme odtud závěr, že tyto odhady jsou podstatné, tj. že $D_j = b_j$ pro $1 \leqq j \leqq H'$. Ze vztahu (6.1) plyne, že rovnost $D_j = b_j$ nastane pro a jen pro

$$r_j' = \frac{d_j}{b_j + d_{j0}} \quad (1 \leqq j \leqq H') . \tag{6.7}$$

Porovnáme-li (6.7) s (6.4) vidíme, že optimální r_j jsou pro $1 \leqq j \leqq H'$ tytéž jako v případě (I).

Zbývající parametry $r_{H'+1}, \ldots, r_H$ zvolíme nyní tak, abychom minimalisovali náklady při podmínce $D_0 \leqq b_0$. Dosadíme-li (6.7) do (6.2), dostáváme

$$D_0 = \sum_{j=1}^{H'} b_j + \sum_{j=H'+1}^{H} \frac{d_j}{r_j} - \sum_{j=H'+1}^{H} d_{j0} . \tag{6.8}$$

Položíme-li

$$\begin{aligned} d_0' &= \sum_{j=H'+1}^{H} d_{j0} , \\ D_0' &= \sum_{j=H'+1}^{H} \frac{d_j}{r_j} - d_0' , \\ b_0' &= b_0 - \sum_{j=1}^{H'} b_j , \end{aligned} \tag{6.9}$$

vidíme, že $D_0 \leqq b_0$ při podmínce (6.7) je splněno tehdy a jen tehdy je-li $D_0' \leqq b_0'$. Kromě toho minimalisovat náklady $C = c_1 r_1 + \ldots + c_H r_H + c_0$ při podmínce (6.7) značí totéž co minimalisovat náklady $C' = c_{H'+1} r_{H'+1} + \ldots + c_H r_H$. Stojíme tedy před toutéž úlohou jako v případě (II) až na to, že místo C, D_0 a b_0 máme C', D_0' a b_0'. Výsledek tedy bude analogický výsledku (6.6), a to

$$r_j' = c_j^{-\frac{1}{2}} d_j^{\frac{1}{2}} (b_0' + d_0')^{-1} \sum_{h=H'+1}^{H} (c_h d_h)^{\frac{1}{2}} \quad (H' < j \leqq H) . \tag{6.10}$$

Nyní opět zjistíme, zda r_j', $H' < j \leqq H$, daná rovnicí (6.10) splňují vztah $D_j(r_j') \leqq b_j$, tj. zda jsou alespoň tak velká jako $d_j(b_j + d_{j0})^{-1}$. Je-li tomu tak, je řešení dáno vztahy (6.7) pro $1 \leqq j \leqq H'$ a vztahy (6.10) pro $H' < j \leqq H$. V opačném případě přečíslujme znovu odhady tak, že pro $H' < j \leqq H''$ platí $r_j' < d_j(b_j + d_{j0})^{-1}$, a pro $H'' < j \leqq H$ platí $r_j' \geqq d_j(b_j + d_{j0})^{-1}$. Potom opakujeme předešlý postup, jen s tím rozdílem, že H' nahradíme H''. Poslední člen posloupnosti H', H'', ... označme H^*. Zřejmě

$H^* < H$, neboť jinak bychom dostali případ (I), což je vyloučeno. To znamená, že konečné řešení $r_1^0, \ldots, r_H^0$ je dáno vzorci

$$(6.11) \qquad r_j = \frac{d_j}{b_j + d_{j0}} \quad (1 \leqq j \leqq H^*),$$

$$(6.12) \qquad r_j^0 = c_j^{-\frac{1}{2}} d_j^{\frac{1}{2}} (b_0^* + d_0^*)^{-1} \sum_{h=H^*+1}^{H} (c_h d_h)^{\frac{1}{2}} \quad (H^* < j \leqq H),$$

kde $b_0^* = b_0 - \sum_{j=1}^{H^*} b_j$ a $d_0^* = \sum_{j=H^*+1}^{H} d_{j0}$.

