Aplikace matematiky

Zdeněk Režný

Statistická regulace s konstantním regulačním krokem při jednosměrném výrobním trendu

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 5, 379–391

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102770

STATISTICKÁ REGULACE S KONSTANTNÍM REGULAČNÍM KROKEM PŘI JEDNOSMĚRNÉM VÝROBNÍM TRENDU

ZDENĚK REŽNÝ

(Došlo dne 29. ledna 1960.)

V článku jsou vyšetřovány vlastnosti jistého jednoduchého Markovova řetězce se zřetelem na aplikace v automatické statistické regulaci. Získaných teoretických vztahů je využito k charakterisování průběhu a výsledku statistické regulace jednotlivé výrobní operace a tím i k hledání optimálních parametrů statistické regulace (rozsahu výběru, kontrolního intervalu, regulačního kroku).

1. ÚVOD

Statistická regulace ve smyslu [1] je aplikace určitých statistických testů v kontrole hromadné a velkosériové výroby. Záleží v pravidelném opakování jednoho a téhož testu neboli kontroly s tím, že po každé při zamítnutí nulové hypotézy se činí regulační zásah do kontrolované výrobní operace. Správné provádění regulačních zásahů je zajištěno požadavkem ověření jakosti výroby bezprostředně po regulačním zásahu, po čemž se další kontroly opakují opět v pravidelných intervalech až do následujícího regulačního zásahu.

Při automatisaci statistické regulace je z hlediska ekonomiky konstrukce regulačního přístroje nejzávažnější otázkou druh statistického testu. Tato otázka je řešena použitím některého jednoduchého a přitom vydatného statistického testu, např. skupinového (viz [2], [3]). Další otázkou je provádění regulačního zásahu, které je rovněž automatisováno. Opět z hlediska konstrukce regulačního přístroje je nejekonomičtější provádět regulační zásahy korekcemi seřízení stroje o konstantní veličinu, neboli pracovat s *konstantním regulačním krokem*, bez ohledu na skutečnou resp. odhadovanou úchylku od požadovaného standardu. V teoretickém modelu statistické regulace, vyšetřovaném v tomto článku, se dále předpokládá, že interval mezi dvěma po sobě jdoucími kontrolami (kontrolní interval) je konstantní.

Kontrolní interval, rozsah výběru a regulační krok, neboli *parametry statistické regulace*, zároveň s *výrobními parametry* (povaha působení systematických i náhodných výrobních vlivů v čase) určují rozdělení pravděpodobnosti regulovaného znaku (tj. např. rozměru výrobku) v celém vyrobeném souboru. V tomto článku uvažujeme dva výrobní parametry, totiž směrnici lineárního výrobního trendu (systematická složka) a residuální rozptyl znaku kolem okamžité úrovně seřízení (náhodná složka). *Výrobním trendem* zde rozumíme funkci, popisující závislost úrovně seřízení na čase. Předpokládáme, že posun úrovně seřízení (vlivem opotřebení nástroje) je rovnoměrný, odkud plyne linearita trendu, a že působení náhodných vlivů je nezávislé na čase i na úrovni seřízení, takže okamžité rozdělení regulovaného znaku ve dvou různých časových okamžicích je totožné až na posunutí.

Z hlediska výsledného rozptylu procesu by bylo ovšem nejvýhodnější stanovit regulační krok rovný odhadovanému přírůstku úrovně seřízení za dobu jednoho kontrolního intervalu a pak regulovat při každé kontrole. Takový postup je však na druhé straně nejméně výhodný z technicko-ekonomických hledisek, a to zejména proto, že při příliš častých korekcích úrovně seřízení (regulačních zásazích) dochází k většímu opotřebení příslušných členů regulačního obvodu. Velikost regulačního kroku musí být tedy stanovena se zřetelem na minimalisaci jak výsledného rozptylu procesu, tak i frekvence regulačních zásahů. Analogické úvahy je ovšem nutno provést i pro ostatní parametry statistické regulace.

V tomto článku je vyšetřován nejjednodušší typ procesu regulace za předpokladu konstantních výrobních parametrů i parametrů regulace. Dále je naznačeno, jak lze využívat informace z celkového průběhu procesu k závěrům o změnách směrnice trendu a na základě toho optimalisovat regulovaný proces průběžným přestavováním parametrů regulace při respektování požadavku jednoduchosti konstrukce automatického zařízení, které by tento postup provádělo.

2. POPIS PROCESU

Procesem budeme stručně nazývat teoretický model pohybu úrovně seřízení μ v průběhu statisticky regulované výrobní operace. Podle našich předpokladů koná úroveň seřízení působením systematického výrobního vlivu rovnoměrný pohyb po reálné ose. Rychlost tohoto pohybu je rovna směrnici τ lineárního trendu. Budeme předpokládat $\tau > 0$. (Je zřejmé, že při $\tau < 0$ jsou všechny následující úvahy zcela obdobné a při $\tau = 0$ zůstává úroveň seřízení stálá, takže regulace ztrácí smysl.) Popsaný pohyb je rušen statistickou regulací, neboť v pravidelných časových intervalech se rozhoduje, zda má rovnoměrný pohyb pokračovat, nebo zda se má provést regulační zásah. Jednotlivé rozhodování nazveme *kontrolou* a časový interval, v němž se kontroly opakují, *kontrolní interval* (označení J). Kontrola je test nulové hypotézy o úrovni seřízení $\mu = \mu_0$ proti alternativní hypotéze $\mu = \mu_1 > \mu_0$ a proto je její výsledek náhodný; pravděpodobnost regulačního zásahu je rovna hodnotě silofunkce příslušného testu v bodě, odpovídajícím úrovni seřízení v okamžiku kontroly, neboli v *kontrolované poloze* (označení μ_*).

