Jiří Klír

Řešení soustav booleových rovnic

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 4, 265–271

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102808

ŘEŠENÍ SOUSTAV BOOLEOVÝCH ROVNIC

JIŘÍ KLÍR

(Došlo 13. listopadu 1959.)

V článku je vysvětlen obsah pojmu „řešení Booleových rovnic" a je naznačeno uplatnění řešení soustav Booleových rovnic při synthese logických sítí. Je popsán jeden ze známých obecných algoritmů pro praktické řešení soustav Booleových rovnic o n neznámých. Jako příklad je provedeno úplné řešení Booleovy rovnice o jedné neznámé.

Při synthese logických sítí[1]) se může někdy vyskytnout potřeba vyjádřit explicitně jistou Booleovu proměnnou z určité Booleovy rovnice, popř. ze soustavy Booleových rovnic. Ukažme to na několika jednoduchých příkladech:

Příklad 1. Chceme převést logickou síť o třech uzlech M, N, P ve tvaru trojúhelníka (obr. 1a) na ekvivalentní síť tvaru hvězdy (obr. 1b). Transformace bude vyjádřena Booleovými rovnicemi[2])

$$
\begin{aligned}
f_1 f_2 &= x + yz\,, \\
f_1 f_3 &= z + xy\,, \\
f_2 f_3 &= y + xz\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

které udávají nutnou a postačující podmínku funkční shodnosti obou sítí.[3]) Protože potřebujeme znát funkce f_1, f_2 a f_3, musíme je ze soustavy (1) explicitně vyjádřit, tj. soustavu (1) převést na tvar

$$
f_i = f_i(x, y, z)\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{2}
$$

Rovnice (2) nazýváme pak řešením soustavy rovnic (1).

[1]) Logickou sítí rozumíme zde fysikální soustavu vyznačující se tím, že modeluje jisté logické vztahy, které můžeme vždy popsat vhodnou soustavou Booleových funkcí nebo Booleovou maticí (definice a základní vlastnosti Booleových matic jsou uvedeny např. v článku [7]). Logická síť se skládá z uzlů a větví, přičemž větví se rozumí spojnice dvou uzlů, jejíž průchodnost (schopnost přenášet signál) závisí na stavu fysikálních prvků sítě. Interpretujeme-li stavy každého z těchto prvků jako hodnoty jisté Booleovy proměnné, pak stavy určité větve lze interpretovat jako Booleovu funkci příslušných proměnných.

[2]) Veličiny x, y, z ve vztahu (1) a na obr. 1a jsou obecně Booleovými funkcemi.

[3]) V tomto příkladě i v dalším textu vyjadřujeme paralelní spojení dvou větví Booleovým součtem a seriové spojení dvou větví Booleovým součinem.

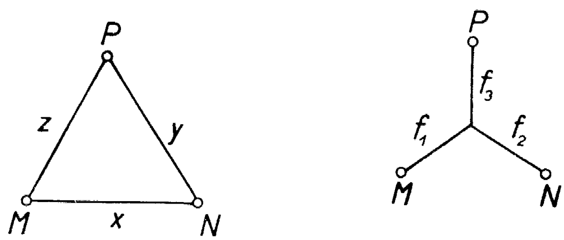
Příklad 2. Mějme jistý logický paměťový prvek ${}^kX$ (např. polarisované relé, zpožďovací element, klopný obvod atd.), jehož stav ${}^kX^{t+1}$ v době $t + 1$ (uvažujeme synchronní systém) závisí na jeho stavu ${}^kX^t$ v době t a na stavech jeho vstupů ${}^kI_1$, ${}^kI_2, \ldots$, ${}^kI_n$ v době t. Tyto závislosti jsou pro každý druh paměťového prvku vyjádřeny tzv. charakteristickou Booleovou rovnicí

$$(3) \qquad {}^kX^{t+1} = {}^kf({}^kX, {}^kI_1, {}^kI_2, \ldots, {}^kI_n)^t .$$

U některých prvků nejsou všechny kombinace stavů vstupů a ${}^kX^t$ dovoleny, takže charakteristická rovnice musí být u takových prvků doplněna dalšími Booleovými rovnicemi tvaru

$$(4) \qquad {}^kf_i({}^kX, {}^kI_1, {}^kI_2, \ldots, {}^kI_n)^t = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots ,$$

které tyto podmínky vyjadřují.