Nyní zbývá dokázat, že řešení dané rovnicemi (6.11) a (6.12) skutečně minimalisuje C při podmínce $D_j \leqq b_j$, $1 \leqq j \leqq H$. Totální diferenciál funkce $C = \sum c_h r_h + c_0$ je zřejmě roven

$$(6.13) \qquad \Delta C = \sum_{h=1}^{H} c_h \, \Delta r_h .$$

Musíme dokázat, že pro všechny „přípustné“ hodnoty vektoru $(\Delta r_1^0, \ldots, \Delta r_H^0)$ je

$$(6.14) \qquad \Delta C^0 = \sum_{h=1}^{H} c_h \, \Delta r_h^0 \geqq 0 .$$

Jelikož r_j^0, $1 \leqq j \leqq H^*$, nemohou být zmenšeny bez narušení vztahů $D_j \leqq b_j$, $1 \leqq j \leqq H^*$, musí být

$$(6.15) \qquad \Delta r_j^0 \geqq 0 \quad (1 \leqq j \leqq H^*) .$$

Kromě toho t_0 je určitě podstatný odhad a tudíž se můžeme omezit jen na vektory, pro které $D_0(r_1, \ldots, r_H) = b_0$, tj.

$$(6.16) \qquad \Delta D_0|_{r_j = r_j^0} = - \sum_{j=1}^{H} \frac{d_j}{(r_j^0)^2} \Delta r_j^0 = 0 .$$

Podobně jako při důkazu věty 1 lze dokázat, že (6.14) je při omezeních (6.15) a (6.16) splněno tehdy a jen tehdy, existuje-li taková konstanta α, že

$$(6.17) \qquad c_j \geqq \alpha^2 \frac{d_j}{(r_j^0)^2} \quad (1 \leqq j \leqq H^*),$$

$$(6.18) \qquad c_j = \alpha^2 \frac{d_j}{(r_j^0)^2} \quad (H^* < j \leqq H) .$$

Ze vztahu (6.12) je vidět, že (6.18) je splněno, přičemž

$$(6.19) \qquad \alpha = \alpha^* = (b^* + d_0^*)^{-1} \sum_{h=H^*+1}^{H} (c_h d_h)^{\frac{1}{2}} .$$

Vztah (6.17) je ekvivalentní s tím, že rozsahy $r_j^0 (1 \leqq j \leqq H^*)$ vypočtené (6.11) jsou větší než ty, které by plynuly z (6.12), kdybychom tento vzorec použili i pro $1 \leqq j \leqq$ $\leqq H^*$. To však bezprostředně vyplývá z výše uvedené konstrukce. Skutečně v prvém kroku jsme označili indexy $1 \leqq j \leqq H'$ ta r_j ze vzorce (6.6), která byla nutno zvětšit. Jelikož současně $D_0 = b_0$ zůstalo beze změny, ostatní r_j pro $H' < j \leqq H$ se zmenšila při zachování vzájemných poměrů r_j/r_i, $H' < i, j \leqq H$. To znamená, že

$$r_j < r'_j \quad (1 \leqq j \leqq H'),$$
$$r_j > r'_j \quad (H' < j \leqq H).$$

Podobně platí

$$r'_j < r''_j \quad (H' < j \leqq H''),$$
$$r'_j > r''_j \quad (H'' < j \leqq H)$$

atd. Tím je důkaz skončen. Současně jsme odvodili, že

$$(b_0 + d_0)^{-1} \sum_{h=1}^{H} (c_h d_h)^{\frac{1}{2}} > (b'_0 + d'_0)^{-1} \sum_{h=H'+1}^{H} (c_h d_h)^{\frac{1}{2}} >$$
$$\ldots > (b^*_0 + d^*_0)^{-1} \sum_{h=H^*+1}^{H} (c_h d_h)^{\frac{1}{2}}.$$

Poznámky. 1. Matice (4.8) v našem speciálním případě vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} a_{01}, & a_{02}, & \ldots, & a_{0H} \\ a_{11}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & a_{22}, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & a_{HH} \end{pmatrix},$$

kde $a_{0h} = c_h d_h (b_0 + d_0)^{-1}$ a $a_{hh} = c_h d_h (b_h + d_{h0})^{-1}$.

