Aplikace matematiky

Ludvík Janoš

Výpočtová metoda kritických otáček založená na postupném připojování polí

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 3, 201–226

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102802`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1962

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

VÝPOČTOVÁ METODA KRITICKÝCH OTÁČEK ZALOŽENÁ NA POSTUPNÉM PŘIPOJOVÁNÍ POLÍ

LUDVÍK JANOŠ

(Došlo dne 26. listopadu 1960.)

V práci je odvozen zákon skládání frekvenčních spekter hřídelů, odpovídající jejich spojení ve společném ložisku.

ÚVOD

V předložené práci se budeme zabývat určením frekvenčního spektra hřídele uloženého v libovolném počtu tuhých ložisek. Frekvenčním spektrem rozumíme soustavu všech kritických úhlových rychlostí ω_α hřídele. Z důvodů čistě početních však budeme pracovati s veličinami λ_α, označenými vztahem $\lambda_\alpha = 1/\omega_\alpha^2$, $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$ Veličinám λ_α budeme říkat vlastní čísla hřídele, a soustavě všech $\{\lambda_\alpha\}$ prostě spektrum hřídele. Základní problém, který je v práci řešen, je tento: Buďtež dány dva hřídele o spektrech $\{{}^{(1)}\lambda_\alpha\}$ resp. $\{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}$. Oba hřídele spojíme v místě společného ložiska, čímž vznikne nový hřídel, jehož spektrum $\{\lambda_\alpha\}$ máme určit. Úloha tedy spočívá v tom, odvoditi zákon skládání spekter hřídelů při jejich spojování ve společném ložisku. Lze snadno nahlédnout, že k určení vlastních čísel $\{\lambda_\alpha\}$ spojeného hřídele nestačí pouhá znalost vlastních čísel $\{{}^{(1)}\lambda_\alpha\}$ a $\{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}$. Spektrum tedy samo necharakterisuje plně hřídel. Jsou proto zavedeny veličiny φ_{ij}^α, $i, j = 0, 1$, $\alpha = 0, 1, 2, 3, \ldots$, tak zvané vlastní ohybové poddajnosti hřídele, které spolu se spektrem $\{\lambda_\alpha\}$ již hřídel určují. Veličiny φ_{ij}^α jsou určeny vztahy (2.3), (2.4).

Hřídel je tedy charakterisován soustavou čísel $\{\lambda_\alpha, \varphi_{ij}^\alpha\}$.

Jsou-li dané dva hřídele charakterisovány soustavami $\{{}^{(1)}\lambda_\alpha, {}^{(1)}\varphi_{ij}^\alpha\}$ resp. $\{{}^{(2)}\lambda_\alpha, {}^{(2)}\varphi_{ij}^\alpha\}$, je spektrum $\{\lambda_\alpha\}$ spojeného hřídele dáno jako soustava všech kořenů rovnice (3.15). Vlastní poddajnosti φ_{ij}^α spojeného hřídele jsou pak dány formulemi (3.11), (3.13), což je řešení základního problému.

Postupným užíváním odvozeného zákona skládání se výpočet spektra celého hřídele redukuje na stanovení vlastních čísel a vlastních poddajností jeho jednotlivých polí, to jest úseků mezi sousedními ložisky, z nichž se celý hřídel postupným připojováním dá složit.

1. POMOCNÉ ÚVAHY

V práci se budeme zabývat určením soustavy vlastních frekvencí ω_α hřídele rotujícího obecně v $n + 1$ ložiskách, jejichž polohy označíme $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. To vede na problém nalezení dvou funkcí $u(x)$, $y(x)$, které by splňovaly následující podmínky:

(1.1)
$$1. \quad u''(x) + \omega^2 y(x) m(x) = 0 , \qquad y''(x) + u(x) p(x) = 0$$

pro $x \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

2. Funkce $u(x)$, $y(x)$, $y'(x)$ jsou spojité na $\langle x_0, x_n \rangle$ a kromě toho je

$$y(x_i) = 0 , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n , \tag{1.2}$$

$$u(x_0) = u(x_n) = 0 . \tag{1.3}$$

Každé hodnotě ω, při které existuje netriviální řešení tohoto problému, budeme říkat vlastní neboli kritická úhlová rychlost hřídele. Všechny takové hodnoty uspořádané podle velikosti $\omega_1 < \omega_2 < \ldots$ tvoří frekvenční spektrum $\{\omega_\alpha\}$. Řády kritických hodnot budeme označovat řeckým indexem α, β, neboť latinskými indexy označujeme ložiska.

Při tom značí:

x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, polohu i-tého ložiska,
$y(x)$ průhyb v místě (x),
$u(x)$ ohybový moment v místě (x),
$m(x)$ hustotu hmoty v místě (x),
$p(x)$ hustotu poddajnosti v místě (x), definovanou vztahem
$$p(x) = 1/EI(x) ,$$
E modul elasticity,
$I(x)$ moment setrvačnosti průřezu v místě x,
ω úhlovou rychlost.

Definice 1.1. *Funkce $K(x, t)$ je definovaná vztahy*

$$K(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{l}(x - x_0)(x_n - t) , & x_0 \leqq x \leqq t \leqq x_n , \\ \dfrac{1}{l}(t - x_0)(x_n - x) , & x_0 \leqq t \leqq x \leqq x_n , \end{cases}$$

kde $l = x_n - x_0$ (délka hřídele) je strunové jádro pro interval $\langle x_0, x_n \rangle$.

Definice 1.2. *Buďiž $A(x, t)$ libovolná funkce dvou proměnných $x, t \in \langle a, b \rangle$. Buďtéž nyní*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n , \quad t_1, t_2, \ldots, t_n \in \langle a, b \rangle .$$

Symbolem $A\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix}$ *označíme determinant matice sestavené z čísel* $A(x_i, t_j)$, *tedy*

$$A\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix} = \text{det.}\, |A(x_i, t_j)|_1^n \,.$$

Definice 1.3. *Funkci* $G(x, t)$ *definovanou*

$$G(x, t) = \frac{\Gamma\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \end{pmatrix}}{\Gamma\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \end{pmatrix}},$$

kde

$$\Gamma(x, t) = \int_{x_0}^{x_n} K(x, s)\, K(t, s)\, p(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

budeme nazývat příčinkovou nebo Greenovou funkcí hřídele.

V knize [1], část III je ukázáno, že krajový problém (1.1), (1.2), (1.3) je ekvivalentní homogenní integrální rovnici

$$\omega^2 \int_{x_0}^{x_n} G(x, t)\, y(t)\, m(t)\, \mathrm{d}t = y(x)\,. \tag{1.4}$$

Obecněji, píšeme-li v rovnicích (1.1) místo $\omega^2\, m(x)\, y(x)$ libovolnou funkci $q(x)$, mající význam hustoty síly působící na hřídel v bodě x, dostaneme z problému (1.1), (1.2), (1.3) obecný nehomogenní problém, jehož řešení je dáno vzorcem

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_n} G(x, t)\, q(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

O funkci $p(x)$ budeme předpokládat, že je spojitá, omezená a kladná na každém intervalu (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$. Z kladnosti funkce $p(x)$ plyne positivní definitnost jádra $G(x, t)$ ([1], str. 242).

O funkci $m(x)$ budeme předpokládat, že je spojitá, omezená a nezáporná na každém intervalu (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Z toho pak plyne, že je-li $m(x)$ alespoň v jednom z intervalů (x_i, x_{i+1}) alespoň v jednom jeho bodě různá od nuly, obsahuje frekvenční spektrum nekonečně mnoho hodnot:

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_\alpha < \dots$$

Zavedeme-li nyní funkci $M(x)$ vztahem

$$M(x) = \int_{x_0}^{x} m(t)\, \mathrm{d}t\,, \tag{1.5}$$

má rovnice (1.4) tvar

$$\omega^2 \int_{x_0}^{x_n} G(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t) = y(x)\,. \tag{1.6}$$

Tento tvar nabízí zobecnění. Za funkci $M(x)$ můžeme totiž vzít libovolnou neklesající funkci na intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$ (obecná nezáporná míra na $\langle x_0, x_n \rangle$).

Definice 1.4. *Budiž $M(x)$ neklesající funkce na $\langle x_0, x_n \rangle$. Zavedeme množinu $I_M \subset \langle x_0, x_n \rangle$ jako množinu těch $x \in \langle x_0, x_n \rangle$, v jejichž žádném okolí není funkce $M(x)$ konstantní.*

V [1], IV je ukázáno, že každá charakteristická hodnota ω_α^2 rovnice (1.6) je nedegenerovaná a že frekvenční spektrum $\{\omega_\alpha\}$ je nekonečné tehdy a jen tehdy, je-li množina $I_M \cap (x_i, x_{i+1})$ nekonečná alespoň pro jedno $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

V případě opačném obsahuje množina $\{\omega_\alpha\}$ právě tolik prvků jako množina

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} [I_M \cap (x_i, x_{i+1})] .$$

V dalším se budeme zabývat otázkou nalézti průhyb $y(x)$ hřídele, vyvolaný momenty u_0, u_1, přiloženými k oběma koncům hřídele, je-li hřídel ve stavu rotace úhlovou rychlostí ω. To vede na řešení soustavy (1.1) s podmínkou (1.2), a místo podmínky (1.3) bude podmínka

$$u(x_0) = u_0 , \quad u(x_n) = u_1 . \tag{1.7}$$

Řešení tohoto problému bude záviset na třech parametrech u_0, u_1, ω

$$u(x, \omega, u_0, u_1) ,$$
$$y(x, \omega, u_0, u_1) .$$

Řešení pro $\omega = 0$ budeme psát

$$\bar{u}(x, u_0, u_1) , \quad \bar{y}(x, u_0, u_1) .$$

Pro funkce $\bar{u}(x, u_0, u_1)$, $\bar{y}(x, u_0, u_1)$ lze snadno nalézt explicitní vyjádření, my však je v dalším nebudeme nikde potřebovat, proto je neuvádíme. O funkcích $\bar{u}(x, u_0, u_1)$, $\bar{y}(x, u_0, u_1)$ stačí vědět, že jsou spojité na $\langle x_0, x_n \rangle$ a funkce $\bar{y}(x, u_1, u_2)$ má dokonce spojitou derivaci. Pro hřídel na dvou ložiskách v bodech 0, l je zřejmě

$$\bar{u}(x, u_0, u_1) = u_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + u_1 \frac{x}{l} .$$

Funkce $y(x, \omega, u_0, u_1)$ je zřejmě řešením nehomogenní rovnice

$$y(x, \omega, u_0, u_1) = \bar{y}(x, u_0, u_1) + \omega^2 \int_{x_0}^{x_n} G(x, t)\, y(t, \omega, u_0, u_1)\, \mathrm{d}M(t) \tag{1.8}$$

Zavedeme nyní veličinu λ vztahem

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2} \tag{1.9}$$

a analogicky

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\omega_\alpha^2} . \tag{1.10}$$

Veličinám λ_α budeme říkat vlastní čísla hřídele a soustavě $\{\lambda_\alpha\}$ prostě spektrum.