Regulační zásah znamená, že úroveň seřízení v okamžiku kontroly přeskočí ze své kontrolované polohy do polohy se souřadnicí zmenšenou o *regulační krok* d_*.

Pak ovšem opět až do příštího regulačního zásahu nerušeně působí systematický vliv, takže úroveň seřízení začne ze své nové polohy okamžitě po přeskoku konat opět rovnoměrný pohyb s rychlostí τ.

Označme m_n souřadnici kontrolované polohy při n-té kontrole. Pak v případě, že nedošlo k regulačnímu zásahu, je

$$m_{n+1} = m_n + t_* \, ,$$

kde je

$$(1) \qquad t_* = \tau J > 0 \, .$$

V opačném případě přeskočí úroveň seřízení z polohy m_n okamžitě do polohy $m_n - d_*$ a odtud začíná opět rovnoměrný pohyb, který způsobí do $(n + 1)$-vé kontroly přírůstek polohy rovný t_*, takže je

$$m_{n+1} = m_n - u_* \, ,$$

kde je

$$(2) \qquad u_* = d_* - t_* \, .$$

Je zřejmé, že u_* musí být rovněž kladné, neboť regulace by v opačném případě působení systematického vlivu nevyrovnávala, nýbrž jen brzdila a úroveň seřízení by bez omezení vzrůstala.

V dalším budeme *polohou* μ rozumět polohu úrovně seřízení během procesu nebo její souřadnici bez ohledu na to, zda se při jejím dosažení uskutečnila kontrola, na rozdíl od *kontrolované* polohy μ_*. Je-li při n-té kontrole kontrolovaná poloha $\mu_* = m_n$, pak v časovém intervalu mezi $(n - 1)$-vou a n-tou kontrolou prošla poloha μ celý interval $(m_n - t_*, m_n)$.

Možnými polohami μ jsou tedy všechna reálná čísla. Naproti tomu rozložení možných kontrolovaných poloh μ_* po reálné ose je závislé na poměru $t_* : d_*$ resp. $t_* : u_*$. Je-li tento poměr racionální, pak lze psát

$$(3) \qquad t_* = t\Delta\mu_* \, , \quad u_* = u\Delta\mu_* \, , \quad d_* = d\Delta\mu_* \, ,$$

kde je $\Delta\mu_* > 0$ a t, u přirozená čísla s nejvyšším společným dělitelem 1, $d = t + u$. Možné kontrolované polohy tvoří spočetnou množinu ekvidistantních bodů v intervalech délky $\Delta\mu_*$. — Je-li naproti tomu poměr $t_* : u_*$ iracionální, je množina možných kontrolovaných poloh též spočetná, ale hustě rozložená (rovněž na celé reálné ose).

V dalším se omezíme předpokládem racionálního poměru $t_* : u_*$, který vede nejen k teoretickým výsledkům, ale i k odvození numerických metod. Případ iracionálního poměru $t_* : u_*$ lze chápat jako limitní pro $\Delta\mu_* \to 0$.

Jedním z cílů vyšetřování popsaného procesu je dokázat existenci výsledného rozdělení (pravděpodobnosti) regulovaného znaku X a nalézt vztahy pro jeho určení (nebo alespoň jeho momentů). *Výsledným rozdělením* regulovaného znaku se rozumí rozdělení pravděpodobnosti tohoto znaku v souboru výrobků z regulované výrobní operace. Ukazatelem jakosti procesu bývá zpravidla rozptyl tohoto rozdělení (*výsledný rozptyl* regulovaného znaku). Dalším cílem je získat z průběhu procesu informaci o neznámých výrobních parametrech, o jejímž využití byla zmínka na konci odst. 1.