2. Nepodstatnost t_0 v případě (I) a nepodstatnost $t_1, \ldots, t_H$ v případě (II) by bylo možno také vyvodit z věty 2. Čtenář to může provést jako cvičení. V případě (III) jsou nepodstatné veličiny ve skupině $H^* < j \leqq H$.

3. Výše uvedené optimální řešení jsme našli nezávisle na větě 1, tj. bez prostřednictví vah $p_1^0, \ldots, p_J^0$. V obecnějších případech by bylo možno oba přístupy kombinovat. Obrácením vztahu (3.1), které v našem případě je snadné, mohli bychom $p_1^0, \ldots, p_J^0$ vypočíst na základě hodnot $r_1^0, \ldots, r_H^0$. Připomeňme si, že pro $H^* < j \leqq H$ je $p_j^0 = 0$, protože tyto odhady jsou nepodstatné.

4. Uvažovanou úlohu lze také formulovat jako úlohu o jediném odhadu t_0 za doplňujícího předpokladu, že obor hodnot r_j je vymezen nerovnostmi $r_j \geqq d_j(b_j + d_{j0})^{-1}$, $1 \leqq j \leqq H$. To nám napovídá, jak řešit úlohu o odhadu t_0 za doplňujícího předpokladu, že obor hodnot r_j je vymezen nerovnostmi $0 \leqq r_j \leqq N_j$, kde N_j jsou konstanty. V takovém případě bychom opět vyšli od ničím neomezovaného řešení (6.6) a ta r_j pro která $r_j > N_j$ bychom nahradili hodnotami $r'_j = N_j$ a ostatní r_j bychom úměrně zvětšili tak, aby zůstalo $D_0 = b_0$. Kdyby některá z těchto zvětšených hodnot se ukázala být větší než příslušné N_j, opět bychom položili $r''_j = N_j$ atd. Aplikaci tohoto postupu na oblastní výběr viz v [2], str. 170.

7. NUMERICKÝ PŘÍKLAD

Data následujícího příkladu, za něž vděčím pracovníku ÚÚSKS J. Kozákovi, jsou výsekem určité konkrétní situace. Je dán základní soubor složený ze 720 obcí, u kterých sledujeme dvě veličiny: počet kusů prasat a počet kusů skotu. Naším úkolem je odhadnout úhrnný počet prasat a úhrnný počet skotu v celém souboru. Soubor je rozdělen na 3 oblasti, jejichž rozsahy N_h jsou uvedeny v tabulce 1. V této tabulce

Tabulka 1

Oblast h	N_h	Prasata v tisících kusů		Skot v tisících kusů	
		σ^2_{1h1}	d_{1h}	σ^2_{2h1}	d_{2h}
1	273	0,0023	171,4167	0,0042	313,0218
2	236	0,0026	144,8096	0,0082	456,7072
3	211	0,0540	2404,1340	0,0300	1335,6300
		$b_1 = 36$ $d_{10} = 12,64$		$b_2 = 36$ $d_{20} = 9,41$	

jsou rovněž uvedeny oblastní rozptyly σ^2_{1h1} pro veličinu „počet prasat v tisících kusů“ a oblastní rozptyly σ^2_{2h1} pro „počet skotu v tisících kusů“. Naším úmyslem je vykonat v každé oblasti prostý náhodný výběr bez opakování o rozsahu n_h. Rozsahy n_h chceme zvolit tak, aby úhrnný počet prasat v celém souboru mohl být odhadnut s poměrnou výběrovou chybou 2% a úhrnný počet skotu s poměrnou výběrovou chybou 3%. Jelikož hledaný úhrn je u prasat roven přibližně 300 tisíců kusů a u skotu 200 tisíců kusů, je předepsaný rozptyl roven $b_1 = (300 \times 0,02)^2 = 36$ pro prasata a $b_2 = (200 \times 0,03)^2 = 36$ pro skot. Ze všech možných rozsahů n_1, n_2, n_3, které zaručují tuto (nebo lepší) přesnost, chceme vybrat ty, pro které celkový rozsah výběru