Řešíme-li rovnici (1.8) rozvojem podle vlastních funkcí rovnice (1.6), dostaneme pro funkci $y(x, \omega, u_0, u_1)$ vyjádření

$$(1.11)\quad y(x, \omega, u_0, u_1) = \bar{y}(x, u_0, u_1) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha} \int_{x_0}^{x_n} \bar{y}(t, u_0, u_1)\, y_\alpha(t)\, \mathrm{d}M(t)\, y_\alpha(x),$$

kde funkce $y_1(x), y_2(x), \ldots$ tvoří ortogonální soustavu vlastních funkcí rovnice (1.6), normovaných podmínkou

$$(1.12)\qquad \int_{x_0}^{x_n} y_\alpha^2(x)\, \mathrm{d}M(x) = 1\,.$$

Konvergence pravé strany rovnice (1.11) je stejnoměrná.

Věta 1.1. *Rozvoj pro funkci* $y(x, \omega, u_0, u_1)$, *daný rovnicí* (1.11), *lze formálně derivovat, tedy platí*

$$y'(x, \omega, u_0, u_1) = \bar{y}'(x, u_0, u_1) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha} \int_{x_0}^{x_n} \bar{y}(t, u_0, u_1)\, y_\alpha(t)\, \mathrm{d}M(t)\, y'_\alpha(x)\,.$$

Důkaz. Funkci $\bar{y}(x, u_0, u_1)$ je možno jakožto spojitou funkci rozvinout v řadu

$$\bar{y}(x, u_0, u_1) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha\, y_\alpha(x)\,,$$

konvergující ve smyslu normy v L_2^M. Pro čísla a_α dostaneme vyjádření

$$a_\alpha = \int_{x_0}^{x_n} \bar{y}(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)\, \mathrm{d}M(x)\,.$$

Derivujme nyní rovnici (1.8). Podle povahy jádra $G(x, t)$ můžeme derivovat za znamením integrálu, čímž dostaneme vztah

$$y'(x, \omega, u_0, u_1) = \bar{y}'(x, u_0, u_1) + \omega^2 \int_{x_0}^{x_n} G_1(x, t)\, y(t, \omega, u_0, u_1)\, \mathrm{d}M(t)\,,$$

kde

$$G_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} G(x, t)\,.$$

Dosadíme-li sem za $y(t, \omega, u_0, u_1)$ rozvoj

$$y(t, \omega, u_0, u_1) = \bar{y}(t, u_0, u_1) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}\, a_\alpha y_\alpha(t)\,,$$

dostaneme

$$y'(x, \omega, u_0, u_1) = \bar{y}'(x, u_0, u_1) + \omega^2 \int_{x_0}^{x_n} G_1(x, t)\, \bar{y}(t, u_0, u_1)\, \mathrm{d}M(t) +$$
$$+ \omega^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}\, a_\alpha \int_{x_0}^{x_n} G_1(x, t)\, y_\alpha(t)\, \mathrm{d}M(t) = \bar{y}'(x, u_0, u_1) +$$
$$+ \omega^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \int_{x_0}^{x_n} G_1(x, t)\, y_\alpha(t)\, \mathrm{d}M(t) + \omega^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}\, a_\alpha \int_{x_0}^{x_n} G_1(x, t)\, y_\alpha(t)\, \mathrm{d}M(t)\,.$$

Nyní však je podle definice

$$\int_{x_0}^{x_n} G(x, t)\, y_\alpha(t)\, \mathrm{d}M(t) = \lambda_\alpha\, y_\alpha(t)$$

a tedy derivací

$$\int_{x_0}^{x_n} G_1(x, t)\, y_\alpha(t)\, \mathrm{d}M(t) = \lambda_\alpha\, y'_\alpha(x)\,.$$

Výraz pro $y'(x, \omega, u_0, u_1)$ lze tedy psát

$$y'(x, \omega, u_0, u_1) = \bar{y}'(x, u_0, u_1) + \omega^2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \lambda_\alpha\, y'_\alpha(x) \left[1 + \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}\right] =$$

$$= \bar{y}'(x, u_0, u_1) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}\, a_\alpha\, y'_\alpha(x)\,,$$

neboť $\omega^2 \lambda = 1$, což bylo dokázati.

Věta 1.2. *Je-li* $y_\alpha(x)$, $u_\alpha(x)$ *řešení homogenního problému* (1.1), (1.2), (1.3), *platí vztah*

$$\omega_\alpha^2 \int_{x_0}^{x_n} \bar{y}(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)\, \mathrm{d}M(x) = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}(x, u_0, u_1)\, u_\alpha(x)\, \mathrm{d}P(x)\,,$$

kde $\mathrm{d}P(x) = p(x)\, \mathrm{d}x$ *pro* $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$

Důkaz. Podle definice funkce $\bar{u}(x, u_0, u_1)$, $\bar{y}(x, u_0, u_1)$ splňují vztahy

$$\bar{u}''(x, u_0, u_1) = 0\,,$$

$$\bar{y}''(x, u_0, u_1) + \bar{u}(x, u_0, u_1)\, p(x) = 0\,, \quad x \in (x_i, x_{i+1})\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Násobením rovnice

$$u''_\alpha(x) + \omega_\alpha^2\, y_\alpha(x)\, m(x) = 0\,, \quad x \in (x_i, x_{i+1})$$

funkcí $\bar{y}(x, u_0, u_1)$ a integrací per partes v mezích x_i, x_{i+1} dostaneme

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u''_\alpha(x)\, \bar{y}(x, u_0, u_1)\, \mathrm{d}x + \omega_\alpha^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{y}(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)\, \mathrm{d}M(x) =$$

$$= |u'_\alpha(x)\, \bar{y}(x, u_0, u_1)|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_\alpha(x)\, \bar{y}'(x, u_0, u_1)\, \mathrm{d}x +$$

$$+ \omega_\alpha^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{y}(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)\, \mathrm{d}M(x) = 0\,,$$

z čehož

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_\alpha(x)\, \bar{y}'(x, u_0, u_1)\, \mathrm{d}x = \omega_\alpha^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{y}(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)\, \mathrm{d}M(x)\,,$$

neboť $\bar{y}(x, u_0, u_1)$ splňuje podmínku (1.2). Další integrací per partes levé strany dostaneme

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u'_\alpha(x)\, \bar{y}'(x, u_0, u_1)\, dx = |u_\alpha(x)\, \bar{y}'(x, u_0, u_1)|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_\alpha(x)\, \bar{y}''(x, u_0, u_1)\, dx =$$

$$= |u_\alpha(x)\, \bar{y}'(x, u_0, u_1)|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u_\alpha(x)\, \bar{u}(x, u_0, u_1)\, dP(x)\,,$$

z čehož

$$\omega_\alpha^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{y}(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)\, dM(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{u}(x, u_0, u_1)\, u_\alpha(x)\, dP(x) +$$
$$+ |u_\alpha(x)\, \bar{y}'(x, u_0, u_1)|_{x_i}^{x_{i+1}}\,.$$

Součtem těchto rovnic přes $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ dostaneme

$$\omega_\alpha^2 \int_{x_0}^{x_n} \bar{y}(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)\, dM(x) = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}(x, u_0, u_1)\, u_\alpha(x)\, dP(x) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} |u_\alpha(x)\, \bar{y}'(x, u_0, u_1)|_i^{i+1}\,.$$

Poslední výraz je však roven nule, neboť $u_\alpha(x_0) = u_\alpha(x_n) = 0$, z čehož plyne naše tvrzení.

Věta 1.3. *Platí vztah*

$$\int_{x_0}^{x_n} \bar{u}(x, u_0, u_1)\, u_\alpha(x)\, dP(x) = u_0\, y'_\alpha(x_0) - u_1\, y'_\alpha(x_n)\,.$$

Důkaz. Pro každé $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ platí

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{u}(x, u_0, u_1)\, u_\alpha(x)\, dP(x) = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{u}(x, u_0, u_1)\, y''_\alpha(x)\, dx =$$

$$= - |\bar{u}(x, u_0, u_1)\, y'_\alpha(x)|_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{u}'(x, u_0, u_1)\, y'_\alpha(x)\, dx =$$

$$= - |\bar{u}(x, u_0, u_1)\, y'_\alpha(x)|_{x_i}^{x_{i+1}} + |\bar{u}'(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)|_{x_i}^{x_{i+1}} -$$

$$- \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{u}''(x, u_0, u_1)\, y_\alpha(x)\, dx = - |\bar{u}(x, u_0, u_1)\, y'_\alpha(x)|_{x_i}^{x_{i+1}}\,,$$

neboť poslední dva výrazy jsou rovny nule. Součtem přes $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$ dostaneme

$$\int_{x_0}^{x_n} \bar{u}(x, u_0, u_1)\, u_\alpha(x)\, dP(x) = u_0\, y'_\alpha(x_0) - u_1\, y'_\alpha(x_n),$$

což bylo dokázati.

Ze vztahu (1.11) a z vět 1.1, 1.2, 1.3 plyne konečný tvar výrazu pro funkci $y'(x, \omega, u_0, u_1)$

$$y'(x, \omega, u_0, u_1) = \bar{y}'(x, u_0, u_1) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha^2}{\lambda - \lambda_\alpha} \left[u_0\, \bar{y}'_\alpha(x_0) - u_1\, y'_\alpha(x_n)\right] y'_\alpha(x)\,. \tag{1.12}$$

2. OHYBOVÉ FUNKCE HŘÍDELE

Definice 2.1. *Funkcím $a_{ij}(\lambda)$, $i, j = 0, 1$, definovaným vztahy*

$$a_{00}(\lambda) = y'(x_0, \omega, 1, 0)\,, \quad a_{10}(\lambda) = y'(x_n, \omega, -1, 0)\,,$$
$$a_{01}(\lambda) = y'(x_0, \omega, 0, 1)\,, \quad a_{11}(\lambda) = y'(x_n, \omega, 0, -1)\,,$$

kde $\lambda = 1/\omega^2$, budeme říkat ohybová funkce hřídele.

Zřejmě platí vztahy

$$y'(x_0, \omega, u_0, u_1) = u_0 a_{00}(\lambda) + u_1 a_{01}(\lambda)\,,$$
$$y'(x_n, \omega, u_0, u_1) = -\,[u_0, a_{10}(\lambda) + u_1 a_{11}(\lambda)] \tag{2.1}$$

Věta 2.1. *Buďtež u_0, u_1, u_0^*, u_1^* libovolná čísla. Platí vztah*

$$u_0^*\, y'(x_0, \omega, u_0, u_1) - u_1^*\, y'(x_n, \omega, u_0, u_1) =$$
$$= \int_{x_0}^{x_n} u(x, \omega, u_0, u_1)\, u(x, \omega, u_0^*, u_1^*)\, \mathrm{d}P(x) - \omega^2 \int_{x_0}^{x_n} y(x, \omega, u_0, u_1)\,.$$
$$.\, y(x, \omega, u_0^*, u_1^*)\, \mathrm{d}M(x)\,.$$

Důkaz. Násobením rovnic

$$y''(x, \omega, u_0, u_1) + u(x, \omega, u_0, u_1)\, p(x) = 0\,, \quad x \in (x_i, x_{i+1})$$

funkcí $u(x, \omega, u_0^*, u_1^*)$, integrací per partes přes intervaly (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, n-1$, dostaneme žádaný vztah.