Obr. 1.

Uvažujme nyní, že p prvků ${}^kX$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ je připojeno k jistým uzlům logické sítě, mézi nimiž a základním uzlem (napaječem) jsou zadány Booleovy funkce

$$(5) \qquad {}^kX^{t+1} = {}^kg({}^1X, {}^2X, \ldots, {}^kX, \ldots, {}^pX)^t , \quad k = 1, 2, \ldots, p .$$

Pro synthesu uvažované logické sítě nás však zajímají funkce

$$(6) \qquad {}^kI_j^t = {}^kF_j({}^1X, {}^2X, \ldots, {}^kX, \ldots, {}^pX)^t ,$$
$$k = 1, 2, \ldots, p, \; j = 1, 2, \ldots, n .$$

Protože levé strany rovnic (3) a (5) jsou stejné, musí se rovnat i jejich pravé strany, tj.

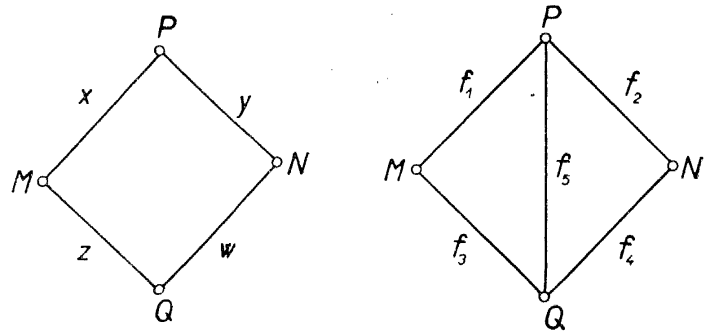
$$(7) \qquad {}^kf({}^kX, {}^kI_1, {}^kI_2, \ldots, {}^kI_n)^t = {}^kg({}^1X, {}^2X, \ldots, {}^kX, \ldots {}^pX)^t ,$$
$$k = 1, 2, \ldots, p .$$

Řešením rovnic (7) a (4) explicitně pro ${}^kI_j^t$ $(k = 1, 2, \ldots, p, j = 1, 2, \ldots, n)$ dostaneme postupně všechny potřebné Booleovy funkce (6) pro všechny vstupy všech napěťových prvků v síti. Nejčastěji se vyskytují logické paměťové prvky s jedním nebo dvěma vstupy, výjimečně též prvky se třemi vstupy.

Příklad 3. Mějme jednoduchou logickou síť se vstupem M a výstupem N podle obr. 2a, kde veličiny x, y, z, w jsou obecně jisté Booleovy funkce. Tuto síť chceme transformovat do sítě podle obr. 2b, mající stejné vlastnosti s ohledem na průchodnost signálů mezi uzly M a N (často lze tímto způsobem ušetřit fyzikální prvky). Transformace je vyjádřena rovnicí

$$xy + zw = f_1 f_2 + f_3 f_4 + f_1 f_4 f_5 + f_2 f_3 f_5 \,, \tag{8}$$

ze které je třeba vyjádřit explicitně $f_1, f_2, \ldots, f_5$.



Obr. 2.

Příklad 4. Nechť **A**, **B** jsou dvě různé množiny kódů (posloupností dvojkových čísel). Všechny kódy patřící do téže množiny se vyznačují jistými společnými vlastnostmi. Předpokládejme, že každému kódu v množině **A** odpovídá jistý kód v množině **B** a naopak. Známe-li vztah převádějící kódy z množiny **A** do množiny **B**, který je obecně vyjádřen Booleovou rovnicí (resp. soustavou Booleových rovnic), pak získání opačného převodního vztahu je záležitostí řešení této rovnice (resp. soustavy rovnic) explicitně pro jiné proměnné.

Podobných případů, které v souvislosti se synthesou logických sítí vedou k řešení Booleových rovnic, by bylo možno nalézt mnoho. Potíž při řešení těchto rovnic spočívá v tom, že v Booleově algebře neexistují operace odčítání a dělení, takže nemůžeme postupovat obvyklými způsoby. Ve zbývajícím textu popíšeme nyní algoritmus pro řešení soustav Booleových rovnic.