$$n = n_1 + n_2 + n_3 \tag{7.1}$$

je minimální. Roli parametrů r_h tedy v našem případě hrají oblastní rozsahy n_h a náklad je měřen celkovým rozsahem výběru. Rozptyl prostého lineárního odhadu při výše popsaném způsobu výběru je roven (viz [2], str. 112, vzorec (13.7))

$$D_j = \sum_{h=1}^{3} \frac{N_h^2 \sigma^2_{jh1}}{n_h} - \sum_{h=1}^{3} N_h \sigma^2_{jh1} \quad (j = 1, 2)\,. \tag{7.2}$$

Vidíme, že vzorce (7.1) a (7.2) odpovídají vzorcům (1.2) a (1.3), přičemž $r_h = n_h$ a

$$c_1 = c_2 = c_3 = 1\,, \quad c_0 = 0\,, \tag{7.3}$$

$$d_{jh} = N_h^2 \sigma^2_{jh1}\,,\ d_{j0} = \sum_{h=1}^{3} N_h \sigma^2_{jh1} \quad (j = 1, 2;\ h = 1, 2, 3)\,. \tag{7.4}$$

V tabulce 1 jsou vypočtena čísla d_{jh} podle vzorce (7.4). Čísla a_{jh}, vypočtená podle vzorce (3.3) se zřetelem na (7.3), jsou uvedena v tabulce 2. Jelikož $a_{11} < a_{21}$ a $a_{12} < < a_{22}$, kdežto $a_{13} > a_{23}$, žádný z řádků není dominován zbývajícím řádkem. Pokračujme ve vyšetřování podstatnosti obou odhadů sestrojením matice (4.10). Ze vzorce (4.10) a tabulky 2 vyplývá, že

$$\begin{pmatrix} M_{11}, & M_{12} \\ M_{21}, & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,6337; & 13,6833 \\ 11,3962; & 11,2200 \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Tabulka 2

Oblast h	1	2	3	M_{ij} (součet řádku)
a_{1h}	3,5245	2,9774	49,4317	
a_{2h}	6,8930	10,0570	29,4115	
$a_{1h}^{\frac{1}{2}}$	1,8874	1,7255	7,0308	10,6337
$a_{2h}^{\frac{1}{2}}$	2,6255	3,1713	5,4232	11,2200
$a_{1h}a_{2h}^{-\frac{1}{2}}$	1,3424	0,9389	9,1149	11,3962
$a_{2h}a_{1h}^{-\frac{1}{2}}$	3,6716	5,8285	4,1832	13,6833
$a_{1h} - a_{2h}$	−3,3685	−7,0796	+20,0202	
$(a_{1h} - a_{2h})^2$	11,3468	50,1207	400,8084	
$0,5a_{1h} + 0,5a_{2h}$	5,2088	6,5172	39,4216	
$0,12a_{1h} + 0,88a_{2h}$	6,4888	9,2074	31,8139	
$0,075a_{1h} + 0,925a_{2h}$	6,6403	9,5260	30,9130	
$(0,075a_{1h} + 0,925a_{2h})^{\frac{1}{2}}$	2,5769	3,0864	5,5600	11,2233

Jelikož $M_{11} < M_{12}$ a také $M_{22} < M_{21}$, oba odhady jsou podstatné. Jelikož $M_{21} - M_{22} < M_{12} - M_{11}$, můžeme odtud usuzovat, že váha odhadu číslo 2 (pro úhrnný počet skotu) bude větší. Kdybychom za první aproximaci váhy odhadu číslo 1 vzali

$$\frac{M_{21} - M_{22}}{M_{12} + M_{21} - M_{11} - M_{22}} = \frac{0,1762}{3,2258} = 0,055\,,$$

nebyli bychom, jak se dále ukáže, daleko od skutečné hodnoty. Abychom však lépe poznali vlastnosti iteračního postupu odvozeného v § 5, vyjděme od počáteční váhy $p_1^I = 0,5$. Ze vzorce (5.7) a z hodnot tabulky 2 vyplývá, že

$$p_1^{II} = 0,5 +$$

$$+ 2\,\frac{-3,3685(5,2088)^{-\frac{1}{2}} - 7,0796(6,5172)^{-\frac{1}{2}} + 20,0202(39,4216)^{-\frac{1}{2}}}{11,3468(5,2088)^{-\frac{3}{2}} + 50,1207(6,5172)^{-\frac{3}{2}} + 400,8084(39,4215)^{-\frac{3}{2}}} = 0,1204\,.$$

