

Aplikace matematiky

Otakar Jaroš

Aproximace exponenciálními funkcemi

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 4, 249–264

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102807>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

APROXIMACE EXPONENCIÁLNÍMI FUNKCEMI

OTAKAR JAROCH

(Došlo dne 9. ledna 1961.)

V článku se popisuje nová metoda výpočtu koeficientů exponenciální aproximace ve smyslu nejmenší kvadratické odchylky.

1. ÚVOD

Některé metody syntézy lineárních přenosových soustav jsou založeny na aproximaci jisté funkce $f(t)$, v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ se čtvercem integrovatelné, exponenciálními funkcemi:

$$(1.1) \quad f(t) \approx f_n(t) = a_1^{(n)} e^{-\alpha t} + a_2^{(n)} e^{-2\alpha t} + \dots + a_n^{(n)} e^{-n\alpha t}, \quad t \geq 0, \alpha > 0.$$

Požaduje se aproximace v smyslu nejmenší kvadratické odchylky ε_n^2 , tedy

$$(1.2) \quad \varepsilon_n^2 = \int_0^{\infty} [f(t) - f_n(t)]^2 dt = \min.$$

Poznámka 1. Podobně jako se používá termínu *trigonometrický mnohočlen*, budeme lineární kombinaci exponenciálních funkcí $a_1 \exp(-\alpha t) + a_2 \exp(-2\alpha t) + \dots + a_n \exp(-n\alpha t)$, α reálné, nazývat *exponenciálním mnohočlenem*.

Poznámka 2. Exponenciální mnohočlen $f_n(t)$ v (1.1), který v smyslu nejmenší kvadratické odchylky v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ nejlépe aproximuje danou funkci $f(t)$, budeme nazývat *η -tou exponenciální aproximací této funkce*.

Tímto způsobem aproximují LANING a BATTIN v knize *Random processes in automatic control* [2] korelační funkci stacionárního náhodného procesu. Energetické spektrum příslušné exponenciální aproximaci korelační funkce je potom racionální funkce lomená (energetické spektrum je totiž Fourierův obraz korelační funkce). Na tomto základě lze dále konstruovat optimální přenosovou charakteristiku podle Wienerovy teorie [2]. Laning a Battin udávají velmi pracnou a zdlouhavou metodu výpočtu koeficientů $a_k^{(n)}$ v (1.1).

N. K. KRUG [1] aproximuje exponenciálními funkcemi předepsaný vstupní a výstupní signál tvarovacího čtyřpólu, jehož syntézu potom na základě těchto exponenciálních aproximací provádí. N. K. Krug neudává žádný předpis pro výpočet koeficientů $a_k^{(n)}$.

V tomto článku popisujeme novou metodu výpočtu koeficientů exponenciální aproximace. Metoda je charakterisována tím, že vychází z funkčních hodnot Laplaceova obrazu aproximované funkce a dále tím, že vlastní výpočet se provádí jako násobení číselné matice sloupcovým vektorem. Tuto operaci lze provést na kalkulačním stroji velmi rychle.

OBSAH tohoto článku se člení na čtyři části:

1. Úvod.
2. *Ortogonalní exponenciální mnohočleny* (výpočet jejich koeficientů a základní vlastnosti, tabulka koeficientů prvních deseti ortogonálních exponenciálních mnohočlenů — matice \mathbf{B}_{10}).
3. *Ortogonalní rozvoje* (výpočet koeficientů ortogonální a ortonormální řady, matice pro výpočet koeficientů prvních deseti členů ortogonálního rozvoje).
4. *Exponenciální aproximace* (výpočet koeficientů, matice pro výpočet první až šesté exponenciální aproximace, interkalární aproximace, příklady).
5. *Závěr* (obsahuje rekapitulaci odvozeného postupu).

2. ORTOGONÁLNÍ EXPONENCIÁLNÍ MNOHOČLENY

Soustava exponenciálních funkcí $\{e^{-k\alpha t}\}$, $\alpha > 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$, je v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ úplná vzhledem k prostoru lebesguovsky integrovatelných funkcí [6]. Ortonormalisací této soustavy obdržíme tedy rovněž úplnou soustavu funkcí v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ ortonormálních, které označme

$$(2.1) \quad \psi_k(\alpha t) = \sum_{\mu=1}^k d_{k\mu} e^{-\mu\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$(2.2) \quad \int_0^{\infty} \psi_m(\alpha t) \psi_n(\alpha t) dt = \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

kde δ_{mn} označuje Kroneckerův symbol.

Označme

$$(2.3) \quad \varphi_k(\alpha t) = \sum_{\mu=1}^k b_{k\mu} e^{-\mu\alpha t}, \quad \alpha > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

soustavu takových v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ ortogonálních funkcí, které splňují podmínku $\varphi_k(0) = 1$ (což je ekvivalentní s podmínkou $b_{k1} + b_{k2} + \dots + b_{kk} = 1$). Podmínka ortogonalita je

$$(2.4) \quad \int_0^{\infty} \varphi_m(\alpha t) \varphi_n(\alpha t) dt = \delta_{mn} \|\varphi_n\|^2, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots,$$

kde $\|\varphi_n\|$ označuje normu funkce $\varphi_n(\alpha t)$, srv. dále rovnici (2.13). Zřejmě je $\psi_k(\alpha t) = \|\varphi_k\|^{-1} \cdot \varphi_k(\alpha t)$.

Substitucí $e^{-\alpha t} = x$ v (2.3) se interval $\langle 0, +\infty \rangle$ zobrazí na interval $(0, 1)$ a funkce $\varphi_k(\alpha t)$ přejde v mnohočlen. Označme

$$(2.5) \quad \varphi_k(\alpha t) = e^{-\alpha t} \Phi_{k-1}(e^{-\alpha t}),$$

kde

$$(2.6) \quad \Phi_{k-1}(x) = \sum_{\mu=1}^k b_{k\mu} x^{\mu-1}.$$

Táž substituce v (2.4) dává

$$(2.7) \quad \alpha^{-1} \int_0^1 x \Phi_{m-1}(x) \Phi_{n-1}(x) dx = \delta_{mn} \|\varphi_n\|^2.$$

Mnohočleny $\Phi_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, jsou tedy na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ ortogonální s vahou x .