Předpokládejme, že $x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m$ jsou Booleovy nezávisle proměnné. Předpokládejme dále, že je dána soustava k Booleových rovnic

$$f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m) = g_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, a_2, \ldots, a_m) \,, \quad s = 1, 2, \ldots, k \,. \tag{9}$$

Chceme řešit tyto rovnice explicitně pro x_p ($p = 1, 2, \ldots, n$) tak, aby každé x_p bylo vyjádřeno pouze pomocí proměnných a_q ($q = 1, 2, \ldots, m$), tj. chceme soustavu tvaru (9) převést na ekvivalentní soustavu tvaru

$$x_p = F_p(a_1, a_2, \ldots, a_m) \,, \quad p = 1, 2, \ldots, n \,. \tag{10}$$

Nejdříve převedeme soustavu (9) na jedinou rovnici. Postupujeme tak, že každou rovnici soustavy (9) vyjádříme ve tvaru

$$f_s\bar{g}_s + \bar{f}_s g_s = 0\,, \quad s = 1, 2, \ldots, k\,. \tag{11}$$

Takto upravené rovnice můžeme sečíst (ve smyslu Booleovy algebry), čímž dostaneme

$$\sum_{s=1}^{k}(f_s\bar{g}_s + \bar{f}_s g_s) = 0\,. \tag{12}$$

Protože levá strana rovnice (12) je obecně funkcí všech x_p ($p = 1, 2, \ldots, n$) a všech a_q ($q = 1, 2, \ldots, m$), může být vyjádřena vždy v kanonickém tvaru

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} A_i X_i = 0\,, \tag{13}$$

kde X_i jsou základní konjunkce[4]) proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$, odpovídající stavovému indexu i,[5]) A_i jsou jisté funkce proměnných $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Z uvedeného je zřejmé, že jakoukoliv soustavu Booleových rovnic lze vždy nahradit jedinou rovnicí tvaru (13). V dalším se proto můžeme omezit pouze na řešení jediné Booleovy rovnice upravené do tvaru (13). Úkolem tohoto řešení je najít všechna vyjádření pro x_p ve tvaru (10) tak, aby levá strana rovnice (13) po dosazení za x_p dala 0 (vždy pro jedno takové vyjádření všech x_p).

Je známa řada metod, jimiž lze řešit Booleovu rovnici (13). V našem případě popíšeme praktickou metodu, sestávající z následujících kroků:

1. Všechny neznámé x_p a jejich negace $\bar{x}_p$ vyjádříme nezávisle na rovnici (13) v obecném tvaru

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{j=0}^{2^m-1} K_{p,j} \,.\, \alpha_j\,, \\ \bar{x}_p &= \sum_{j=0}^{2^m-1} \bar{K}_{p,j} \,.\, \alpha_j\,, \end{aligned} \qquad p = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{14}$$

kde α_j jsou základní konjunkce proměnných $a_1, a_2, \ldots, a_m$ odpovídající stavovému indexu j. $K_{p,j}$ jsou dosud neznámé konstanty, které mohou nabývat hodnoty 0 nebo 1. Tím je řešení rovnice (13) vyjádřeno v úplné normální disjunktní formě z parametrů $a_1, a_2, \ldots, a_m$ a s neurčitými součiniteli $K_{p,j}$.[6])

[4]) Základní konjunkce obsahuje všechny proměnné $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a to buď v jejich původní hodnotě, nebo v negaci.

[5]) Stavový index i je číslo, které při vyjádření ve dvojkové soustavě má n řádů (označených $0, 1, \ldots, n-1$) pro případ n Booleových proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Řád h tohoto čísla odpovídá proměnné x_{h+1} a jeho hodnota určuje, zda v příslušné základní konjunkci má být x_{h+1} (pro $h = 1$) nebo $\bar{x}_{h+1}$ (pro $h = 0$). Např. stavový index $i = (13)_{10} = (1101)_2$ určuje konjunkci $x_4x_3\bar{x}_2x_1$.