Věta 2.2.

$$a_{01}(\lambda) = a_{10}(\lambda)\,.$$

Důkaz. Výraz $u_0^*\, y'(x_0, \omega, u_0, u_1) - u_1^*\, y'(x_n, \omega, u_0, u_1)$ je podle (2.1) roven výrazu

$$u_0^*[u_0 a_{00}(\lambda) + u_1 a_{01}(\lambda)] + u_1^*[u_0 a_{10}(\lambda) + u_1 a_{11}(\lambda)]\,.$$

Podle věty 2.1 je však tento výraz souměrný vzhledem k záměně u_0 za u_0^* a u_1 za u_1^*, z čehož plyne

$$[a_{01}(\lambda) - a_{10}(\lambda)]\,(u_0 u_0^* - u_1 u_0^*) = 0\,,$$

a tedy vzhledem k libovolnosti u_0, u_1 u_0^*, u_1^*

$$a_{01}(\lambda) = a_{10}(\lambda)\,.$$

Z věty 2.1 plyne pro $\omega = 0$ vztah

$$u_0^*\, \bar{y}'(x_0, u_0, u_1) - u_1^*\, \bar{y}'(x_n, u_0, u_1) = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}(x, u_0, u_1)\, \bar{u}(x, u_0^*, u_1^*)\, \mathrm{d}P(x) \tag{2.2}$$

pro libovolná u_0, u_1 u_0^*, u_1^*.

Z definice 2.1 a vztahů (1.12) a (2.2) plynou pro $a_{ij}(\lambda)$ vztahy

$$a_{00}(\lambda) = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}^2(x, 1, 0)\, \mathrm{d}P(x) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha^2}{\lambda - \lambda_\alpha} [y'_\alpha(x_0)]^2 ,$$

$$a_{01}(\lambda) = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}(x, 1, 0)\, \bar{u}(x, 0, 1)\, \mathrm{d}P(x) - \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha^2}{\lambda - \lambda_\alpha} y'_\alpha(x_0)\, y'(x_n) ,$$

$$a_{11}(\lambda) = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}^2(x, 0, 1)\, \mathrm{d}P(x) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha^2}{\lambda - \lambda_\alpha} [y'_\alpha(x_n)]^2 .$$

Položíme-li nyní

(2.3)
$$\varphi_{00}^0 = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}^2(x, 1, 0)\, \mathrm{d}P(x) ,$$
$$\varphi_{01}^0 = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}(x, 1, 0)\, \bar{u}(x, 0, 1)\, \mathrm{d}P(x) ,$$
$$\varphi_{11}^0 = \int_{x_0}^{x_n} \bar{u}^2(x, 0, 1)\, \mathrm{d}P(x) ,$$

(2.4)
$$\varphi_{00}^\alpha = \lambda_\alpha\, y'^2_\alpha(x_0) ,$$
$$\varphi_{01}^\alpha = -\lambda_\alpha y'_\alpha(x_0)\, y'_\alpha(x_n) ,$$
$$\varphi_{11}^\alpha = \lambda_\alpha\, y'^2_\alpha(x_n) , \quad \alpha = 1, 2, \ldots ,$$

můžeme psát stručně

(2.5)
$$a_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}^0 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha} \varphi_{ij}^\alpha , \quad i, j = 0, 1 .$$

Při důkazech našich tvrzení jsme předpokládali existenci funkce $m(x) = M'(x)$, neboť jsme užívali první ze soustavy rovnic (1.1), totiž rovnice

$$u''(x) + \omega^2\, y(x)\, m(x) = 0 , \quad x \in (x_i, x_{i+1}) .$$

Pro případ, že by funkce $m(x)$ neexistovala, musili bychom důkazy modifikovat vycházejíce z rovnice jednou integrované, totiž

$$u'(x) - u'(x_i) + \omega^2 \int_{x_i}^{x} y(t)\, \mathrm{d}M(t) = 0 , \quad x \in (x_i, x_{i+1}) .$$

V případě, že množina $\bigcup_{i=0}^{n-1} I_M \cap (x_i, x_{i+1})$ obsahuje jen konečný počet r bodů, má též spektrum λ_α právě r hodnot $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r$, a tedy též vlastních funkcí je konečný počet, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_r(x)$. V tom případě ve všech rozvojích se nekonečný součet zamění konečným součtem. Pro ten případ jsou definovány jen veličiny

$$\varphi_{i,j}^\alpha , \quad i, j = 0, 1 , \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, r .$$

Abychom nemusili oba případy rozlišovat, budeme psát důsledně $\sum_\alpha$, čímž se rozumí součet přes všechny indexy, pro které jsou indexované veličiny definovány.

Poznámka. Na základě oscilačních vět o vlastních funkcích $y_\alpha(x)$ ([1], IV) plyne, že $y'_\alpha(x_0)$, $y'_\alpha(x_n) \neq 0$, a tedy podle (2.4) plyne

$$\begin{aligned} &\varphi^\alpha_{00}, \varphi^\alpha_{11} > 0\,, \\ &\varphi^\alpha_{01} \neq 0\,, \end{aligned} \qquad \text{pro } \alpha = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.6}$$

A všimněme si ještě, že podle Schwarzovy nerovnosti z (2.3) plyne

$$[\varphi^0_{01}]^2 \leqq \varphi^0_{00}\varphi^0_{11}$$

a z (2.4)

$$[\varphi^\alpha_{01}]^2 = \varphi^\alpha_{00}\varphi^\alpha_{11}\,, \quad \alpha = 1, 2, \ldots$$

3. PRINCIP SKLÁDÁNÍ POLÍ, GRUPOID HŘÍDELŮ

Jak bylo už řečeno, hřídel je určen zadáním polohy ložisek $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ a dvěma funkcemi $m(x)$, $p(x)$, které splňují podmínky $m(x) \geqq 0$, $p(x) > 0$, $x \in \langle x_0, x_n \rangle$. Jak bylo v odd. 2 ukázáno, každému hřídeli přísluší trojice funkcí $a_{ij}(\lambda)$, jejichž poly jsou právě vlastní čísla hřídele. Z povahy problému je patrno, že tyto funkce se nezmění posunutím celého hřídele o určitou délku d, tedy transformací danou vztahy

$$\begin{gathered} \bar{x} = x + d\,, \\ \left.\begin{aligned} \bar{m}(\bar{x}) &= m(x) \\ \bar{p}(\bar{x}) &= p(x) \end{aligned}\right\} \ \bar{x} \in \langle x_0 + d, x_n + d \rangle\,. \end{gathered}$$

Hřídele vzniklé posunutím o libovolnou délku d budeme pokládat proto za ekvivalentní. Množinu tříd sobě ekvivalentních hřídelů označíme G. Je nasnadě zavést do množiny G operaci skládání $\circ$ tímto způsobem:

Buďtež $g_1, g_2 \in G$. Nechť g_1 je representován hřídelem, určeným

$${}^{(1)}x_0 < {}^{(1)}x_1 < \ldots < {}^{(1)}x_{n_1}, {}^{(1)}m(x), {}^{(1)}p(x)\,, \quad x \in \langle {}^{(1)}x_0, {}^{(1)}x_{n_1} \rangle\,.$$

Ve třídě sobě ekvivalentních hřídelů, representujících g_2 nalezneme takový, pro nějž začátek ${}^{(2)}x_0$ splyne s koncem ${}^{(1)}x_{n_1}$ prvého, tedy ${}^{(2)}x_0 = {}^{(1)}x_{n_1}$. Pak element $g_1 \circ g_2$ představuje třídu, representovanou hřídelem určeným

$${}^{(1)}x_0 < {}^{(1)}x_1 < \ldots < {}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0 < {}^{(2)}x_1 < \ldots < {}^{(2)}x_{n_2}\,,$$

$$\begin{aligned} m(x), p(x), \left.\begin{aligned} m(x) &= {}^{(1)}m(x) \\ p(x) &= {}^{(1)}p(x) \end{aligned}\right\} & \ x \in \langle {}^{(1)}x_0, {}^{(1)}x_{n_1} \rangle\,, \\ \left.\begin{aligned} m(x) &= {}^{(2)}m(x) \\ p(x) &= {}^{(2)}p(x) \end{aligned}\right\} & \ x \in \langle {}^{(2)}x_0, {}^{(2)}x_{n_2} \rangle\,. \end{aligned}$$

V dalším půjde o to určit funkce $a_{ij}(\lambda)$ příslušné k $g_1 \circ g_2$

$$g_1 \circ g_2 \to a_{ij}(\lambda)\,,$$

známe-li funkce ${}^{(1)}a_{ij}(\lambda)$, ${}^{(2)}a_{ij}(\lambda)$ příslušné k g_1 a g_2

$$g_1 \to {}^{(1)}a_{ij}(\lambda)\,, \quad g_2 \to {}^{(2)}a_{ij}(\lambda)\,.$$

Buďtež tedy ${}^{(1)}x_0 < {}^{(1)}x_1 < \ldots < {}^{(1)}x_{n_1}$, ${}^{(2)}x_0 < {}^{(2)}x_1 < \ldots < {}^{(2)}x_{n_2}$ polohy ložisek dvou daných hřídelů, a nechť je ${}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0$. Počítejme pro spojený hřídel ${}^{(1)}x_0 < {}^{(1)}x_1 < \ldots < {}^{(1)}x_{n_1} < {}^{(2)}x_1 < \ldots < {}^{(2)}x_{n_2}$ funkci $y'(x, \omega, u_0, u_1)$. Podle definice je

$$a_{00}(\lambda) = y'({}^{(1)}x_0, \omega, 1, 0)\,, \quad a_{01}(\lambda) = y'({}^{(1)}x_0, \omega, 0, 1)\,,$$
$$a_{11}(\lambda) = y'({}^{(2)}x_{n_2}, \omega, 0, -1)\,, \quad \lambda = 1/\omega^2\,.$$

Nyní však funkce $u(x, \omega, u_0, u_1)$ má určitou hodnotu v bodě ${}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0$, kterou označíme u. Pak ale je

$${}^{(1)}y(x, \omega, u_0, u) = y(x, \omega, u_0, u_1) \text{ pro } x \in \langle {}^{(1)}x_0, {}^{(1)}x_{n_1} \rangle\,,$$
$${}^{(2)}y(x, \omega, u, u_1) = y(x, \omega, u_0, u_1) \text{ pro } x \in \langle {}^{(2)}x_0, {}^{(2)}x_2 \rangle\,.$$

Abychom určili neznámou hodnotu u, vypočítáme z obou hořejších rovnic $y'({}^{(1)}x_{n_1}, \omega, u_0, u_1)$

$$y'({}^{(1)}x_{n_1}, \omega, u_0, u_1) = {}^{(1)}y'({}^{(1)}x_{n_1}, \omega, u_0, u) =$$
$$= u_0 {}^{(1)}y'({}^{(1)}x_{n_1}, \omega, 1, 0) + u\, {}^{(1)}y'({}^{(1)}x_{n_1}, \omega, 0, 1) = -\, u_0 {}^{(1)}a_{10}(\lambda) - u\, {}^{(1)}a_{11}(\lambda)\,,$$
$$y'({}^{(1)}x_{n_1}, \omega, u_0, u_1) = {}^{(2)}y'({}^{(2)}x_0, \omega, u, u_1) = u\, {}^{(2)}a_{00}(\lambda) + u_1 {}^{(2)}a_{01}(\lambda)\,,$$

z čehož porovnáním

$$u = \frac{-\, u_0 {}^{(1)}a_{10}(\lambda) - u_1 {}^{(2)}a_{01}(\lambda)}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)}\,.$$

Abychom nyní vypočítali $a_{00}(\lambda)$, musíme položit $u_0 = 1$, $u_1 = 0$

$$a_{00}(\lambda) = y'({}^{(1)}x_0, \omega, 1, 0) = {}^{(1)}y'({}^{(1)}x_0, \omega, 1, u) = {}^{(1)}a_{00}(\lambda) + u\, {}^{(1)}a_{01}(\lambda)\,;$$

veličina u má pro tento případ hodnotu

$$u = -\, \frac{{}^{(1)}a_{10}(\lambda)}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)}\,,$$

z čehož pro $a_{00}(\lambda)$ plyne

$$a_{00}(\lambda) = {}^{(1)}a_{00}(\lambda) - \frac{[{}^{(1)}a_{01}(\lambda)]^2}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)}\,, \tag{3.1}$$

neboť podle věty 2.2 platí ${}^{(1)}a_{01}(\lambda) = {}^{(1)}a_{10}(\lambda)$. Obdobně bychom našli

$$a_{01}(\lambda) = \frac{{}^{(1)}a_{01}(\lambda)\, {}^{(2)}a_{01}(\lambda)}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)}\,, \tag{3.2}$$

$$a_{11}(\lambda) = {}^{(2)}a_{11}(\lambda) - \frac{[{}^{(2)}a_{01}(\lambda)]^2}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)}\,. \tag{3.3}$$

Tím je odvozen zákon skládání trojic ohybových funkcí hřídelů ${}^{(1)}a_{ij}(\lambda)$, ${}^{(2)}a_{ij}(\lambda)$, korespondující zákonu jejich spojování.