První iterace vedly tedy ke značnému snížení váhy pro odhad číslo 1. Jelikož změna váhy byla příliš velká, je nutno v iteracích pokračovat. Zaokrouhlíme-li p_1^{II} na 0,12, dostáváme

$$p_1^{III} = 0{,}12 +$$

$$+ 2\,\frac{-3{,}3685(6{,}4888)^{-\frac{1}{2}} - 7{,}0796(9{,}2074)^{-\frac{1}{2}} + 20{,}0202(31{,}8139)^{-\frac{1}{2}}}{11{,}3468(6{,}4888)^{-\frac{3}{2}} + 50{,}1209(9.2074)^{-\frac{3}{2}} + 400{,}8084(31{,}8139)^{-\frac{3}{2}}} = 0{,}075\,.$$

Tato hodnota je již velmi blízko řešení. Další iterací bychom dostali $p_1^{IV} = 0{,}0742$, což představuje změnu menší než jedna tisícina. Nyní zbývá stanovit optimální n_1, n_2 a n_3 Podle vzorce (3.1) a posledního řádku tabulky 2

$$n_1 = 2{,}5769\,.\,11{,}2233 \doteq 29\,,$$
$$n_2 = 3{,}0864\,.\,11{,}2233 \doteq 35\,,$$
$$n_3 = 5{,}5600\,.\,11{,}2233 \doteq 62\,,$$

a celkový rozsah je roven

$$n = 29 + 35 + 62 = 126\,.$$

Z matice (7.5) snadno dostaneme rozsah, který by byl potřeba, kdybychom zvolili strukturu pokusu optimální buď pro samotný odhad číslo 1 nebo samotný odhad číslo 2, tj. zvolili rozsahy výběru úměrné buď číslům $a_{1h}^{\frac{1}{2}}$ nebo $a_{2h}^{\frac{1}{2}}$. V prvním případě by k zjištění nerovností $D_1 \leqq 36$ a $D_2 \leqq 36$ bylo třeba vybrat

$$M_{11}M_{12} = 10{,}6337\,.\,13{,}6833 \doteq 145$$

obcí, a v druhém případě

$$M_{22}M_{21} = 11{,}2200\,.\,11{,}3962 \doteq 128$$

obcí. Zdůvodnění těchto vzorců přenecháváme čtenáři. Vidíme, že struktura optimální pro odhad obou úhrnů je jen o málo lepší než struktura optimální pro odhad samotného úhrnu číslo 2 (skot) a je značně lepší než struktura optimální pro samotný odhad číslo 1 (prasata). To souhlasí s velikostí vah obou odhadů: 0,925 a 0,075.

Podrobnější příklad bude propočten v kandidátské disertaci [6].

8. HLEDISKO TEORIE HER

V § 2 jsme viděli, že naši úlohu lze — pokud jde o strukturu pokusu — formulovat jako úlohu o minimalisaci maximálního z čísel

$$(C - c_0)\,\frac{D_j + d_{j0}}{b_j + d_{j0}} = \sum_{h=1}^{H} c_h r_h \sum_{h=1}^{H} \frac{d_{jh}}{r_h} \quad (1 \leqq j \leqq J)\,. \tag{8.1}$$

Přítomnost principu minimaxu (minimalisace maxima) naznačuje, že úlohu je možno vtěsnat do rámce teorie her, o čemž se nyní přesvědčíme.