Uvážíme-li, že mnohočleny ortogonální na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ s vahou $x^{q-1}(1-x)^{p-q}$, $q > 0$, $p - q > -1$, jsou tzv. Jacobiho mnohočleny $G_k(p, q, x)$ [3], [4], [5], je nutně

$$(2.8) \quad \Phi_i(x) = D_i \cdot G_i(2, 2, x), \quad D_i = \text{konst.},$$

a dále, vzhledem k výše uvedenému, srv. rovnici (2.5),

$$(2.9) \quad \varphi_k(\alpha t) = D_{k-1} e^{-\alpha t} G_{k-1}(2, 2, e^{-\alpha t}).$$

Teorie Jacobiho mnohočlenů je ponejvíce zpracována pro ortogonalisaci na intervalu $\langle -1, +1 \rangle$ s vahou $(1-\xi)^\lambda(1+\xi)^\mu$, $\lambda > -1$, $\mu > -1$; v tomto případě se Jacobiho mnohočleny označují $P_n^{(\lambda, \mu)}(\xi)$ [7], [8], [9]. Oba definiční intervaly spolu souvisí substitucí $\xi = 1 - 2x$ nebo $\xi = 2x - 1$. Našemu případu $p = 2$, $q = 2$ odpovídá $\lambda = 1$, $\mu = 0$ nebo $\lambda = 0$, $\mu = 1$ a podle SZEGÖ [9] je

$$(2.10) \quad G_i(2, 2, x) = (i+1)^{-1} P_i^{(1,0)}(1-2x), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Protože podle [8], [9] je

$$P_i^{(\lambda, \mu)}(1) = \binom{i+\lambda}{i} \quad \text{a} \quad P_i^{(\lambda, \mu)}(-1) = (-1)^i \binom{i+\mu}{i},$$

platí

$$(2.11) \quad G_i(2, 2, 0) = 1 \quad \text{a} \quad G_i(2, 2, 1) = (-1)^i (i+1)^{-1}.$$

Konstantu D_i v rovnici (2.8) volíme nyní tak, aby byla splněna podmínka $\varphi_k(0) = D_{k-1} \cdot G_{k-1}(2, 2, 1) = 1$ pro všechna $k = 1, 2, \dots$. Z rovnic (2.9), (2.11) konečně plyne

$$(2.12) \quad \varphi_k(\alpha t) = (-1)^{k-1} k e^{-\alpha t} G_{k-1}(2, 2, e^{-\alpha t}).$$

S ohledem na to, že norma Jacobiho mnohočlenu je $\|P_i^{(1,0)}\| = [2/(i+1)]^{\frac{1}{2}}$, ([7], [9]), vypočteme z rovnic (2.10), (2.12) a (2.4)

$$(2.13) \quad \|\varphi_k\| = (2k\alpha)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ortogonální funkce $\varphi_k(\alpha t)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, $\alpha > 0$, jsou spojité a v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ ohraničené funkce, pro něž platí

$$(2.14) \quad \varphi_k(0) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_k(\alpha t) = 0.$$

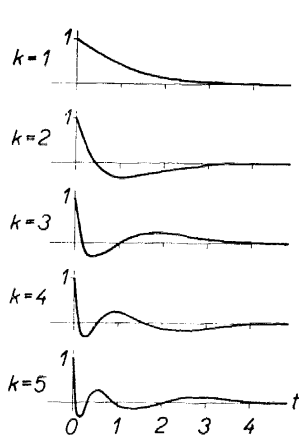
Funkce $\varphi_k(\alpha t)$ má $k - 1$ jednoduchých nulových bodů v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ – toto tvrzení je důsledkem vztahu (2.9) a základních vlastností nulových bodů ortogonálních mnohočlenů [7]. Průběh těchto funkcí je na obr. 1.

Podle [3] je ($i = 0, 1, 2, \dots$)

$$(2.15) \quad G_i(2, 2, x) = 1 - \binom{i}{1} \frac{i+2}{2} x + \binom{i}{2} \frac{(i+2)(i+3)}{2 \cdot 3} x^2 - \dots \\ \dots + (-1)^i \binom{i}{i} \frac{(i+2)(i+3)\dots 2i(2i+1)}{(i+1)!} x^i.$$

Porovnáme-li (2.15), (2.12) a (2.3), obdržíme pro koeficienty $b_{k\mu}$ ortogonálních funkcí $\varphi_k(\alpha t)$

$$(2.16) \quad b_{k\mu} = (-1)^{k+\mu} \binom{k}{\mu} \binom{k+\mu-1}{\mu-1} \quad \text{pro } k \geq \mu$$



Obr. 1. Ortogonální exponenciální mnohočleny $\varphi_k(\alpha t)$, $\alpha = 1$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

a

$$(2.17) \quad b_{k\mu} = 0 \quad \text{pro } k < \mu.$$

Koeficienty $b_{k\mu}$ jsou tedy vesměs celistvé.

Pro ortonormální soustavu platí podle rovnice (2.13)

$$(2.18) \quad \psi_k(\alpha t) = (2k\alpha)^{\frac{1}{2}} \varphi_k(\alpha t).$$

Ortonormální funkce $\psi_k(\alpha t)$ mají koeficienty $d_{k\mu} = (2k\alpha)^{\frac{1}{2}} b_{k\mu}$ zpravidla iracionální a platí

$$\psi_k(0) = (2k\alpha)^{\frac{1}{2}}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_k(\alpha t) = 0.$$

Laning a Battin [2] uvádějí pětimístné tabulky ortonormálních funkcí $\psi_k(\alpha t)$, pro $\alpha = 1$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, v intervalu $0 \leq t \leq 1$ s krokem 0,01, v intervalu $1 \leq t \leq 5$ s krokem 0,02 a v intervalu $5 \leq t \leq 9,9$ s krokem 0,1. Doporučuje se používat ruského překladu této knihy, v němž redakce opravila hodnoty $\psi_3(t)$ v intervalu $0,45 \leq t \leq 0,70$.