Pro funkce ${}^{(1)}a_{ij}(\lambda)$, ${}^{(2)}a_{ij}(\lambda)$, $a_{ij}(\lambda)$ máme podle (2.5) rozvoje

$$ {}^{(1)}a_{ij}(\lambda) = {}^{(1)}\varphi^0_{ij} + \sum_\alpha \frac{{}^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\,{}^{(1)}\varphi^\alpha_{ij}\,, \quad {}^{(2)}a_{ij}(\lambda) = {}^{(2)}\varphi^0_{ij} + \sum_\alpha \frac{{}^{(2)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(2)}\lambda_\alpha}\,{}^{(2)}\varphi^\alpha_{ij}\,, $$

$$ a_{ij}(\lambda) = \varphi^0_{ij} + \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}\,\varphi^\alpha_{ij}\,, \quad i, j = 0, 1\,. $$

Nyní nám půjde především o to určit spektrum $\{\lambda_\alpha\}$ složeného hřídele ze znalostí funkcí ${}^{(1)}a_{ij}(\lambda)$, ${}^{(2)}a_{ij}(\lambda)$, a na základě toho určit též veličiny φ^α_{ij}.

Ze vztahů (2.5) plyne

$$ \lim_{\lambda \to \lambda_\beta} a_{ij}(\lambda) = \infty \Leftrightarrow \lambda_\beta \in \{\lambda_\alpha\}\,. \tag{3.4} $$

Tato implikace platí pro libovolná $i, j = 0, 1$, tedy např. pro $i = 0, j = 1$.

Podle (3.4) plyne z (3.2)

$$ \lim_{\lambda \to \lambda_\beta} \frac{{}^{(1)}a_{01}(\lambda)\,{}^{(2)}a_{01}(\lambda)}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)} = \infty \Leftrightarrow \lambda_\beta \in \{\lambda_\beta\}\,. \tag{3.5} $$

Pro lepší přehled zavedeme toto označení:

Definice 3.1. *Zavedeme množinu A vztahem*

$$ {}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in A\,. $$

Dokážeme nyní větu:

Věta 3.1. $\{{}^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\} \subset \{\lambda_\alpha\}$, *kde* $\{{}^{(1)}\lambda_\alpha\}$, *resp.* $\{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}$, *resp.* $\{\lambda_\alpha\}$ *značí spektra prvého, druhého a složeného hřídele.*

Důkaz. Budiž tedy pro nějaká α, β: ${}^{(1)}\lambda_\alpha = {}^{(2)}\lambda_\beta$. Položíme-li

$$ {}^{(1)}a_{ij}(\lambda) = \frac{{}^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\,{}^{(1)}\varphi^\alpha_{ij} + {}^{(1)}r_{ij}(\lambda)\,, \quad i, j = 0, 1, $$

a podobně

$$ {}^{(2)}a_{ij}(\lambda) = \frac{{}^{(2)}\lambda_\beta}{\lambda - {}^{(2)}\lambda_\beta}\,{}^{(2)}\varphi^\beta_{ij} + {}^{(2)}r_{ij}(\lambda)\,, $$

nabývají funkce ${}^{(1)}r_{ij}(\lambda)$, ${}^{(2)}r_{ij}(\lambda)$ v bodě $\lambda = {}^{(1)}\lambda_\alpha = {}^{(2)}\lambda_\beta$ konečné hodnoty. Počítejme limitu

$$ \lim_{\lambda \to {}^{(1)}\lambda_\alpha} \frac{{}^{(1)}a_{01}(\lambda)\,{}^{(2)}a_{01}(\lambda)}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)} = $$

$$ = \lim_{\lambda \to {}^{(1)}\lambda_\alpha} \frac{\left[\frac{{}^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\,{}^{(1)}\varphi^\alpha_{01} + {}^{(1)}r_{01}(\lambda)\right]\left[\frac{{}^{(2)}\lambda_\beta}{\lambda - {}^{(2)}\lambda_\beta}\,{}^{(2)}\varphi^\beta_{01} + {}^{(2)}r_{01}(\lambda)\right]}{\frac{{}^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\,{}^{(1)}\varphi^\alpha_{11} + {}^{(1)}r_{11}(\lambda) + \frac{{}^{(2)}\lambda_\beta}{\lambda - {}^{(2)}\lambda_\beta}\,{}^{(2)}\varphi^\beta_{00} + {}^{(2)}r_{00}(\lambda)} = $$

$$ = \lim_{\lambda \to \lambda_\alpha} \frac{{}^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\,\frac{{}^{(1)}\varphi^\alpha_{01}\,{}^{(2)}\varphi^\beta_{01}}{{}^{(1)}\varphi^\alpha_{11} + {}^{(2)}\varphi^\beta_{00}} = \infty\,, $$

neboť podle (2.6) jsou ${}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{01}, {}^{(2)}\varphi^{\beta}_{01} \neq 0$. Podle (3.5) to však značí, že ${}^{(1)}\lambda_\alpha \in \{\lambda_\alpha\}$, což bylo dokázat.

Věta 3.2.

$$[\{{}^{(1)}\lambda_\alpha\} \cup \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\} \setminus \{{}^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}] \cap \{\lambda_\alpha\} = 0\,.$$

Důkaz. Máme ukázat, že např. když ${}^{(1)}\lambda_\alpha \in \{{}^{(1)}\lambda_\alpha\}$, avšak při tom ${}^{(1)}\lambda_\alpha \overline{\in} \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}$, že platí ${}^{(1)}\lambda_\alpha \overline{\in} \{\lambda_\alpha\}$. Počítejme opět limitu

$$\lim_{\lambda \to {}^{(1)}\lambda_\alpha} \frac{{}^{(1)}a_{01}(\lambda)\, {}^{(2)}a_{01}(\lambda)}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)} = \lim_{\lambda \to {}^{(1)}\lambda_\alpha} \frac{\left[\dfrac{{}^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\, {}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{01} + {}^{(1)}r_{01}(\lambda)\right] {}^{(2)}a_{01}(\lambda)}{\dfrac{{}^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\, {}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{11} + {}^{(1)}r_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)} =$$
$$= \frac{{}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{01}\, {}^{(2)}a_{01}({}^{(1)}\lambda_\alpha)}{{}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{11}} \neq \infty\,,$$

neboť ${}^{(2)}a_{01}({}^{(1)}\lambda_\alpha)$ je podle předpokladu konečné číslo. Z toho však podle (3.5) plyne, že ${}^{(1)}\lambda_\alpha \overline{\in} \{\lambda_\alpha\}$, což bylo ukázati.

Věta 3.3.

$$A \subset \{\lambda_\alpha\}\,.$$

Důkaz. Budiž tedy $\lambda \in A$, což značí, že λ je kořenem rovnice ${}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda) = 0$. Nechť prvý hřídel g_1 je dán opět ložisky

$${}^{(1)}x_0 < {}^{(1)}x_1 < \ldots < {}^{(1)}x_{n_1}$$

a druhý hřídel g_2 ložisky

$${}^{(2)}x_0 < {}^{(2)}x_1 < \ldots < {}^{(2)}x_{n_2}\,,$$

při čemž je ${}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0$. Pak složený hřídel $g = g_1 \circ g_2$ je dán ložisky

$${}^{(1)}x_0 < {}^{(1)}x_1 < \ldots < {}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0 < {}^{(2)}x_1 < \ldots < {}^{(2)}x_{n_2}\,;$$

položme nyní $\omega^2 = 1/\lambda$ a uvažujme pro hřídel g_1 funkci ${}^{(1)}y(x, \omega, 0, 1)$ a pro hřídel g_2 funkci ${}^{(2)}y(x, \omega, 1, 0)$ a položme

$$y(x) = {}^{(1)}y(x, \omega, 0, 1)\,, \quad {}^{(1)}x_0 \leqq x \leqq {}^{(1)}x_{n_1}\,,$$
$$y(x) = {}^{(2)}y(x, \omega, 1, 0)\,, \quad {}^{(2)}x_0 \leqq x \leqq {}^{(2)}x_{n_2}\,.$$

Funkce $y(x)$ však představuje řešení homogenního problému pro celý hřídel

$$x_0 = {}^{(1)}x_0 < {}^{(1)}x_0 < \ldots < {}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0 < \ldots < {}^{(2)}x_{n_2} = x_n\,,$$

neboť podle definice funkcí $y(x, \omega, u_0, u_1)$ splňuje soustavu rovnic (1.1) i homogenní podmínky (1.2) a (1.3). Zbývá jen dokázat spojitost $y'(x)$ na celém intervalu $\langle x_0, x_n \rangle$, to znamená i v bodě spojení obou hřídelů ${}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0$. Derivace zleva funkce $y(x)$ v tomto bodě je ${}^{(1)}y'({}^{(1)}x_{n_1}, \omega, 0, 1)$, což je podle definice 2.1 rovno $-\,{}^{(1)}a_{11}(\lambda)$. Derivace zprava ${}^{(2)}y'({}^{(2)}x_0, \omega, 1, 0)$ je rovna ${}^{(2)}a_{00}(\lambda)$. Tato dvě čísla jsou si rovna, čímž je spojitost $y'(x)$ na $\langle x_0, x_n \rangle$ prokázána. Řešení $y(x)$ je jistě netriviální, neboť jemu příslušná funkce $u(x)$ nabývá v bodě ${}^{(1)}x_{n_1}$ hodnoty $u(x_{n_1}) = 1$. Je tedy hodnota λ vlastním číslem spojeného hřídele g, což bylo ukázati.