Prvním hráčem budiž výzkumník, který provádí pokud a volí parametry $r_1, \ldots, r_H$, a druhým hráčem budiž někdo, kdo volí některý z odhadů t_j. Všechny možné volby parametrů $(r_1, \ldots, r_H)$ tvoří tedy množinu strategií výzkumníka a jednotlivé odhady t_j tvoří systém (čistých) strategií jeho protihráče. Jsou-li zvoleny parametry $r_1, \ldots, r_H$ a odhad t_j, pak výzkumníkova prohra je dána výrazem (8.1). Jeho snahou je minimalisovat maximální možnou prohru. To se mu podaří právě tehdy, zvolí-li $r_h = \lambda r_h^0$, kde r_h^0 jsou dány rovnicí (3.1) a λ je libovolná konstanta, nemající vliv na strukturu pokusu. To znamená, že $(\lambda r_1^0, \ldots, \lambda r_H^0)$ představuje optimální výzkumníkovu strategii.

Je-li mezi odhady t_j jen jeden podstatný, jako například v případě (II) § 6, potom jeho volba představuje čistou optimální strategii výzkumníkova protihráče. V obecném případě protihráč má vždy optimální smíšenou strategii spočívající v tom, že odhad t_j volí s pravděpodobností p_j, $p_j \geqq 0$, $\sum p_j = 1$. Optimální pravděpodobnosti $p_j = p_j^0$ jsou právě ty, které vystupují ve vztahu (3.1).

Hra má cenu (termín teorie her) a tato cena je rovna minimaxální hodnotě výrazu (8.1). Z důkazu věty 1 vyplývá (viz např. rovnice (3.9) a (3.15)), že cena hry je rovna

$$\left(\sum_{h=1}^{H} \left[\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j^0\right]^{\frac{1}{2}}\right)^2 .$$

Jelikož však věty teorie her nejsou běžně známy, a jelikož přímé metody nás jednoduchým způsobem dovedly nejen k důkazu existence optimálního řešení, nýbrž i k metodě jeho efektivního výpočtu, nepoložili jsme teorii her do základu tohoto článku a spokojujeme se s dostatečným vyjasněním souvislostí.

Z obecných vět teorie her například vyplývá, že pro $J > H$ existuje alespoň $J - H$ nepodstatných podhadů. V § 6, kde bylo $J = H + 1$, existoval alespoň jeden nepodstatný odhad, jak se lze přesvědčit, projdeme-li případy (I) (II) a (III). V případě (III) je tvrzení důsledkem toho že $H^* < H$. Z knih o teorii her lze v souvislosti s touto problematikou doporučit knihu [3] kap. I a II a populární velmi přístupnou knížku [4].

9. NELINEÁRNÍ NÁKLADY

Někdy lze náklady lépe vystihnout nelineární funkcí $C = C(r_1 \ldots r_H)$. V tom případě vyjdeme od určitého počátečního řešení $r_h = r_h^+$ kolem něhož rozvineme C v Taylorovu řadu až do lineárních členů. Tím dostaneme pro C v okolí bodu $(r_1^+, \ldots \ldots, r_H^+)$ aproximaci

$$C^+ = \sum_{h=1}^{H} c_h^+ r_h + c_0^+ , \tag{9.1}$$

kde

$$c_h^+ = \left.\frac{\partial C}{\partial r_h}\right|_{r_h = r_h^+}$$

a

$$c_0^+ = C(r_1^+, \ldots, r_H^+) - \sum_{h=1}^{H} c_h^+ r_h^+ .$$

Podle předpokladu je C rostoucí funkcí každého argumentu r_h a tedy $c_h^+ \geqq 0$. Lze tedy najít řešení úlohy pro náklad daný rovnicí (9.1). Toto řešení označme $r_1^*, \ldots, r_H^*$. Nyní celý postup opakujeme, vycházejíce od nákladové funkce C^*, mající tentýž tvar jako C^+, až na to, že místo hodnot r_h^+ je použito hodnot r_h^*. Opakováním tohoto postupu se můžeme libovolně přiblížit řešení, které odpovídá funkci $C = C(r_1, \ldots, r_H)$. Otázkou, za jakých podmínek k takové konvergenci dochází, se opět zde nebudeme zabývat.