Matice koeficientů B. Matice koeficientů $\mathbf{B} = [b_{k\mu}]$ je podle (2.16) nekonečná trojúhelníková matice, jejíž prvky jsou celistvé a se stoupajícím k v absolutní hodnotě neomezeně rostou. Čtvercovou diagonální submaticí n -tého řádu této matice označme

$$(2.19) \quad \mathbf{B}_n = [b_{k\mu}], \quad k, \mu = 1, 2, \dots, n.$$

Tabulka I udává číselné hodnoty prvků matice \mathbf{B}_{10} .

Prvky $b_{k\mu}$ matice \mathbf{B} počítáme podle vzorce (2.16), v jiné úpravě

$$(2.20) \quad b_{k\mu} = (-1)^{k+\mu} \frac{k}{\mu!(\mu-1)!} (k^2 - 1^2)(k^2 - 2^2)\dots [k^2 - (\mu-1)^2]$$

nebo z některého rekurentního vztahu, který plyne z (2.16), např.

$$(2.21) \quad |b_{k+1,\mu}/b_{k\mu}| = (k + \mu)/(k - \mu + 1).$$

Pro všechna přirozená k platí podle (2.16)

$$(2.22) \quad b_{k1} = (-1)^{k+1} \cdot k, \quad b_{kk} = \frac{1}{2} \binom{2k}{k}$$

a s ohledem na (2.14) je

$$(2.23) \quad \sum_{\mu=1}^k b_{k\mu} = 1, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Rovnice (2.23) umožňuje jednoduchou, nikoliv však úplnou kontrolu správnosti řádkových vektorů matice \mathbf{B} .

V absolutní hodnotě největší koeficient $b_{k\mu}$ k -tého exponenciálního mnohočlenu $\varphi_k(\alpha t)$ má index

$$(2.24) \quad \mu_{\max}^{(k)} = \left\lceil \frac{k}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{8k^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} \right\rceil,$$

kde hranatá závorka znamená celou část. Prvky matice \mathbf{B}_{10} s tímto indexem jsou v tabulce I podtrženy.

Vztah (2.24) odvodíme jako největší celočíselné řešení nerovnosti $|b_{k\mu}/b_{k,\mu-1}| \geq 1$. Dosadíme z (2.16) a po jednoduché úpravě řešíme nerovnost $2\mu^2 - 3\mu + 1 - k^2 \leq 0$. Výsledek je (2.24), přičemž v praxi dobře poslouží i vztah

$$(2.25) \quad \mu_{\max}^{(k)} \approx \left\lceil \frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{3}{4} \right\rceil, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

První členové posloupnosti ortogonálních funkcí $\varphi_k(\alpha t)$ jsou tedy

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha t) &= e^{-\alpha t}, \\ \varphi_2(\alpha t) &= -2e^{-\alpha t} + 3e^{-2\alpha t}, \\ \varphi_3(\alpha t) &= 3e^{-\alpha t} - 12e^{-2\alpha t} + 10e^{-3\alpha t}, \dots \end{aligned}$$

atd.

Tabulka I.

Matice $\mathbf{B}_{10} = [b_{k\mu}]$. Koeficienty ortogonálních exponenciálních mnohočlenů $\varphi_k(\alpha t)$ jsou řádkové vektory této matice, $k = 1, 2, 3, \dots, 10$.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-2	<u>3</u>	0	0	0	0	0	0	0	0
3	<u>-12</u>	10	0	0	0	0	0	0	0
-4	30	<u>-60</u>	35	0	0	0	0	0	0
5	-60	210	<u>-280</u>	126	0	0	0	0	0
-6	105	-560	<u>1260</u>	<u>-1260</u>	462	0	0	0	0
7	-168	1260	-4200	<u>6930</u>	-5544	1716	0	0	0
-8	252	-2520	11550	-27720	<u>36036</u>	-24024	6435	0	0
9	-360	4620	-27720	90090	-168168	<u>180180</u>	-102960	24310	0
-10	495	-7920	60060	-252252	630630	<u>-960960</u>	875160	-437580	92378

3. ORTOGONÁLNÍ ROZVOJE

Funkci $f(t)$, v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ s kvadrátem integrovatelné, lze přiřadit ortogonální řadu

$$(3.1) \quad f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(\alpha t),$$

jejíž koeficienty c_k určíme známým způsobem

$$(3.2) \quad c_k = \|\varphi_k\|^{-2} \int_0^{\infty} f(t) \varphi_k(\alpha t) dt,$$

$$(3.3) \quad c_k = 2\alpha k \sum_{\mu=1}^k b_{k\mu} \int_0^{\infty} f(t) e^{-\mu\alpha t} dt,$$

neboli

$$(3.4) \quad c_k = 2\alpha k \sum_{\mu=1}^k b_{k\mu} F(\mu\alpha), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

označíme-li

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

Laplaceův obraz funkce $f(t)$, $F(\mu\alpha) = [F(p)]_{p=\mu\alpha}$.

Rozvoj podle ortonormálních funkcí $\psi_k(\alpha t)$ píšeme

$$(3.5) \quad f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k^0 \psi_k(\alpha t),$$

kde

$$(3.6) \quad c_k^0 = \sqrt{2\alpha k} \sum_{\mu=1}^k b_{k\mu} F(\mu\alpha)$$

a tedy

$$(3.7) \quad c_k = \sqrt{2\alpha k} \cdot c_k^0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Označme

\mathbf{c} nekonečně rozměrný sloupcový vektor koeficientů rozvoje (3.1) $\{c_k\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

\mathbf{F} nekonečně rozměrný sloupcový vektor funkčních hodnot $\{F(\mu\alpha)\}$, $\mu = 1, 2, 3, \dots$,

Laplaceova obrazu $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ v ekvidistantních bodech kladné poloosy reálných čísel.