Z vět 3.1, 3.2, 3.3 plyne důležitý vztah pro spektrum spojeného hřídele

$$\{\lambda_\alpha\} = [\{^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{^{(2)}\lambda_\alpha\}] \cup A\,. \tag{3.6}$$

Z uvedených vět totiž plyne $[\{^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{^{(2)}\lambda_\alpha\}] \cup A \subset \{\lambda_\alpha\}$. Kdyby však bylo $\lambda \bar{\in} A$, $\lambda \bar{\in} \{^{(1)}\lambda_\alpha\} \cup \{^{(2)}\lambda_\alpha\}$, pak ze vztahu (3.2) a (3.4) plyne $\lambda \bar{\in} \{\lambda_\alpha\}$, čímž je vztah (3.6) dokázán. Kromě toho je vidět, že množiny $\{^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{^{(2)}\lambda_\alpha\}$, a A jsou disjunktní, neboť platí

$$\{^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap A = 0\,, \quad \{^{(2)}\lambda_\alpha\} \cap A = 0\,. \tag{3.7}$$

Obraťme nyní pozornost ke stanovení vlastních poddajností φ^α_{ij}. Podle definice je

$$a_{ij}(\lambda) = \varphi^0_{ij} + \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}\,\varphi^\alpha_{ij}\,,$$

z čehož plyne

$$\varphi^0_{ij} = \lim_{\lambda \to \infty} a_{ij}(\lambda)\,, \tag{3.8}$$

$$\varphi^\alpha_{ij} = \frac{1}{\lambda_\alpha} \lim_{\lambda \to \lambda_\alpha} (\lambda - \lambda_\alpha)\, a_{ij}(\lambda)\,, \tag{3.9}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \quad i, \; j = 0, 1.$$

Ze vztahů (3.1), (3.2), (3.3) a právě řečeného plyne ihned

$$\begin{aligned}
\varphi^0_{00} &= {}^{(1)}\varphi^0_{00} - \frac{[^{(1)}\varphi^0_{01}]^2}{^{(1)}\varphi^0_{11} + {}^{(2)}\varphi^0_{00}}\,,\\
\varphi^0_{01} &= \frac{^{(1)}\varphi^0_{01}\;{}^{(2)}\varphi^0_{01}}{^{(1)}\varphi^0_{11} + {}^{(2)}\varphi^0_{00}}\,,\\
\varphi^0_{11} &= {}^{(2)}\varphi^0_{11} - \frac{[^{(2)}\varphi^0_{01}]^2}{^{(1)}\varphi^0_{11} + {}^{(2)}\varphi^0_{00}}\,.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

To je zákon skládání veličin φ^0_{ij}.

Veličiny φ^α_{ij} mají zákon skládání různý podle toho, je-li příslušné λ_α v množině $\{^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{^{(2)}\lambda_\alpha\}$ nebo v množině A. Nechť tedy $\lambda_\alpha \in \{^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{^{(2)}\lambda_\alpha\}$, tedy $\lambda_\alpha = {}^{(1)}\lambda_\alpha = {}^{(2)}\lambda_\beta$, a počítejme podle (3.9) φ^α_{00}:

$$\varphi^\alpha_{00} = \frac{1}{\lambda_\alpha} \lim_{\lambda \to \lambda_\alpha} (\lambda - \lambda_\alpha)\, a_{00}(\lambda)\,,$$

což podle (3.1) je

$$\frac{1}{\lambda_\alpha} \lim_{\lambda \to \lambda_\alpha} (\lambda - \lambda_\alpha) \left[{}^{(1)}a_{00}(\lambda) - \frac{[^{(1)}a_{01}(\lambda)]^2}{^{(1)}a_{11}(\lambda) + a}\right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_\alpha} \lim_{\lambda \to \lambda_\alpha} (\lambda - \lambda_\alpha) \left[\frac{^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\,{}^{(1)}\varphi^\alpha_{00} - \frac{\left[\dfrac{^{(1)}\lambda}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\,{}^{(1)}\varphi^\alpha_{01}\right]^2}{\dfrac{^{(1)}\lambda_\alpha}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_\alpha}\,\varphi^\alpha_{11} + \dfrac{^{(2)}\lambda_\beta}{\lambda - {}^{(2)}\lambda_\beta}\,{}^{(2)}\varphi^\alpha_{00}}\right] =$$

$$= {}^{(1)}\varphi^\alpha_{00} - \frac{[^{(1)}\varphi^\alpha_{01}]^2}{^{(1)}\varphi^\alpha_{00} + {}^{(2)}\varphi^\alpha_{00}}\,.$$

Analogickým výpočtem pro všechny φ^{α}_{ij} dostaneme v tomto případě vztahy

$$\varphi^{\alpha}_{00} = {}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{00} - \frac{\left[{}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{01}\right]^2}{{}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{11} + {}^{(2)}\varphi^{\alpha}_{00}}, \tag{3.11}$$

$$\varphi^{\alpha}_{01} = \frac{{}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{01} \cdot {}^{(2)}\varphi^{\alpha}_{01}}{{}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{11} + {}^{(2)}\varphi^{\alpha}_{00}},$$

$$\varphi^{\alpha}_{11} = {}^{(2)}\varphi^{\alpha}_{11} - \frac{\left[{}^{(2)}\varphi^{\alpha}_{01}\right]^2}{{}^{(1)}\varphi^{\alpha}_{11} + {}^{(2)}\varphi^{\alpha}_{00}}.$$

Tento zákon skládání veličin φ^{α}_{ij} platí tedy pro ten případ, že $\lambda_\alpha \in \{{}^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}$.

Poznámka. Index α na pravé straně vzorců (3.11) nemusí číselně souhlasit s indexem α na straně pravé, neboť uspořádáním výsledného spektra $\{\lambda_\alpha\}$ se změní pořadí.

Budiž nyní $\lambda_\alpha \in A$ a počítejme opět podle (3.9) veličinu φ^{α}_{00}

$$\varphi^{\alpha}_{00} = \frac{1}{\lambda_\alpha} \lim_{\lambda \to \lambda_\alpha} (\lambda - \lambda_\alpha) \left[{}^{(1)}a_{00}(\lambda) - \frac{\left[{}^{(1)}a_{01}(\lambda)\right]^2}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)} \right] =$$

$$= \frac{1}{\lambda_\alpha} \lim_{\lambda \to \lambda_\alpha} \left[(\lambda - \lambda_\alpha)\, {}^{(1)}a_{00}(\lambda) - (\lambda - \lambda_\alpha) \frac{\left[{}^{(1)}a_{01}(\lambda)\right]^2}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\lambda_\alpha} \left[{}^{(1)}a_{01}(\lambda_\alpha)\right]^2 \lim_{\lambda \to \lambda_\alpha} \frac{\lambda - \lambda_\alpha}{{}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda)},$$

a tedy podle l'Hospitalova pravidla konečně

$$\varphi^{\alpha}_{00} = \frac{\left[{}^{(1)}a_{01}(\lambda_\alpha)\right]^2}{\lambda_\alpha} \frac{1}{\left[{}^{(1)}a_{11}(\lambda_\alpha)\right]' + \left[{}^{(2)}a_{00}(\lambda_\alpha)\right]'} =$$

$$= \frac{\left[{}^{(1)}a_{01}(\lambda_\alpha)\right]^2}{\lambda_\alpha \left[\sum_\beta \frac{{}^{(1)}\lambda_\beta}{(\lambda_\alpha - {}^{(1)}\lambda_\beta)^2}\, {}^{(1)}\varphi^{\beta}_{11} + \sum_\beta \frac{{}^{(2)}\lambda_\beta}{(\lambda_\alpha - {}^{(2)}\lambda_\beta)^2}\, {}^{(2)}\varphi^{\beta}_{00} \right]},$$

neboť jmenovatel je podle (2.6) kladný.

Podobným výpočtem pro φ^{α}_{01}, φ^{α}_{11} dostaneme formule

$$\varphi^{\alpha}_{00} = \frac{\left[{}^{(1)}\varphi^{0}_{01} + \sum_\beta \frac{{}^{(1)}\lambda_\beta}{\lambda_\alpha - {}^{(1)}\lambda_\beta}\, {}^{(1)}\varphi^{\beta}_{01} \right]^2}{\lambda_\alpha \left[\sum_\beta \frac{{}^{(1)}\lambda_\beta}{(\lambda_\alpha - {}^{(1)}\lambda_\beta)^2}\, {}^{(1)}\varphi^{\beta}_{11} + \sum_\beta \frac{{}^{(2)}\lambda_\beta}{(\lambda_\alpha - {}^{(2)}\lambda_\beta)^2}\, {}^{(2)}\varphi^{\beta}_{00} \right]}, \tag{3.12}$$

$$\varphi^{\alpha}_{01} = -\frac{\left[{}^{(1)}\varphi^{0}_{01} + \sum_\beta \frac{{}^{(1)}\lambda_\beta}{\lambda_\alpha - {}^{(1)}\lambda_\beta}\, {}^{(1)}\varphi^{\beta}_{01} \right] \left[{}^{(2)}\varphi^{0}_{01} + \sum_\beta \frac{{}^{(2)}\lambda_\beta}{\lambda_\alpha - {}^{(2)}\lambda_\beta}\, {}^{(2)}\varphi^{\beta}_{01} \right]}{\lambda_\alpha \left[\sum_\beta \frac{{}^{(1)}\lambda_\beta}{(\lambda_\alpha - {}^{(1)}\lambda_\beta)^2}\, {}^{(1)}\varphi^{\beta}_{11} + \sum_\beta \frac{{}^{(2)}\lambda_\beta}{(\lambda_\alpha - {}^{(2)}\lambda_\beta)^2}\, {}^{(2)}\varphi^{\beta}_{00} \right]},$$

$$\varphi_{11}^{\alpha} = \frac{\left[{}^{(2)}\varphi_{01}^{0} + \sum_{\beta} \frac{{}^{(2)}\lambda_{\beta}}{\lambda - {}^{(2)}\lambda_{\beta}} \, {}^{(2)}\varphi_{01}^{\beta}\right]^2}{\lambda_{\alpha}\left[\sum_{\beta} \frac{{}^{(1)}\lambda_{\beta}}{(\lambda_{\alpha} - {}^{(1)}\lambda_{\beta})^2} \, {}^{(1)}\varphi_{11}^{\beta} + \sum_{\beta} \frac{{}^{(2)}\lambda_{\beta}}{(\lambda_{\alpha} - {}^{(2)}\lambda_{\beta})^2} \, {}^{(2)}\varphi_{00}^{\alpha}\right]},$$

čímž je dán zákon skládání veličin φ_{ij}^{α} pro případ, že $\lambda_{\alpha} \in A$.

Souhrně můžeme tedy říci:

Jsou-li dány dva hřídele g, g_2, charakterisované spektry $\{{}^{(1)}\lambda_{\alpha}\}$, $\{{}^{(2)}\lambda_{\alpha}\}$ a soustavou veličin $\{{}^{(1)}\varphi_{ij}^{\alpha}\}$, $\{{}^{(2)}\varphi_{ij}^{\alpha}\}$, je spektrum složeného hřídele $g = g_1 \circ g_2$ dáno sjednocením průniku $\{{}^{(1)}\lambda_{\alpha}\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_{\alpha}\}$ a množiny A všech kořenů rovnice

$$(3.13) \qquad {}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda) = 0 \,.$$

Soustavu všech čísel $\{\varphi_{ij}^{\alpha}\}$ určíme takto: Předně určíme φ_{ij}^{0} ze vzorců (3.10).