[6]) V případě, že $m > 2^n$ (jen velmi ojedinělé případy), je výhodnější vyjádřit řešení rovnice (13) v úplné disjunktní normální formě z parametrů A_i ($i = 1, 2, \ldots, 2^n$) rovnice (13) a s neurčitými součiniteli $K_{p,j}$ ($p = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, 2^{2^n}$). Řešení rovnice (13) má pak podobu $x_p = f_p(A_1, A_2, \ldots, A_{2^n})$, $p = 1, 2, \ldots, n$, kde $A_1, A_2, \ldots, A_{2^n}$ jsou zmíněné funkce proměnných $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

2. Dosadíme x_p a $\bar{x}_p$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$ v podobě výrazů (14) do rovnice (13) a stejné základní konjunkce α_j $(j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1)$ vytkneme. Koeficienty vzniklé takto u jednotlivých konjunkcí α_j označme κ_j $(j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1)$.

3. Jsou-li některé koeficienty $\kappa_j = 1$, pak musí být odpovídající konjunkce $\alpha_j = 0$. U zbývajících konjunkcí můžeme uvažovat $\kappa_j = 0$ a z takto vzniklých rovnic určíme pak vhodné výběry $n \,.\, 2^m$ čísel $K_{p,j}$. Dosazením $K_{p,j}$ do (14) dostáváme pak řešení (10) rovnice (13).[7])

Při řešení Booleových rovnic nastává nejčastěji případ, že u některých činitelů $K_{p,j}$ je možný výběr hodnot 0 nebo 1. Protože při synthese logických sítí je vždy snaha minimisovat počet symbolů v Booleových funkcích, je výhodné provést výběr optimálních hodnot těchto činitelů následujícím způsobem:

a) Určené hodnoty činitelů $K_{p,j}$ $(p = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1)$ zaznamenáme pomocí symbolů 0 a 1 (nebo jiným způsobem) do p Svobodových map[8]) (konstanty $K_{p,j}$ se stejnou hodnotou indexu p vždy do téže mapy; umístění v mapě je dáno hodnotou indexu j, pojímaného jako stavový index). Políčka odpovídající v mapách činitelům s možným výběrem hodnot se označí vhodným symbolem jako stavy, na jejichž hodnotách nezáleží (stavy „*don't care*").[9])

b) Pomocí mřížek popsaných v pracích [3], [4] nebo [7] a pomocí algoritmu popsaného v pracích [5], [6] nebo [7] lze dojít snadno k minimálním rozvojům funkcí (10), vyjadřujících řešení soustavy (9). Tyto rozvoje jsou přitom minimální i s ohledem na vhodné hodnoty těch činitelů $K_{p,j}$, které poskytovaly volný výběr hodnot.

Pro ilustraci popsaného způsobu řešení Booleovy rovnice tvaru (13) uveďme nyní řešení klopného obvodu s jedním vstupem I a dvěma disjunktními stavy X a $\bar{X}$ jako jednoduchou aplikaci postupu popsaného v příkladu 2. Činnost tohoto klopného obvodu je dána tabulkou:

X^{t+1}	I^t
X^t	0
$\bar{X}^t$	1

Tuto tabulku lze vyjádřit rovnicí

$$X^{t+1} = (\bar{I}X + I\bar{X})^t \,. \tag{15}$$

[7]) Tato úvaha dává (jak se lze snadno přesvědčit) tuto nutnou a postačující podmínku řešitelnosti rovnice (13):

Jestliže koeficient u α_j vychází identicky jednotkový, pak $\alpha_j = 0$ je předem zaručeno vztahem mezi parametry $a_1, a_2, \ldots, a_m$ rovnice (13).

[8]) Svobodovy mapy, spolu s jinými pomůckami, mají velký význam pro synthesu logických sítí, kde slouží zejména pro usnadnění převodu Booleových funkcí z tabulkového vyjádření do zjednodušené nebo případně i minimální algebraické formy. Jsou popsány v pracech [3], [4] nebo [7].

[9]) Stavy „*don't care*" jsou ty, u nichž je předem známo, že se v dané logické síti vůbec nevyskytují. Je proto lhostejné, jaké hodnoty funkcí logické sítě se jim přiřadí.