Označme dále \mathbf{c}_n a \mathbf{F}_n n -rozměrné sloupcové vektory prvních n koeficientů rozvoje (3.1) respektive prvních n funkčních hodnot $F(\mu\alpha)$, $\mu = 1, 2, 3, \dots, n$.

Koeficienty c_k rozvoje (3.1) jsou podle (3.4) určeny jako souřadnice maticového součinu

$$(3.8) \quad \mathbf{c} = \alpha \mathbf{C} \cdot \mathbf{F},$$

v němž $\mathbf{C} = [C_{k\mu}]$, $C_{k\mu} = 2k \cdot b_{k\mu}$, je nekonečná trojúhelníková matice, jejíž k -tý řádkový vektor je vždy $2k$ -násobkem příslušného řádkového vektoru dříve definované matice \mathbf{B} .

Ačkoliv je v rovnici (3.8) vyznačeno násobení nekonečnou maticí \mathbf{C} , počítáme souřadnice vektoru koeficientů $\mathbf{c} = \{c_k\}$ konečným počtem operací, vzhledem k tomu, že matice \mathbf{C} je trojúhelníková.

Čtvercovou diagonální submaticí n -tého řádu této matice označme

$$(3.9) \quad \mathbf{C}_n = [C_{k\mu}], \quad k, \mu = 1, 2, \dots, n.$$

Tabulka II udává číselné hodnoty prvků matice \mathbf{C}_{10} .

Podle (2.23) a (3.4) platí pro každý řádek matice

$$(3.10) \quad \sum_{\mu=1}^k C_{k\mu} = 2k.$$

Tabulka II.

Matice $\mathbf{C}_{10} = [C_{k\mu}]$ pro výpočet koeficientů c_k , $k = 1, 2, \dots, 10$, ortogonálních rozvoů podle funkcí $\varphi_k(x)$.

2	0	0	0	0	0	9	0	0	0
-8	12	0	0	0	0	0	0	0	0
18	-72	60	0	0	0	0	0	0	0
-32	240	-480	280	0	0	0	0	0	0
50	-600	2100	-2800	1260	0	0	0	0	0
-72	1260	-6720	15120	-15120	5544	0	0	0	0
98	-2352	17640	-58800	97020	-77616	24024	0	0	0
-128	4032	-40320	184800	-443520	576576	-384384	102960	0	0
162	-6480	83160	-498960	1621620	-3027024	3243240	-1853280	437580	0
-200	9900	-158400	1201200	-5045040	12612600	-19219200	17503200	-8751600	1847560

Aproximace. Funkce $f(t)$, v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ se čtvercem integrovatelná, je v tomto intervalu aproximována v smyslu nejmenší kvadratické odchylky n -tým částečným součtem ortogonální řady (3.1),

$$(3.11) \quad f_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(xt).$$

Pro výpočet koeficientů c_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$, n -tého částečného součtu (3.11) stačí znát funkční hodnoty Laplaceova obrazu aproximované funkce v bodech $p = k\alpha$, $\alpha > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ kladné poloosy reálných čísel a dále matici \mathbf{C}_n , která nezávisí ani na $f(t)$ ani na volbě α . Podle (3.8) platí

$$(3.12) \quad \mathbf{c}_n = \alpha \mathbf{C}_n \cdot \mathbf{F}_n.$$

Částečné součty (3.11) konvergují k aproximované funkci $f(t)$ podle středu, tj. tak, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^2 = 0$, ε_n^2 podle (1.2).

4. EXPONENCIÁLNÍ APROXIMACE

Dosadíme-li v n -tém částečném součtu ortogonální řady (3.1)

$$(3.11) \quad f_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(\alpha t)$$

za ortogonální exponenciální mnohočlen $\varphi_k(\alpha t)$ podle (2.3),

$$\varphi_k(\alpha t) = \sum_{\mu=1}^k b_{k\mu} e^{-\mu\alpha t},$$

$b_{k\mu}$ podle (2.16), lze n -tý částečný součet (3.11) upravit na tvar

$$(4.1) \quad f_n(t) = \sum_{v=1}^n a_v^{(n)} e^{-v\alpha t}.$$

Protože podle závěru odst. 3. funkce $f_n(t)$ z rovnice (3.11), (4.1) aproximuje danou funkci $f(t)$ v smyslu nejmenší kvadratické odchylky na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, je tato funkce (nejlepší) n -tou exponenciální aproximací v smyslu poznámky 2 úvodního odstavce.

Vypočteme

$$a_v^{(n)} = \sum_{k=1}^n c_k b_{kv},$$

což lze podle (2.17) psát

$$(4.2) \quad \mathbf{a}_n = {}^T \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{c}_n$$

kde \mathbf{a}_n označuje sloupcový vektor koeficientů $\{a_v^{(n)}\}$, $v = 1, 2, 3, \dots, n$, a ${}^T \mathbf{B}_n$ je transponovaná matice \mathbf{B}_n . V rovnici (4.2) dosadíme za \mathbf{c}_n z (3.12), takže koeficienty $\{a_v^{(n)}\}$ n -té exponenciální aproximace nakonec obdržíme jako souřadnice maticového součinu

$$(4.3) \quad \mathbf{a}_n = \alpha \mathbf{A}_n \mathbf{F}_n.$$

Matice $\mathbf{A}_n = [A_{\mu\nu}^{(n)}]$ jsou souměrné matice řádu n , které nezávisí ani na α ani na $f(t)$ respektive $F(p)$,

$$(4.4) \quad A_{\mu\nu}^{(n)} = 2 \sum_{k=1}^n k b_{k\mu} b_{kv}, \quad A_{\nu\mu}^{(n)} = A_{\mu\nu}^{(n)},$$

$$\mu, \nu = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Několik prvních členů posloupnosti matic $\{\mathbf{A}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots, 6$, je v tabulce III.