Při určování φ_{ij}^{α} musíme rozlišovat dva případy podle toho, jestli příslušná hodnota λ_{α} patří do $\{{}^{(1)}\lambda_{\alpha}\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_{\alpha}\}$ nebo do A.

I. Jestli $\lambda_{\alpha} \in \{{}^{(1)}\lambda_{\alpha}\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_{\alpha}\}$, pak φ_{ij}^{α} určíme ze vzorců (3.11).

II. Jestliže $\lambda_{\alpha} \in A$, pak φ_{ij}^{α} určíme podle (3.12).

Všimněme si blíže rovnice (3.13). Rozepsáním podle (2.5) ji uvedeme na tvar

$$(3.14) \qquad {}^{(1)}\varphi_{11}^{0} + {}^{(2)}\varphi_{00}^{0} + \sum_{\alpha} \frac{{}^{(1)}\lambda_{\alpha}}{\lambda - {}^{(1)}\lambda_{\alpha}} \, {}^{(1)}\varphi_{11}^{\alpha} + \sum_{\alpha} \frac{{}^{(2)}\lambda_{\alpha}}{\lambda - {}^{(2)}\lambda_{\alpha}} \, {}^{(2)}\varphi_{00}^{\alpha} = 0 \,.$$

Vezměme si nyní množinu $\{{}^{(1)}\lambda_{\alpha}\} \cup \{{}^{(2)}\lambda_{\alpha}\}$, kterou označíme $\{\bar{\lambda}_{\alpha}\}$, čísla $\bar{\lambda}_{\alpha}$ si mysleme uspořádány

$$\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_3 > \dots$$

Položme nyní

$$\bar{\varphi}^0 = {}^{(1)}\varphi_{11}^{0} + {}^{(2)}\varphi_{00}^{0} \,.$$

Je-li

$$\bar{\lambda}_{\alpha} = {}^{(1)}\lambda_{\beta} \,, \quad \bar{\lambda}_{\alpha} \,\bar{\in}\, \{{}^{(2)}\lambda_{\alpha}\} \,,$$

položme $\bar{\varphi}^{\alpha} = {}^{(1)}\varphi_{11}^{\beta}$.

Je-li

$$\bar{\lambda}_{\alpha} = {}^{(2)}\lambda_{\beta} \,, \quad \bar{\lambda}_{\alpha} \,\bar{\in}\, \{{}^{(1)}\lambda_{\alpha}\} \,,$$

položme $\bar{\varphi}^{\alpha} = {}^{(2)}\varphi_{00}^{\beta}$.

Je-li

$$\bar{\lambda}_{\alpha} = {}^{(1)}\lambda_{\beta} = {}^{(2)}\lambda_{\gamma} \,,$$

položme $\bar{\varphi}^{\alpha} = {}^{(1)}\varphi_{11}^{\beta} + {}^{(2)}\varphi_{00}^{\gamma}$.

Při této transkripci bude mít rovnice (3.14) tvar

$$(3.15) \qquad \bar{\varphi}^0 + \sum_{\alpha} \frac{\bar{\lambda}_{\alpha}}{\lambda - \bar{\lambda}_{\alpha}} \, \bar{\varphi}^{\alpha} = 0 \,.$$

Nyní je vidět, že kořeny rovnice (3.15) jsou posloupností $\bar{\lambda}_1 > \bar{\lambda}_2 > \bar{\lambda}_3 \ldots$ separovány. Platí totiž, jak okamžitě plyne z kladnosti čísel $\bar{\varphi}^\alpha$ (derivace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\bar{\varphi}^0 + \sum \frac{\bar{\lambda}_\alpha}{\lambda - \bar{\lambda}_\alpha} \bar{\varphi}^\alpha\right] = -\sum \frac{\bar{\lambda}_\alpha}{(\lambda - \bar{\lambda}_\alpha)^2} \bar{\varphi}^\alpha ,$$

je na všech intervalech $(\bar{\lambda}_{\alpha+1}, \bar{\lambda}_\alpha)$ podle (2.6) záporná)

$$\bar{\lambda}_1 > \lambda_1 > \bar{\lambda}_2 > \lambda_2 > \bar{\lambda}_3 > \ldots$$

Tato okolnost je příznivá k numerickému řešení rovnice (3.15) metodou Newtonovou nebo tzv. regula falsi. Máme-li stanovit kořen λ_α, můžeme jej aproximovat kořenem kvadratické rovnice

$$\frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \bar{\lambda}_\alpha} \bar{\varphi}^\alpha + \frac{\bar{\lambda}_{\alpha+1}}{\lambda - \bar{\lambda}_{\alpha+1}} \bar{\varphi}^{\alpha+1} + \bar{\varphi}^0 = 0 ,$$

ležícím v intervalu $(\bar{\lambda}_\alpha, \bar{\lambda}_{\alpha+1})$.

Obraťme nyní svou pozornost na skládání několika hřídelů. Podle toho, jak byl grupoid G zaveden, platí v G zákon asociativní. Buďtež $g_1, g_2, g_3 \in G$, pak

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3) .$$

Toho s výhodou můžeme užít při skládání většího počtu hřídelů. Buďtež $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_n \in G$. Pak k hřídeli $g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_n$ můžeme dojít různými postupy připojování, tak např. postupy danými schématy

$$g_1, g_1 \circ g_2, g_1 \circ g_2 \circ g_3, \ldots$$

nebo

$$g_1 \circ g_2, g_3 \circ g_4, g_1 \circ g_2 \circ g_3, g_4 \circ ,$$

atd.

Mnohdy se vyskytne úloha spojit několik identických hřídelů, tedy utvořit jejich „mocninu". Budiž např. $g \in G$, a mějme určit $g^6 \in G$. Postup daný schématem

$$g, g \circ g, g \circ g \circ g, \ldots$$

je numericky pracnější než postup

$$g, g^2, (g^2)^3 ,$$

neboť zde se maximálně uplatní okolnost, že vzorce (3.11) pro skládání veličin φ_{ij}^α jsou značně jednodušší než vzorce (3.12), což snadno nahlédneme z tohoto schématu

$$\begin{aligned} g &\to \{\lambda_\alpha\} , \{\varphi_{ij}^\alpha\} , \\ g^2 &\to \{\lambda_\alpha^*\} , \{\varphi_{ij}^{*\alpha}\} , \end{aligned}$$

při čemž zřejmě $\{\lambda_\alpha\} \subset \{\lambda_\alpha^*\}$, a tedy pro všechny $\varphi_{ij}^{*\alpha}$, pro něž je $\lambda_\alpha^* = \lambda_\beta$, platí jednoduché formule (3.11).

Upozorněme ještě na důležitý zvláštní případ souměrného hřídele. To je hřídel, mající střed souměrnosti rovný $x_s = \frac{1}{2}(x_n + x_0)$, což znamená, že platí

$$\tfrac{1}{2}(x_i + x_{n-i}) = x_s\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n\,,$$

kde x_i jsou polohy ložisek

$$m(x_s - x) = m(x_s + x)\,, \quad p(x_s - x) = p(x_s + x)\,.$$

Pro tento hřídel je zřejmě $\varphi^\alpha_{00} = \varphi^\alpha_{11}$, $\alpha = 0, 1, 2, \ldots$ Pro případ mocniny souměrného hřídele má tedy rovnice (3.13) tvar

$$a_{00}(\lambda) = 0\,,$$

z čehož podle (3.6) plyne, že spektrum druhé mocniny souměrného hřídele je rovno sjednocení původního spektra a soustavy kořenů rovnice $a_{00}(\lambda) = 0$.

Závěrem ještě dáme pokyn pro výpočet spektra $\{\lambda_\alpha\}$ hřídele g rotujícího v $n + 1$ ložiskách $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Jednotlivé jeho úseky mezi sousedními ložisky označíme $g_1, g_2, \ldots, g_n$, a nazveme pole hřídele. Známe-li nyní pro každé pole g_k příslušné veličiny $\{{}^{(k)}\lambda_\alpha\}$, $\{{}^{(k)}\varphi^\alpha_{ij}\}$, můžeme po $n - 1$ opakovaném užití vzorců pro skládání λ_α, φ^α_{ij} dojít k veličinám λ_α, φ^α_{ij} celého hřídele g. Protože však veličiny φ^α_{ij} hřídele g již nepotřebujeme, stačí vzorce pro skládání φ^α_{ij} použít jen $n - 2$krát.

Protože při výpočtu vycházíme ze znalostí veličin λ_α, φ^α_{ij} pro jednotlivá pole, je nutné tyto veličiny nejdříve určit. Mějme tedy pole, to je hřídel o dvou ložiskách v bodech 0, l, kde l značí délku pole. Pro veličiny φ^0_{ij} tohoto pole vychází podle (2.3) přímo vzorce

$$\begin{aligned}
\varphi^0_{00} &= \int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \mathrm{d}P(x)\,, \\
\varphi^0_{01} &= \frac{1}{l}\int_0^l x\left(1 - \frac{x}{l}\right) \mathrm{d}P(x)\,, \\
\varphi^0_{11} &= \frac{1}{l^2}\int_0 x^2\, \mathrm{d}P(x)\,, \quad \text{kde} \quad \mathrm{d}P(x) = p(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

To plyne z toho, že funkce $\bar{u}(x, 1, 0)$ je zřejmě rovna $1 - x/l$ a funkce $\bar{u}(x, 0, 1)$ je rovna $(1/l)\,x$. Určení vlastních čísel λ_α pole a veličin φ^α_{ij}, $\alpha = 1, 2, \ldots$, je otázkou samostatnou. Veličiny λ_α, φ^α_{ij} jsou závislé na rozložení hmoty M a poddajnosti P. Jsou to obecně tedy funkcionály $\lambda_\alpha[M, P]$, $\varphi^\alpha_{ij}[M, P]$. O jejich přibližném stanovení pojedná naše příští práce.