Předpokládejme nyní, že stav klopného obvodu v době $t + 1$ má zobrazovat Booleovu funkci F, takže $X^{t+1} = F$, a tedy

$$\bar{I}X + I\bar{X} = F.\text{[10]} \tag{16}$$

Chceme určit, jaká funkce má být přivedena na vstup I. K tomu je třeba řešit rovnici (16) podle I.

Nejdříve uvedeme rovnici (16) popsaným způsobem na tvar (13)

$$\bar{I}(\bar{F}X + F\bar{X}) + I(\bar{F}\bar{X} + FX) = 0\,. \tag{17}$$

Předpokládáme řešení ve tvaru

$$I = K_0\bar{F}\bar{X} + K_1\bar{F}X + K_2F\bar{X} + K_3FX\,, \tag{18}$$

přičemž

$$\bar{I} = \bar{K}_0\bar{F}\bar{X} + \bar{K}_1\bar{F}X + \bar{K}_2F\bar{X} + \bar{K}_3FX\,.$$

Dosadíme tyto výrazy za I a $\bar{I}$ do (17) a dostaneme

$$\bar{K}_1\bar{F}X + \bar{K}_2F\bar{X} + K_0\bar{F}\bar{X} + K_3FX = 0\,.$$

Odtud plynou tyto hodnoty neurčitých součinitelů

$$K_0 = K_3 = 0\,, \quad K_1 = K_2 = 1\,.$$

Jejich dosazením do (18) dostáváme již řešení

$$I = \bar{F}X + F\bar{X}\,.$$

V tomto triviálním případě nepotřebujeme užívat metody minimisace, neboť je zřejmé, že nalezenou funkci nelze již zjednodušit. Ve složitějších případech je však užití této metody velice užitečné.

Literatura

[1] *Phister M.*: Logical Design of Digital Computer. John Wiley, New York 1958.

[2] *Birkhoff G.*: Lattice Theory. Amer. Math. Soc., New York 1948.

[3] *Svoboda A.*: Graficko-mechanické pomůcky užívané při analyse a synthese kontaktových obvodů. Stroje na zpracování informací, sb. IV, 1956, str. 9—21.

[4] *Svoboda A.*: Graphical-mechanical aids for the synthesis of relay circuits. Nechrichtentechnische Fachberichte, Beihefte der NTZ, Viveg, Brunswick, 1956, 4, str. 213—218.

[5] *Svoboda A.*: Some applications of contact grids. Stroje na zpracování informací, sb. VI, 1958, str. 9—33.

[6] *Svoboda A.*: Some applications of contact grids. Proc. Inter. Symp. on the Theory of Switching. Part I. Harvard Univ. Press, 1959, str. 293—305.

[7] *Klír J.*, *Seidl L.*: Metody analysy a synthesy reléových obvodů. Slaboproudý obzor 19 (1958), čís. 7, 8 a 9.

[10]) V rovnici (16) i v dalších rovnicích je I, $\bar{I}$, X a $\bar{X}$ pojímáno přirozeně vždy v době t. Nemůže proto dojít k omylu a index t není tedy nutno dále užívat.

Резюме

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ БУЛЬСКИХ УРАВНЕНИЙ

ИРЖИ КЛИР (Jiří Klír)

В статье поясняется содержание понятия „решение бульских уравнений“ и приводятся некоторые сведения о возможности примренеия решения системы бульских уравнений в синтезе логических сетей. Описывается алгорифм (один из числа известных общих алгорифмов) для практического решения системы бульских уравнений с n неизвестными. В качестве примера приводится полное решение бульского уравнения с одним неизвестным.

Summary

SOLUTION OF SYSTEMS BOOLEAN EQUATIONS

JIŘÍ KLÍR

This paper describes the meaning of the term "solution of Boolean equations" and shows the possibility of using the solution of systems of Boolean equations for logical network synthesis. One of the known algorithms is mentioned, suitable for the practical solution of Boolean equations with n unknowns. As an example the solution of a Boolean equation with one unknown is considered.

Adresa autora: Ing. *Jiří Klír*, Výzkumný ústav matematických strojů, Dlouhá 37, Praha 1.