Kontrola správnosti matic \mathbf{A}_n . Funkce e^{-t} je sama sobě nejlepší exponenciální aproximací pro libovolné $n = 1, 2, 3, \dots$, $\alpha = 1$. Těto funkci odpovídá sloupcový vektor funkčních hodnot Laplaceova obrazu $\mathbf{F}_n = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 1/(n+1)\}$. Vynásobíme tímto vektorem matici \mathbf{A}_n zprava a jako výsledek obdržíme n -rozměrný vektor koeficientů příslušné n -té aproximace, totiž $\mathbf{a}_n = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$.

Postup lze zkrátit tak, že sečteme vždy prvky téhož sloupce a vytvoříme řádkový vektor

$$\mathbf{s}_n = \left[\sum_{\mu=1}^n A_{\mu 1}^{(n)}, \sum_{\mu=1}^n A_{\mu 2}^{(n)}, \dots, \sum_{\mu=1}^n A_{\mu n}^{(n)} \right].$$

Skalární součin vektoru \mathbf{s}_n a vektoru $\mathbf{F}_n = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{(n+1)} \right\}$ je podle předchozího $\mathbf{s}_n \cdot \mathbf{F}_n = 1$.

Poznámka. Pro úsporu místa píšeme souřadnice sloupcového vektoru ve složené závorce $\{ \}$ a souřadnice řádkového vektoru v hranaté závorce $[]$ — označení zavedl TURNBULL [11].

Tabulka III.

Matice A_1 až A_6 pro výpočet koeficientů první až šesté exponenciální aproximace podle (4.1)

$$A_1 = [2], \quad A_2 = \begin{bmatrix} 18 & -24 \\ -24 & 36 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix},$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} 450 & -4200 & 12600 & -15120 & 6300 \\ -4200 & 44100 & -141120 & 176400 & -75600 \\ 12600 & -141120 & 470400 & -604800 & 264600 \\ -15120 & 176400 & -604800 & 793800 & -352800 \\ 6300 & -75600 & 264600 & -352800 & 158760 \end{bmatrix},$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} 882 & -11760 & 52920 & -105840 & 97020 & -33264 \\ -11760 & 176400 & -846720 & 1764000 & -1663200 & 582120 \\ 52920 & -846720 & 4233600 & -9072000 & 8731800 & -3104640 \\ -105840 & 1764000 & -9072000 & 19845000 & -19404000 & 6985440 \\ 97020 & -1663200 & 8731800 & -19404000 & 19209960 & -6985440 \\ -33264 & 582120 & -3104640 & 6985440 & -6985440 & 2561328 \end{bmatrix}.$$

Interkalární aproximace. Konvergence exponenciálních aproximací k aproximované funkci podle středu vůbec nezaručuje konvergenci v obvyklém smyslu a uchylujeme se proto zpravidla k sumaci v smyslu Cesàrově. Jestliže v některém bodě t_i , $0 \leq t_i < +\infty$ jsou dvě sukcesivní exponenciální aproximace $f_{n-1}(t_i)$ a $f_n(t_i)$ jedna horní a druhá dolní aproximací funkční hodnoty $f(t_i)$, aniž by však pro $n \rightarrow +\infty$ k této funkční hodnotě konvergovaly, je $f(t_i)$ neziřídka aproximována s podstatně menší absolutní chybou, $\delta = |f(t_i) - f_n(t_i)|$, aritmetickým průměrem dvou sousedních exponenciálních aproximací.

Buď $f_n(t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ nejlepší exponenciální aproximace funkce $f(t)$ v smyslu nejmenší kvadratické odchylky. Funkci

$$(4.5) \quad f_{n-\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2}[f_{n-1}(t) + f_n(t)]$$

nazveme *interkalární*, tj. vloženou, n -tou aproximací funkce $f(t)$.

Podle (3.11) je $f_n(t) = f_{n-1}(t) + c_n \varphi_n(xt)$ a pro interkalární aproximaci tedy podle (4.5)

$$(4.6) \quad f_{n-\frac{1}{2}}(t) = f_{n-1}(t) + \frac{1}{2}c_n \varphi_n(xt).$$

Interkalární aproximace zpravidla nejsou aproximace v smyslu nejmenší kvadratické odchylky. Pro kvadratickou odchylku interkalární aproximace

$$(4.7) \quad \varepsilon_{n-\frac{1}{2}}^2 = \int_0^\infty [f(t) - f_{n-\frac{1}{2}}(t)]^2 dt$$

však platí

$$(4.8) \quad \varepsilon_n^2 \leq \varepsilon_{n-\frac{1}{2}}^2 \leq \varepsilon_{n-1}^2,$$

kde $\varepsilon_n^2, \varepsilon_{n-1}^2$ podle (1.2).

Tento vztah dokážeme přímým výpočtem za pomoci Parsevalovy rovnosti

$$(4.9) \quad \int_0^\infty f^2(t) dt = \sum_{k=1}^\infty c_k^2 \|\varphi_k\|^2.$$

Znáмым způsobem vypočteme

$$(4.10) \quad \varepsilon_n^2 = \int_0^\infty (f - f_n)^2 dt = \sum_{k=n+1}^\infty c_k^2 \|\varphi_k\|^2,$$

$$(4.11) \quad \varepsilon_{n-1}^2 = \int_0^\infty (f - f_{n-1})^2 dt = c_n^2 \|\varphi_n\|^2 + \varepsilon_n^2$$

a konečně, použijeme-li (4.6),

$$(4.12) \quad \varepsilon_{n-\frac{1}{2}}^2 = \int_0^\infty (f - f_{n-\frac{1}{2}})^2 dt = \frac{1}{4}c_n^2 \|\varphi_n\|^2 + \varepsilon_n^2.$$

Odtud již zřejmě plyne (4.8).

Koeficienty $\{a_k^{(n-\frac{1}{2})}\}$ interkalární aproximace $f_{n-\frac{1}{2}}(t)$ lze počítat obdobným způsobem jako koeficienty $\{a_k^{(n)}\}$.