4. PŘÍKLADY

V praxi se často vyskytují hřídele sestavené z polí, pro které dovedeme veličiny λ_α a φ^α_{ij} snadno určit. Uvedeme 3 druhy takových typických polí:

a) *Pole prismatické s rovnoměrně rozloženou hmotou.*

$$\begin{aligned}
m(x) &= m = \text{konst.}\,, \\
p(x) &= p = \text{konst.}\,, \quad x \in \langle 0, l\rangle\,.
\end{aligned}$$

Řešením úlohy (1.1), (1.2), (1.3) dostaneme pro tento případ vzorce pro λ_α, φ^α_{ij}

$$\lambda_n = \frac{mpl^4}{\pi^4}\frac{1}{n^4}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\varphi^0_{00} = \varphi^0_{11} = \tfrac{1}{3}pl, \quad \varphi^0_{01} = \tfrac{1}{6}pl,$$

$$\varphi^n_{00} = \frac{2pl}{\pi^2}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\varphi^n_{00} = \varphi^n_{11}, \quad \varphi^n_{01} = (-1)^{n+1}\varphi^n_{00}.$$

b) *Pole prismatické s jedinou koncentrovanou hmotou (kotouč) uprostřed*

$$p(x) = p = \text{konst.}, \quad x \in \langle 0, l \rangle,$$

$$M(x) = 0, \quad 0 \leqq x < \frac{l}{2}, \quad M(x) = M, \quad \frac{l}{2} \leqq x \leqq l.$$

Spektrum tohoto pole má jen jediný prvek $\lambda_1 = l^3pM/48$,

$$\varphi^0_{00} = \varphi^0_{11} = \tfrac{1}{3}pl, \quad \varphi^0_{01} = \tfrac{1}{6}pl,$$

$$\varphi^1_{00} = \varphi^1_{01} = \varphi^1_{11} = \tfrac{3}{16}pl.$$

c) *Nehmotné pole (spojka) libovolně osazené.*

Pole má prázdné spektrum, jeho ohybové funkce $a_{ij}(\lambda)$ jsou dány

$$a_{ij}(\lambda) = \varphi^0_{ij},$$

$$\varphi^0_{00} = \int_0^l \left(1 - \frac{1}{l}\right)^2 \mathrm{d}P(x), \quad \varphi^0_{01} = \frac{1}{l}\int_0^l x\left(1 - \frac{1}{l}\right), \quad \varphi^0_{11} = \frac{1}{l}\int_0^l x^2 \,\mathrm{d}P(x).$$

Položme např. $p(x) = \text{konst.}$ a dostaneme opět

$$\varphi^0_{00} = \tfrac{1}{3}pl, \quad \varphi^0_{11} = \tfrac{1}{3}pl, \quad \varphi^0_{01} = \tfrac{1}{6}pl.$$

Propočítáme nyní několik příkladů hřídelů vzniklých složením polí uvedených tří typů. Výpočet provedeme v technických jednotkách kg cm sec.

V případě prvém položme $m = 1 \text{ kg cm}^{-2} \text{ sec}^{-2}$, $p = 1 \text{ kg}^{-1} \text{ cm}^{-2}$, $l = \pi$ cm; pole označíme g_1. Jeho spektrum λ_n a veličiny φ^α_{ij} jsou

$$\lambda_n = \frac{1}{n^4}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots \quad [\text{sec}^{-2}]$$

$$\varphi^0_{00} = \varphi^0_{11} = \tfrac{1}{3}\pi, \quad \varphi^0_{01} = \tfrac{1}{6}\pi, \quad [\text{kg}^{-1} \text{ cm}^{-1}]$$

$$\varphi^n_{00} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi^n_{11} = \varphi^n_{00}, \quad \varphi^n_{01} = (-1)^{n+1}\varphi^n_{00}.$$

V případě druhém položme $l = 1$ cm, $p = 1\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{cm}^{-2}$, $M = 48\ \mathrm{kg\ cm}^{-1}\ \mathrm{sec}^{-2}$; hřídel označme g_2. Příslušné veličiny jsou (spektrum obsahuje jedinou hodnotu $\lambda_1 = 1$) $\varphi^0_{00} = \varphi^0_{11} = \frac{1}{3}$, $\varphi^0_{01} = \frac{1}{6}$, $\varphi^1_{00} = \varphi^1_{01} = \varphi^1_{11} = \frac{3}{16}$.

Konečně v případě třetím položme $l = 1$ cm, $p = 1\ \mathrm{kg\ cm}^{-2}$. Spektrum je množina prázdná, $\varphi^0_{00} = \varphi^0_{11} = \frac{1}{3}$, $\varphi^0_{01} = \frac{1}{6}$, pole označíme g_3.

Příklad 4.1. Výpočet $g_1 \circ g_1$:

Zde se jedná o výpočet spektra „druhé mocniny" dvou souměrných polí a platí tedy pravidlo uvedené na konci části třetí: Výsledné spektrum se skládá z původního a z kořenů rovnice $a_{00}(\lambda) = 0$.

V našem případě tedy je

$$a_{00}(\lambda) = \left[\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\lambda - \frac{1}{n^4}} \frac{1}{n^2}\right] = 0\,.$$

Výsledné spektrum označíme $\{\bar{\lambda}_\alpha\}$. Je tedy

$$\bar{\lambda}_1 = \lambda_1, \bar{\lambda}_3 = \lambda_2, \ldots, \bar{\lambda}_{2n-1} = \lambda_n, \ldots$$

a hodnoty $\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_4, \ldots, \bar{\lambda}_{2n}, \ldots$ jsou kořeny hořejší rovnice. Tak např. hodnotu $\bar{\lambda}_2$ aproximujeme kořenem kvadratické rovnice

$$\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{16\lambda - 1} = 0$$

atd.

Kdybychom chtěli za účelem dalšího připojování počítat příslušné veličiny $\bar{\varphi}^\alpha_{ij}$, užijeme předně vzorců (3.10) a dostaneme

$$\bar{\varphi}^0_{00} = \frac{\pi}{3} - \frac{\frac{\pi^2}{36}}{2\frac{\pi}{3}} = \pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right] = \frac{7\pi}{24},$$

$$\bar{\varphi}^0_{00} = \frac{\pi}{24}, \quad \bar{\varphi}^0_{11} = \bar{\varphi}^0_{00}\,.$$

Pro lichá α užijeme vzorců (3.11), neboť odpovídají hodnotám λ_α původního spektra

$$\bar{\varphi}^{2n-1}_{00} = \varphi^n_{00} - \frac{[\varphi^n_{01}]^2}{2\varphi^n_{00}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2},$$

$$\bar{\varphi}^{2n-1}_{01} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2} = \bar{\varphi}^{2n-1}_{11}\,.$$

Pro sudá α užijeme vzorců (3.12), za předpokladu, že už známe $\bar{\lambda}_{2n}$

$$\bar{\varphi}_{00}^{2n} = \frac{\left[\varphi_{01}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\bar{\lambda}_{2n} - \lambda_n} \varphi_{01}^n\right]^2}{2\bar{\lambda}_{2n} \sum_1^{\infty} \frac{\lambda_n}{(\bar{\lambda}_{2n} - \lambda_n)^2} \varphi_{00}^n},$$

$$\bar{\varphi}_{01}^{2n} = -\bar{\varphi}_{00}^{2n} = \bar{\varphi}_{11}^{2n}.$$

Příklad 4.2. Výpočet $g_2 \circ g_2 \circ g_2$:

Nejdříve vypočteme veličiny $\bar{\lambda}_\alpha$, $\bar{\varphi}_{ij}^\alpha$ hřídele $g_2 \circ g_2$, načež spektrum $\bar{\bar{\lambda}}_\alpha$ výsledného hřídele $g_2 \circ g_2 \circ g_2$; g_2 je opět souměrné pole a je proto $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 = 1$ a $\bar{\lambda}_2$ je kořenem rovnice $\frac{1}{3} + 1/\lambda - 1\frac{3}{16} = 0$, z čehož $\bar{\lambda}_2 = \frac{7}{16}$. Podle (3.10) dostaneme

$$\bar{\varphi}_{00}^0 = \bar{\varphi}_{11}^0 = \tfrac{7}{24}, \quad \bar{\varphi}_{01}^0 = \tfrac{1}{24}.$$

Podle (3.11)

$$\bar{\varphi}_{00}^1 = \bar{\varphi}_{01}^1 = \bar{\varphi}_{11}^1 = \tfrac{3}{32}$$

a konečně podle (3.12) na základě znalosti $\bar{\lambda}_2 = \frac{7}{16}$ dostaneme

$$\bar{\varphi}_{00}^2 = \bar{\varphi}_{11}^2 = -\bar{\varphi}_{01}^2 = \tfrac{3}{56}.$$

Spektrum hřídele $g_2 \circ g_2$ je množina dvou čísel $\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\} = \{1, \frac{7}{16}\}$ a spektrum pole g_2 sestává jen z čísla 1 : $\{1\}$. Protože je $\{1, \frac{7}{16}\} \cap \{1\} = \{1\}$, je číslo 1 vlastním číslem hřídele $g_2 \circ g_2 \circ g_2$. Ostatní vlastní čísla dostaneme řešením rovnice (3.14)

$$\bar{\varphi}_{11}^0 + \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1} \bar{\varphi}_{11}^1 + \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda - \bar{\lambda}_2} \bar{\varphi}_{11}^2 + \varphi_{00}^0 + \frac{\lambda_1}{\lambda - \lambda_1} \varphi_{00}^1 = 0.$$

Úpravou podle (3.15) dostaneme

$$\bar{\varphi}_0 + \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1} \bar{\varphi}_1 + \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda - \bar{\lambda}_2} \bar{\varphi}_2 = 0,$$

kde

$$\bar{\varphi}_0 = \bar{\varphi}_{11}^0 + \varphi_{00}^0 = \tfrac{5}{8}; \quad \bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_{11}^1 + \varphi_{00}^1 = \tfrac{9}{32}; \quad \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_{11}^2 = \tfrac{3}{56}.$$

Rovnice má tedy tvar

$$\frac{5}{8} + \frac{1}{\lambda - 1} \frac{9}{32} + \frac{\frac{7}{16}}{\lambda - \frac{7}{16}} \frac{3}{56} = 0;$$

její kořeny jsou $\bar{\bar{\lambda}}_2 = 0{,}58$, $\bar{\bar{\lambda}}_3 = 0{,}049$. Spektrum hřídele $g_2 \circ g_2 \circ g_2$ je tedy

$$\bar{\bar{\lambda}}_1 = 1, \quad \bar{\bar{\lambda}}_2 = 0{,}58, \quad \bar{\bar{\lambda}}_3 = 0{,}049.$$

Příklad 4.3. Výpočet spektra $\{\lambda_\alpha^*\}$ hřídele $g_2 \circ g_2 \circ g_2 \circ g_2$:

Mohli bychom postupovat prostě tak, že bychom ke hřídeli $g_2 \circ g_2 \circ g_2$, propočítanému v příkladě 2, připojili pole g_2. K tomu bychom však potřebovali veličiny $\bar{\varphi}_{ij}^\alpha$, příslušné k $\bar{\lambda}_\alpha$. S výhodou proto budeme postupovat tak, že spojíme dva exempláře hřídele $g_2 \circ g_2$. To je však hřídel souměrný a tedy spektrum hřídele $g_2 \circ g_2 \circ$ $\circ\, g_2 \circ g_2$ se skládá ze spektra hřídele $g_2 \circ g_2$ a kořenů rovnice (označení jako v příkladu 2)

$$\bar{\varphi}_{00}^0 + \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1} \bar{\varphi}_{00}^1 + \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda - \bar{\lambda}_2} \bar{\varphi}_{00}^2 = 0 \,,$$

které jsou

$$\lambda_2^* = 0{,}75 \,, \quad \lambda_4^* = 0{,}294 \,.$$

Spektrum hřídele $g_2 \circ g_2 \circ g_2 \circ g_2$ sestává tedy z čísel $\{\bar{\lambda}_1, \lambda_2^*, \bar{\lambda}_2, \lambda_4^*\}$, tedy z čísel: 1; 0,75; 0,436; 0,294.

Příklad 4.4. Výpočet spektra hřídele $g_2 \circ g_3 \circ g_1$ (dvě pole spojená spojkovým polem):

Nejdříve vypočítáme veličiny $\bar{\lambda}_\alpha$, $\bar{\varphi}_{ij}^\alpha$ příslušné hřídeli $g_2 \circ g_3$ (označení jiné než v příkladech 2 a 3).