Např. pro funkci tvaru

$$C = \sum_{h=1}^{H} (\alpha_h r_h + \beta_h r_h^{\frac{1}{2}}) + \gamma$$

máme

$$c_h^+ = \alpha_h + \tfrac{1}{2}\beta_h(r_h^+)^{-\frac{1}{2}} \quad (1 \leqq h \leqq H),$$

$$c_0^+ = \gamma + \tfrac{1}{2}\sum_{h=1}^{H} \beta_h(r_k^+)^{\frac{1}{2}}.$$

Podobně bychom mohli řešit i případ, kdy rozptyly jsou nelineární funkcí r_h^{-1}. To však se stává velmi zřídka.

10. SOUVISLOST MEZI DVĚMA PŘÍSTUPY

Nakonec si všimněme souvislosti mezi řešením opírajícím se o „sloučený" rozptyl (2.2) a „sloučený" rozptyl (2.3). Při použití výrazu (2.2) jsou optimální r_j úměrné číslům $c_h^{-\frac{1}{2}}(\sum v_j d_{jh})^{\frac{1}{2}}$, a při použití výrazu (2.3) jsou úměrné číslům $c_h^{-\frac{1}{2}}(\sum p_j^0(b_j + d_{j0})^{-1} \mathrm{d}_{jh})^{\frac{1}{2}}$, jak ukazuje vzorec (3.1). Zvolíme-li tedy

$$v_j = \frac{p_j^0}{b_j + d_{j0}} \quad (1 \leqq j \leqq J),$$

dostaneme v obou případech shodné řešení optimální struktury.

Literatura

[1] *T. Dalenius:* Sampling in Sweden, Contributions to the Methods and Theories of Sample Survey Practice. Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1957.

[2] *J. Hájek:* Teorie pravděpodobnostního výběru s aplikacemie na výběrová šetření. Nakl. ČSAV, Praha, 1960.

[3] *D. Blackwell, M. A. Girshick:* Theory of Games and Statistical Decisions. New York — John Wiley, London — Chapman and Hall. Ruský překlad: Теория игр и статистических решений. Изд. иностр. лит., Москва, 1958.

[4] *J. D. Williams:* The compleat strategyst. Mc Graw-Hill, New York, London, Toronto, 1954. Ruský překlad: Совершенный стратег. Изд. сов. радио, Moskva, 1960.

[5] *Svein Nordbotten:* Allocation in Stratified Sampling by Means of Linear Programming. Skandivisk Aktuarietidskrift, 1956.

[6] *J. Kozák:* Užití víceúčelových výběrů v podmínkách socialistické státní statistiky (se zvláštním zaměřením na statistiku zemědělskou). Kandidátská disertace, ÚÚSKS, 1961.

[7] *Littelwood, Hardy, Pólya:* Inequalities. Cambridge, University Press, 1934.

Резюме

МИНИМАЛИЗАЦИЯ РАСХОДОВ ПРИ ДОСТИЖЕНИИ ЖЕЛАЕМОЙ ТОЧНОСТИ ОДНОВРЕМЕННО У НЕСКОЛЬКИХ ОЦЕНОК

ЯРОСЛАВ ГАЕК (Jaroslav Hájek)

Рассматривается случайный опыт, целью которого является получение оценок $t_1, \ldots, t_J$ для параметров $\Theta_1, \ldots, \Theta_J$. Опыт и оценки твердо установлены вплоть до H произвольно выбираемых параметров $r_1, \ldots, r_H$, которые неотрицательны и обладают тем свойством, что расходы C равны

$$C = \sum_{h=1}^{H} c_h r_h + c_0 \quad (c_h \geqq 0) \tag{1.2}$$

и дисперсии оценок t_j равны

$$D_j = \sum_{h=1}^{H} \frac{d_{jh}}{r_h} - d_{j0} \quad (1 \leqq j \leqq J,\ d_{jh} \geqq 0)\,. \tag{1.3}$$

Задача заключается в том, чтобы выбрать параметры $r_1, \ldots, r_H$ таким образом, чтобы у всех оценок достичь точности, данной неравенствами

$$D_j \leqq b_j \quad (1 \leqq j \leqq J) \tag{1.1}$$

и минимализировать C.