Označme $\mathbf{A}_n^{(m)}$, m, n přirozené, $m \geq n$, čtvercovou matici m -tého řádu, která vznikne vroubením matice \mathbf{A}_n $m - n$ nulovými sloupci zprava a $m - n$ nulovými řádky zdola. \mathbf{A}_n je tedy diagonální submaticí matice $\mathbf{A}_n^{(m)}$ a zřejmě $\mathbf{A}_n^{(n)} = \mathbf{A}_n$.

Prvky matice $\mathbf{A}_n^{(m)}$ označíme $A_{\mu\nu}^{(n)}$, stejně jako prvky matice \mathbf{A}_n , přičemž doplníme $A_{\mu\nu}^{(n)} = 0$ pro $\mu > n$ nebo $\nu > n$, srv. (4.4).

Prvky $A_{\mu_1\nu_1}^{(r)}$ matice $\mathbf{A}_r^{(m)}$ a $A_{\mu_2\nu_2}^{(s)}$ matice $\mathbf{A}_s^{(m)}$, $r, s = 1, 2, 3, \dots, m$ nazveme stejnohlehlými prvky obou matic, jestliže $\mu_1 = \mu_2, \nu_1 = \nu_2$.

Stejnolehle prvky matic z posloupnosti $\{\mathbf{A}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ jsou podle (4.4) a (2.16) téhož znaménka. Posloupnost $\{A_{\mu\nu}^{(n)}\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ stejnohlehlých prvků matic $\mathbf{A}_n^{(m)}$, $m > n$ je podle předchozího monotonní a neohraničená.

Koeficienty $\{a_k^{(n-\frac{1}{2})}\}$ interkalární aproximace $f_{n-\frac{1}{2}}(t)$ počítáme jako souřadnice maticového součinu

$$(4.13) \quad \underline{\mathbf{a}}_{n-\frac{1}{2}} = \alpha \mathbf{A}_{n-\frac{1}{2}} \mathbf{F}_n,$$

kde

$$(4.14) \quad \mathbf{A}_{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{n-1}^{(n)} + \mathbf{A}_n).$$

Maticy $\mathbf{A}_{n-\frac{1}{2}}$ jsou čtvercové souměrné matice n -tého řádu a jejich prvky jsou celá čísla. Protože, jak výše uvedeno, je posloupnost stejnohlých prvků matic \mathbf{A}_n , $\{A_{rs}^{(n)}\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ neomezená a monotonně rostoucí pro $r + s$ sudé respektive monotonně klesající pro $r + s$ liché, jsou stejnohlé prvky matice $\mathbf{A}_{n-\frac{1}{2}}$ v absolutní hodnotě nejvýše rovny stejnohlým prvkům matice \mathbf{A}_n , $|A_{rs}^{(n-\frac{1}{2})}| \leq |A_{rs}^{(n)}|$.

První členové posloupnosti matic $\{\mathbf{A}_{n-\frac{1}{2}}\}$, $n = 1, 2, \dots, 6$ jsou v tabulce IV.

Kontrolu správnosti matic $\mathbf{A}_{n-\frac{1}{2}}$ provedeme týmž způsobem jako kontrolu správnosti matic \mathbf{A}_n .

Tabulka IV.

Maticy $\mathbf{A}_{1,5}$ až $\mathbf{A}_{5,5}$ pro výpočet koeficientů druhé až šesté interkalární exponenciální aproximace podle (4.13).

$$\mathbf{A}_{1,5} = \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ -12 & 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{2,5} = \begin{bmatrix} 45 & -132 & 90 \\ -132 & 468 & -360 \\ 90 & -360 & 300 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{3,5} = \begin{bmatrix} 136 & -720 & 1140 & -560 \\ -720 & 4500 & -7920 & 4200 \\ 1140 & -7920 & 15000 & -8400 \\ -560 & 4200 & -8400 & 4900 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{4,5} = \begin{bmatrix} 325 & -2700 & 7350 & -8120 & 3150 \\ -2700 & 26100 & -78120 & 92400 & -37800 \\ 7350 & -78120 & 249900 & -310800 & 132300 \\ -8120 & 92400 & -310800 & 401800 & -176400 \\ 3150 & -37800 & 132300 & -176400 & 79380 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{5,5} = \begin{bmatrix} 666 & -7980 & 32760 & -60480 & 51660 & -16632 \\ -7980 & 110250 & -493920 & 970200 & -869400 & 291060 \\ 32760 & -493920 & 2352000 & -4838400 & 4498200 & -1552320 \\ -60480 & 970200 & -4838400 & 10319400 & -9878400 & 3492720 \\ 51660 & -869400 & 4498200 & -9878400 & 9684360 & -3492720 \\ -16632 & 291060 & -1552320 & 3492720 & -3492720 & 1280664 \end{bmatrix}.$$

Příklady. Příklad 1. Funkce $f(t) = e^{-7t}$, $t \geq 0$ má Laplaceův obraz $F(p) = (p + 7)^{-1}$. Přísluší jí tedy vektor $\mathbf{F}_4 = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}\}$. Čtvrtá exponenciální aproximace této funkce je tedy podle vzorce (4.3) (potřebnou matici \mathbf{A}_4 najdeme v tabulce III)

$$e^{-7t} \approx -0,152e^{-t} + 1,636e^{-2t} - 4,773e^{-3t} + 4,242e^{-4t}, \quad t \geq 0.$$

Chybu aproximace ukazuje tato tabulka:

$t = 0,0$	$f_4 = 0,955$	$e^{-7t} = 1,000$	$\Delta = -0,045$
0,1	0,511	0,497	+0,014
0,2	0,260	0,247	+0,013
0,3	0,123	0,122	+0,001
0,4	0,053	0,061	-0,008
0,5	0,019	0,030	-0,011
0,6	0,006	0,015	-0,009

Příklad 2. Ze šesté interkalární aproximace funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0, \\ 1 - \sin \frac{1}{2}\pi t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{pro } t \geq 1, \end{cases}$$

lze odvodit

$$\sin \frac{1}{2}\pi t \approx 1 - 0,0356e^{-t} - 0,5618e^{-2t} + 9,9116e^{-3t} - 34,6322e^{-4t} + 37,5095e^{-5t} - 13,1821e^{-6t}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Chybu aproximace ukazuje tabulka ($\xi = t \cdot 90^\circ$):