Spektrum hřídele $g_2 \circ g_3$ je dáno kořeny rovnice (3.14), která v našem případě je

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{\lambda - 1} \frac{3}{16} + \frac{1}{3} = 0 \,,$$

z čehož $\bar{\lambda}_1 = \frac{23}{32} = 0{,}72$. Veličiny $\bar{\varphi}_{ij}^0$ dostaneme podle (3.10)

$$\bar{\varphi}_{00}^0 = \bar{\varphi}_{11}^0 = \tfrac{7}{24} \,, \quad \bar{\varphi}_{01}^0 = \tfrac{1}{24} \,.$$

Z veličin $\bar{\varphi}_{ik}^1$ budeme potřebovat pouze $\bar{\varphi}_{11}^1$, kterou dostaneme podle (3.12)

$$\bar{\varphi}_{11}^1 \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^2}{\bar{\lambda}_1 \frac{1}{\bar{\lambda}_1 - 1} \frac{3}{16}} = 0{,}016 \,.$$

Protože spektra hřídele $g_2 \circ g_3$ a pole g_1 jsou disjunktní, je spektrum hřídele $g_2 \circ g_3 \circ g_1$ dáno soustavou kořenů rovnice (3.14), která v našem případě je

$$\bar{\varphi}_{11}^0 + \frac{\bar{\lambda}_1}{\lambda - \bar{\lambda}_1} \bar{\varphi}_{11}^1 + \frac{\pi}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \frac{1}{\lambda - 1} \frac{1}{n^2} = 0 \,.$$

Резюме

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ОБОРОТОВ, ОСНОВАННЫЙ НА ПОСТЕПЕННОМ ПРИСОЕДИНЕНИИ ПРОЛЕТОВ

ЛЮДВИК ЯНОШ (Ludvík Janoš)

Под спектром частот $\{\omega_\alpha\}$ вала мы понимаем систему тех значений угловых скоростей ω, при которых существует ненулевое решение уравнения

$$u''(x) + \omega^2 y(x)\, m(x) = 0\,,$$
$$y''(x) + u(x)\, p(x) = 0\,, \quad x \in (x_i, x_{i+1})$$

на всех интервалах (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, при выполнении условий:

1. $y(x_i) = 0\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$;
2. $u(x_0) = u(x_n) = 0$;
3. функции $y(x)$, $y'(x)$, $u(x)$ непрерывны во всем интервале $\langle x_0, x_n \rangle$.

При этом означает

x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, положение i-ой опоры,
$y(x)$ прогиб в месте x,
$u(x)$ изгибающий момент в месте x,
$m(x)$ плотность массы в месте x,
$p(x)$ плотность поддатливости в месте x, определенную соотношением $p(x) = 1/EI(x)$,
E модуль эластичности,
$I(x)$ момент инерции сечения в месте x,
ω угловую скорость.

Каждому валу, определенному положением опор x_i и функциями $m(x)$ и $p(x)$, поставлены в соответствие три функции $a_{ij}(\lambda)$, $i, j = 0, 1$, $a_{10}(\lambda) = a_{01}(\lambda)$, которые мы называем функциями изгиба вала. Значение функций $a_{ij}(\lambda)$ таково: $a_{00}(\lambda)$ – это поворот вала в точке x_0, вызванное единичным моментом, приложенным в точке x_0, в состоянии вращения угловой скоростью $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$, и аналогично для $a_{01}(\lambda)$ и $a_{11}(\lambda)$.

Для функций $a_{ij}(\lambda)$ существуют разложения

$$a_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}^0 + \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha}\, \varphi_{ij}^\alpha\,, \quad i = i, j = 0, 1\,.$$

Величины λ_α находятся в связи с критическими угловыми скоростями ω_α посредством соотношения

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\omega_\alpha^2}\,.$$

Числа λ_α мы называем собственными числами вала, и множество всех λ_α будем называть спектром и писать в виде $\{\lambda_\alpha\}$. Величины φ_{ij}^α мы будем называть собственными поддатливостями вала.

Пусть теперь g_1, g_2 означают два вала, определенные так:

$$g_1: \quad {}^{(1)}x_0, {}^{(1)}x_1, \ldots, {}^{(1)}x_{n_1}, \quad {}^{(1)}m(x), \quad {}^{(1)}p(x);$$
$$g_2: \quad {}^{(2)}x_0, {}^{(2)}x_1, \ldots, {}^{(2)}x_{n_2}, \quad {}^{(2)}m(x), \quad {}^{(2)}p(x).$$

Валопроводом $g_1 \circ g_2$ мы будем разуметь вал, возникший соединением обоих валов g_1, g_2 в опоре ${}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0$.

Пусть ${}^{(1)}a_{ij}(\lambda)$, ${}^{(2)}a_{ij}(\lambda)$ означают, соответственно, функции изгиба валов g_1, g_2. Функции изгиба $a_{ij}(\lambda)$ валопровода $g_1 \circ g_2$ определены тогда соотношениями (3.1), (3.2), (3.3). Пусть теперь A означает множество всех корней уравнения

$${}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in A.$$

Спектр вала $g_1 \circ g_2$, $\{\lambda_\alpha\}$ тогда определен объединением множества A и пересечения спектров обоих валов

$$\{\lambda_\alpha\} = A \cup [\{{}^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}].$$

Величины же φ_{ij}^α валопровода определены для $\alpha = 0$ соотношениями (3.10). Если же теперь $\lambda_\alpha \in \{{}^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}$, то φ_{ij}^α определены соотношениями (3.11), и если $\lambda_\alpha \in A$, то они определены соотношениями (3.12), для $\alpha = 1, 2, \ldots$. Приведенные формулы позволяют, следовательно, определить величины $\{\lambda_\alpha, \varphi_{ij}^\alpha\}$, соответствующие валопроводу $g_1 \circ g_2$, на основании величин $\{{}^{(1)}\lambda_\alpha, {}^{(1)}\varphi_{ij}^\alpha\}$ и $\{{}^{(2)}\lambda_\alpha, {}^{(2)}\varphi_{ij}^\alpha\}$, соответствующих по очереди валам g_1, g_2. Применяя постепенно эти формулы, можем определить спектр $\{\lambda_\alpha\}$ данного вала с $(n + 1)$ опорой в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, если нам известны величины $\{{}^{(k)}\lambda_\alpha, {}^{(k)}\varphi_{ij}^\alpha\}$, соответствующие его пролетам, т. е. ýчасткам вала между соседними опорами (x_k, x_{k+1}), $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Summary

CALCULATION OF CRITICAL SPEEDS OF MULTI-SPAN SHAFTS BY THE METHOD OF SUCCESSIVE ADDITION OF SPANS

LUDVÍK JANOŠ

By the frequency spectrum $\{\omega_\alpha\}$ of a shaft we shall understand the set of those values ω of circular velocity for which there exist non-zero solutions of

$$u''(x) + \omega^2\, y(x)\, m(x) = 0,$$
$$y''(x) + u(x)\, p(x) = 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, n - 1$$

on all the intervals (x_i, x_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots, n-1$, which also satisfy these conditions:

1. $y(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \ldots, n$;
2. $u(x_0) = u(x_n) = 0$;
3. the functions $y(x)$, $y'(x)$, $u(x)$ are continuous on the complete interval $\langle x_0, x_n \rangle$.

In this notation

x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ is the abscissa of the i-th bearing,
$y(x)$ deflection at x,
$u(x)$ bending moment at x,
$m(x)$ density (of mass) at x,
$p(x)$ density of flexibility at x; this is defined by $p(x) = 1/EI(x)$,
E module of elasticity
$I(x)$ moment of inertia of cross-section at x,
ω circular velocity.

To each shaft, determined by the position of its bearings x_i and by the functions $m(x)$ and $p(x)$, there correspond three functions $a_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 0, 1, a_{01}(\lambda) = a_{10}(\lambda))$ which we will term the bending functions of the shaft. They have the following meaning: $a_{00}(\lambda)$ is the deflection of the shaft at x_0 which arises on applying a unit bending moment at x_0 when the value of circular velocity is $\omega = 1/\sqrt{\lambda}$; and similarly for the functions $a_{01}(\lambda)$ and $a_{11}(\lambda)$.

These functions $a_{ij}(\lambda)$ may be developed into series of the following form

$$a_{ij}(\lambda) = \varphi_{ij}^0 + \sum_{\alpha} \frac{\lambda_\alpha}{\lambda - \lambda_\alpha} \varphi_{ij}^\alpha , \quad i, j = 0, 1 .$$

The quantities λ_α are related to the critical circular velocities thus

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{\omega_\alpha^2} .$$

The numbers λ_α will be called the proper values of the shaft; the set of all these λ_α will be termed the spectrum and denoted by $\{\lambda_\alpha\}$; the numbers φ_{ij}^α will be called the proper flexibilities of the shaft.

Now, let g_1 and g_2 be two shafts determined by

$$g_1: \quad {}^{(1)}x_0, {}^{(1)}x_1, \ldots, {}^{(1)}x_{n_1}, {}^{(1)}m(x), {}^{(1)}p(x) ,$$
$$g_2: \quad {}^{(2)}x_0, {}^{(2)}x_1, \ldots, {}^{(2)}x_{n_2}, {}^{(2)}m(x), {}^{(2)}p(x) .$$

By the connected shaft $g_1 \circ g_2$ we will understand the shaft which results from the given shafts g_1, g_2 by connecting them at the bearing ${}^{(1)}x_{n_1} = {}^{(2)}x_0$.

Next, let ${}^{(1)}a_{ij}(\lambda)$ and ${}^{(2)}a_{ij}(\lambda)$ be the bending functions of the shafts g_1 and g_2, respectively. The bending functions $a_{ij}(\lambda)$ of the connected shaft are then given by the relations (3.1), (3.2), (3.3). Let A be the set of all roots of the equation

$${}^{(1)}a_{11}(\lambda) + {}^{(2)}a_{00}(\lambda) = 0 .$$

The spectrum $\{\lambda_\alpha\}$ of the connected shaft is then the union of A with the intersection of spectra of the two given shafts,

$$\{\lambda_\alpha\} = A \cup \left[\{{}^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}\right].$$

The φ^α_{ij} of the connected shaft, for $\alpha = 0$, are given in (3.10). If $\lambda_\alpha \in \{{}^{(1)}\lambda_\alpha\} \cap \{{}^{(2)}\lambda_\alpha\}$, then the φ^α_{ij} are given by (3.11), and if $\lambda_\alpha \in A$, they are given by (3.12) (for $\alpha = 1, 2, \ldots$). These formulae, then, enable us to determine the values $\{\lambda_\alpha, \varphi^\alpha_{ij}\}$ corresponding to the connected shaft $g_1 \circ g_2$ when the values $\{{}^{(1)}\lambda_\alpha, {}^{(1)}\varphi^\alpha_{ij}\}$ and $\{{}^{(2)}\lambda_\alpha, {}^{(2)}\varphi^\alpha_{ij}\}$, corresponding to g_1 and g_2, respectively, are known. By repeated use of these formulae we may determine the spectrum of shaft with $n + 1$ bearings at $x_0, x_1, \ldots, x_n$ if the values $\{{}^{(k)}\lambda_\alpha, {}^{(k)}\varphi^\alpha_{ij}\}$ corresponding to its spans between consecutive bearings (x_k, x_{k+1}) are known.

Adresa autora: Dr. *Ludvík Janoš* C. Sc., Státní výzkumný ústav tepelné techniky, Praha 1, Husova 8.