Этой задачей занимался Т. Далениус в книге [1].

В настоящей статье решение этой задачи сводится к задаче минимализации выражения

$$\sum_{h=1}^{H} \Big(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \Big)^{1/2}, \tag{+}$$

где область значений p_j определена соотношениями $p_j \geqq 0$ и $\sum p_j = 1$, и числа a_{jh} заданы формулой (3.3). Оптимальные значения параметров $r_1, \ldots, r_H$ заданы тогда формулой (3.1), где p_j^0 — значения, минимализирующие выражение (+).

В § 5 приведены критерии, по которым можно определить, для которых j $p_j^0 = 0$; в § 6 рассматривается важный частный случай, когда

$$D_j = \frac{d_j}{r_j} - d_{j0} \quad (1 \leqq j \leqq H) \tag{6.1}$$

и

$$D_0 = \sum_{j=1}^{H} D_j = \sum_{j=1}^{H} \frac{d_j}{r_j} - d_0\,. \tag{6.2}$$

Этот случай будет иметь, например, место в том случае, когда опыт разделен на H частичных опытов, причем через r_j обозначен объем j-ого частичного опыта, и

$$t_0 = t_j + \ldots + t_H\,.$$

В § 7 имеется численный пример для $J = 2$ и $H = 3$. В § 8 выяснены некоторы связи с теорией игр. В § 9 намечено решение той же задачи в случае, когда расходы C являются нелинейными функциями параметров r_h.

Summary

COST MINIMIZATION IN MULTIPARAMETER ESTIMATION

JAROSLAV HÁJEK

Consider a random experiment providing estimates $t_1, \ldots, t_J$ of parameters $\Theta_1, \ldots, \Theta_J$. Both experiment and estimation are fixed except for H parameters $r_1, \ldots, r_H$ which are non-negative and such that the cost C equals

$$(1.2) \qquad C = \sum_{h=1}^{H} c_h r_h + c_0 \quad (c_h \geqq 0)$$

and the variances of estimates t_j are

$$(1.3) \qquad D_j = \sum_{h=1}^{H} \frac{d_{jh}}{r_h} - d_{j0} \quad (1 \leqq j \leqq J, d_{jh} \geqq 0)\,.$$

The problem is to choose the parameters $r_1, \ldots, r_H$ in such a manner that all the variances satisfy

$$(1.1) \qquad D_j \leqq b_j \quad (1 \leqq j \leqq J)$$

and C be minimum.

This problem was treated in [1] by T. Dalenius.

In the present paper, the problem is reduced to minimization of

$$(+) \qquad \sum_{h=1}^{H} \left(\sum_{j=1}^{J} a_{jh} p_j \right)^{\frac{1}{2}},$$

where the domain of the p_j's is defined by $p_j \geqq 0$, $\sum p_j = 1$, and where the coefficients a_{jh} are determined in (3.3). The optimal values of the parameters $r_1, \ldots, r_H$ are then given by (3.1), where the p_j^0 maximize the expression (+).

In section 5, conditions are given for determining the indices j such that $p_j^0 = 0$. An important special case, described by

$$(6.1) \qquad D_j = \frac{d_j}{r_j} - d_{j0} \quad (1 \leqq j \leqq H)$$

and

$$(6.2) \qquad D_0 = \sum_{j=1}^{H} D_j = \sum_{j=1}^{H} \frac{d_j}{r_j} - d_0$$

is examined in section 6. This occurs *e. g.* if the experiment consists of H independent experiments, r_j is the size of the j-th experiment and $t_0 = t_1 + \ldots + t_H$.

A numerical example with $J = 2$ and $H = 3$ is given in section 7. Section 8 connects the presented problem with the theory of games. Section 9 suggests a method of solution for a cost function depending on the r_h's non-linearly.

Adresa autora: Inž. dr. *Jaroslav Hájek* C.Sc., Matematický ústav ČSAV, Praha 1, Žitná 25.