$\xi = 0^\circ$	$f_{5,5} = 0,009$	$\sin \xi = 0,000$	$\Delta = +0,009$
18°	0,301	0,309	-0,008
36°	0,597	0,588	+0,010
54°	0,815	0,809	+0,006
72°	0,937	0,951	-0,015
90°	0,990	1,000	-0,010

Příklad 3. Střední korelační funkce telegrafního signálu při přenosu Morseova kodu je podle Charkěviče [10] v podstatě popsána funkcí

$$f(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau < -1, \\ 1 + \tau, & -1 \leq \tau < 0, \\ 1 - \tau, & 0 \leq \tau < 1, \\ 0, & \tau \geq 1, \end{cases} \quad (\text{srv. obr. 2}).$$

Průslušná šestá interkalární aproximace je

$$f_{5,5}(\tau) = 0,3837e^{-|\tau|} - 5,4771e^{-2|\tau|} + 17,0295e^{-3|\tau|} - 4,8208e^{-4|\tau|} - 17,7504e^{-5|\tau|} + 11,6683e^{-6|\tau|},$$

kde $\alpha = 1$ a zřejmě $t = |\tau| \geq 0$. Chyba této aproximace je

$ \tau = 0,0$	$f_{5,5} = 1,033$	$f = 1,000$	$\Delta = +0,033$
0,2	0,807	1,800	+0,007
0,4	0,608	0,600	+0,008
0,6	0,374	0,400	-0,026
0,8	0,186	0,200	-0,014
1,0	0,069	0,000	+0,069
1,2	0,009	0,000	+0,009
1,4	-0,014	0,000	-0,014

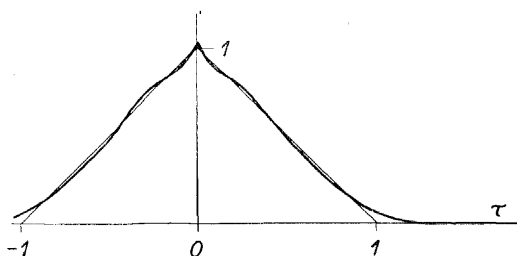
Ortogonalní rozvoje téže funkce jsou (opět pro $\alpha = 1$)

$$f(t) \sim 0,7358\varphi_1 + 0,4630\varphi_2 - 0,1490\varphi_3 - 0,1535\varphi_4 + \\ + 0,1117\varphi_5 + 0,0505\varphi_6 + \dots,$$

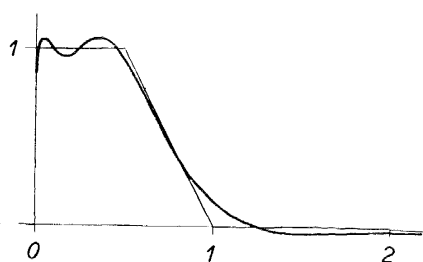
$$f(t) \sim 0,5203\psi_1 + 0,2315\psi_2 - 0,0608\psi_3 - 0,0543\psi_4 + \\ + 0,0353\psi_5 + 0,0146\psi_6 + \dots$$

Příklad 4. Ortogonalní rozvoje a exponenciální aproximace funkce

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & 0 \leq t < 0,5, \\ 2 - 2t, & 0,5 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t \end{cases}$$



Obr. 2. Aproximace $f_{5,5}(\tau)$ korelační funkce (příklad 3).



Obr. 3. Exponenciální aproximace $f_6(t)$, $\alpha = 2$ (příklad 4).

pro různá α jsou

$$f(t) = 1,0454\varphi_1 + 0,4232\varphi_2 - 0,5311\varphi_3 - 0,2374\varphi_4 + \\ + 0,3666\varphi_5 + \dots, \quad \alpha = 1;$$

$$f_6(t) = 0,6461e^{-t} - 8,4871e^{-2t} + 16,6532e^{-3t} + 44,8844e^{-4t} - \\ - 109,6452e^{-5t} + 57,1390e^{-6t}, \quad \alpha = 1;$$

$$f_6(t) = -0,7255e^{-3t} + 12,9074e^{-t} - 64,4401e^{-3t} + 120,8694e^{-2t} - \\ - 84,1743e^{-5t/2} + 16,3549e^{-3t}, \quad \alpha = \frac{1}{2};$$

$$f_6(t) = -1,9880e^{-2t} + 27,8647e^{-4t} - 38,8723e^{-6t} - 42,7413e^{-8t} + \\ + 111,5064e^{-10t} - 54,9139e^{-12t}, \quad \alpha = 2.$$

Aproximace $f_6(t)$ pro $\alpha = 2$ je zakreslena na obr. 3.

5. ZÁVĚR

Výpočet koeficientů $b_{k\mu}$ ortogonálních funkcí $\varphi_k(x)$ v 2. odstavci této práce byl proveden způsobem, který naznačuje N. K. Krug [1]. Laning a Battin odvozují funkce $\varphi_k(x)$ Schmidovým ortogonalizačním procesem, tyto funkce pro $k = 1, 2, 3$,

4, 5 sice tabelují, avšak k obecným zákonitostem nedospívají. Matice $\mathbf{B}_{1,0}$ a některé vlastnosti jejích prvků, tj. rovnice (2.20) až (2.25), v citované literatuře uvedeny nejsou.

Výchozí vztahy a rozvoje z odstavce 3 a 4 uvádí N. K. Krug [1]; maticový počet však, pokud je nám známo, pro další zjednodušení výpočtu koeficientů exponenciálních aproximací v literatuře dosud použit nebyl.

Koeficienty $a_k^{(n)}$ exponenciální aproximace

$$(4.1) \quad f_n(t) = a_1^{(n)} e^{-\alpha t} + a_2^{(n)} e^{-2\alpha t} + \dots + a_n^{(n)} e^{-n\alpha t}$$

funkce $f(t)$ v intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ se čtvrcem integrovatelné vypočteme pro dané $\alpha > 0$ a n podle metody uvedené v tomto článku takto:

1. Najdeme Laplaceův obraz $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ aproximované funkce.

2. Vypočteme funkční hodnoty Laplaceova obrazu $F(p)$ pro $p = \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, n\alpha$. Je-li aproximovaná funkce zadána graficky nebo tabelárně, vypočteme některou z grafických nebo numerických metod integrál

$$F(\mu\alpha) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\mu\alpha t} dt \quad \text{pro } \mu = 1, 2, \dots, n.$$

3. Násobíme sloupcovým vektorem $\mathbf{F}_n = \{F(\alpha), F(2\alpha), \dots, F(n\alpha)\}$ zprava matici \mathbf{A}_n , kterou pro $n = 1, 2, \dots, 6$ najdeme v tabulce III. Podle vzorce

$$(4.3) \quad \mathbf{a}_n = \alpha \mathbf{A}_n \mathbf{F}_n$$

jsou souřadnice sloupcového vektoru $\mathbf{a}_n = \{a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}\}$ hledané koeficienty exponenciální aproximace (4.1).

V tomto článku se nezabýváme otázkou optimální volby parametru α , o němž Laning a Battin ([2], dodatek D) říkají: „Volíme vhodnou hodnotu α tak, aby funkce $e^{-\alpha t}$ se blížila k nule přibližně stejně rychle jako $f(t)$ “.

Tato práce vznikla při studiu syntézy Krugových tvarovacích čtyřpolů [1] na Elektrotechnické fakultě ČVUT v Praze v semináři o lineárních dynamických soustavách prof. Pírka, jemuž je autor zavázán díkem za podnět a účinnou podporu při řešení položené otázky.

Literatura

- [1] Н. К. Круг: Расчет четырехполосников по заданным напряжениям (импульсам) входа и выхода, Труды МЭИ, вып. XIV, ГЭИ Москва-Ленинград 1953, стр. 7–18.
- [2] J. H. Laning, R. H. Battin: Random processes in automatic control, McGraw-Hill 1956, ruský překlad ИЛ Москва 1958.
- [3] Курант Р., Гильберт Д.: Методы математической физики, ГИТТЛ Москва-Ленинград 1951, překlad z němčiny.
- [4] V. Jarník: Integrální počet II, ČSAV Praha 1955.
- [5] Л. Н. Кармазина: Таблицы полиномов Якоби, ИАН СССР, Москва 1954.
- [6] S. Kaczmarz, H. Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa-Lwów 1935, ruský překlad GIFML Moskva 1958.

- [7] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*: Методы теории функций комплексного переменного. ГИФМЛ, Москва 1958.
- [8] *И. П. Натансон*: Конструктивная теория функций, ГИТТЛ Москва-Ленинград 1949.
- [9] *G. Szegő*: Orthogonal Polynomials, New York 1939.
- [10] *А. А. Харкевич*: Спектры и анализ, ГИТТЛ Москва 1957.
- [11] *R. G. Cooke*: Infinite Matrices and Sequence Spaces, McMillan, London 1950.

Резюме

АППРОКСИМАЦИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

ОТАКАР ЯРОХ (Otakar Jaroč)

В статье описывается новый метод вычисления коэффициентов показательной аппроксимации функций в интервале $\langle 0, +\infty \rangle$. Метод характеризуется тем, что исходными являются значения изображения аппроксимируемой функции по Лапласу, и значения коэффициентов аппроксимации получаются путем умножения матрицы на столбцовый вектор. Некоторые методы синтеза линейных электрических цепей основаны на этой аппроксимации, например, Лэнинг-Бэттин [2] и Н. К. Круг [1].

Основные свойства показательных полиномов $\varphi_i(xt)$ подытоживаются в части 2. Формулы для вычисления коэффициентов соответствующего ортогонального ряда выведены в части 3.

Метод вычисления коэффициентов показательной аппроксимации (см. уравнение 1.1) излагается в части 4. Для вычисления коэффициентов n -ой аппроксимации требуется вычислить сначала значения изображения по Лапласу аппроксимируемой функции в n равноотстоящих точках положительной полуоси действительных чисел. Эти значения являются координатами столбцевого вектора \mathbf{F}_n . Коэффициенты показательной аппроксимации вычисляются по формуле (4.3). Матрицы, нужные для вычисления этих коэффициентов, находятся в таблице III. Вводится понятие интеркаларной аппроксимации, определенной как арифметическое среднее двух последующих аппроксимаций. — В конце 4-ой части находятся тоже примеры применения изложенного метода аппроксимации.

Summary

APPROXIMATION BY EXPONENTIAL FUNCTIONS

OTAKAR JAROCH

A new method for computing the coefficients of the leastsquares exponential approximation of a given function is described. There are two characteristic features of the method. 1. Certain values of the Laplace transform of the approximated function are the starting-point of the procedure. 2. The coefficients are computed by multiplying a matrix by a column vector. — Several methods of linear networks synthesis are based on this type of approximation (see Laning-Battin [2], N. K. Krug [1]).

Basic properties of the orthogonal exponential polynomials $\varphi_k(\alpha t)$ are stated in Part 2. Formulae for the computation of the coefficients of the corresponding orthogonal expansion of a given function are derived in Part. 3.

The calculation of the coefficients of the exponential approximation (cf. eq. 1.1) is described in Part 4. When computing the coefficients of the n -th approximation, it is necessary first to calculate the values of the Laplace transform of the approximated function at n equidistant points of the positive real axis. These values are the coordinates of the column vector \mathbf{F}_n . The coefficients of the exponential approximation are computed by means of eq. 4.3. The matrices necessary for this calculation are given in Table III. The concept of intercalary approximation is introduced as the arithmetical mean of two successive approximations. Part. 4 contains illustrative examples.

Adresa autora: Dr. *Otakar Jaroch*, ČVUT, Praha 2, Na bojišti 3.