3. VYŠETŘOVANÝ MARKOVŮV ŘETĚZEC (PROCES V UŽŠÍM SMYSLU)

Vlastnosti procesu, popsaného v odst. 2, závisí na posloupnosti změn kontrolovaných poloh μ_*. Tyto změny se uskutečňují v ekvidistantních časových okamžicích a možné kontrolované polohy jsou ekvidistantně rozloženy po reálné ose. Zavedeme pro jednoduchost kontrolní interval J jako jednotku času, takže čas n bude totéž co n-tá kontrola. Kontrolované polohy μ_* budeme uvažovat v lineární transformaci s počátkem v některé z nich a jednotkou $\Delta\mu_*$, takže možnými kontrolovanými polohami budou právě celá čísla resp. body s celočíselnými souřadnicemi. Pro všechna m celá budeme pak značit β_m hodnotu silofunkce používaného statistického testu v bodě se souřadnicí m. Veličina β_m udává tedy pravděpodobnost regulačního zásahu v kontrolované poloze m, takže proces postupných změn kontrolovaných poloh je popsán homogenním Markovovým řetězcem s pravděpodobnostmi přechodu

$$p_{m,m-u} = \beta_m\,, \quad p_{m,m+t} = 1 - \beta_m \text{ (pro všechna } m \text{ celá)}\,.$$

K odvození výsledného rozdělení regulovaného znaku X je nutno znát pro každé m celé teoretický relativní počet kontrol, při nichž je proces v poloze m, neboli výsledné rozdělení kontrolovaných poloh. Při důkazu existence tohoto rozdělení v odst. 4 se ovšem předpokládá, že posloupnost $\{\beta_m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ je monotonní, neboť kontroly jsou testy hypotézy proti jednostranné alternativě.

4. VÝSLEDNÉ ROZDĚLENÍ KONTROLOVANÝCH POLOH

Pomocná věta: *Jestliže homogenní Markovův řetězec má pravděpodobnosti přechodu*

$$p_{m,m-u} = \beta_m\,, \quad p_{m,m+t} = 1 - \beta_m \quad (m \textit{ celá}) \tag{4}$$

a jestliže existuje stav m_0 a konstanta

$$\beta > \frac{t}{d} \quad (d = t + u)$$

tak, že je

$$\beta_m \geqq \beta \quad pro \quad m > m_0 \quad resp. \quad \beta_m \leqq \beta \quad pro \quad m < m_0\,,$$

pak s pravděpodobností 1 systém nezůstane trvale v množině stavů $> m_0$ resp. $< m_0$ a střední doba výstupu z příslušné množiny stavů při libovolném předpokladu počátečního stavu je konečná.

Důkaz: Z důvodů souměrnosti stačí dokázat pouze tvrzení týkající se výstupu z množiny stavů $> m_0$. Pravděpodobnosti výstupu z této množiny závisí jedině na pravděpodobnostech přechodu p_{ij} pro $i > m_0$ a proto jsme oprávněni zavádět k účelům důkazu pravděpodobnosti p_{ij} pro $i \leqq m_0$ libovolně. Kromě toho můžeme předpokládat $\beta < 1$, neboť při $\beta = 1$ je platnost dokazovaného tvrzení zřejmá.

Předpokládejme nejprve pravděpodobnosti přechodu (4), kde však je $\beta_m = \beta$ pro všechna m. Označíme-li S_n stav systému v čase n, je $S_0 > m_0$ a veličiny $Y_n^0 = (S_n - S_{n-1} + u)/d$ $(n \geqq 1)$, kde značíme $d = t + u$, jsou nezávislé s identickým rozdělením

(5) $$\mathsf{P}\{Y_n^0 = 0\} = \beta\,, \quad \mathsf{P}\{Y_n^0 = 1\} = 1 - \beta\,.$$

Dále označme

$$X_n^0 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^0 = \frac{1}{d}(S_n - S_0 + nu)\,.$$

Pro každé $n \geqq 1$ má tedy X_n^0 binomické rozdělení s parametry n, $1 - \beta$ a tudíž střední hodnotu a čtvrtý centrální moment

$$\mu'_{1,n} = n(1 - \beta)\,, \quad \mu_{4,n} = n^2 c_1 + n c_2\,,$$

kde je $c_1 = 3\beta^2(1 - \beta)^2 > 0$, $c_2 = \beta(1 - \beta)\,[1 - 6\beta(1 - \beta)]$. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ pak platí

$$\mathsf{P}\{|X_n^0 - \mu'_{1,n}| \geqq \varepsilon\} \leqq \frac{\mu_{4,n}}{\varepsilon^4}$$

(odvození analogické jako u Čebyševovy nerovnosti). Budiž N doba prvého výstupu z množiny stavů $> m_0$. Jestliže pro některé n je $N > n$, plyne odtud, že v čase n je systém v množině stavů $> m_0$, tj. $S_n > m_0$ neboli $X_n^0 > (nu + m_0 - S_0)/d$ a odtud pro dostatečně velká n

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\{N > n\} &\leqq \mathsf{P}\left\{X_n^0 > \frac{1}{d}(nu + m_0 - S_0)\right\} \leqq \\ &\leqq \mathsf{P}\{|X_n^0 - \mu'_{1,n}| \geqq n d_1 + d_2\} \leqq \\ &\leqq \frac{n^2 c_1 + n c_2}{(n d_1 + d_2)^4}\,, \end{aligned}$$

kde je $d_1 = \beta - (t/d) > 0$, $d_2 = (m_0 - S_0)/d$. Odtud však plyne jednak $\lim_{n \to +\infty} \mathsf{P}\{N > n\} = 0$, jednak $\mathsf{E}(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathsf{P}\{N > n\} < +\infty$. Tím je věta dokázána pro případ $\beta_m \equiv \beta$.

Nyní předpokládejme opět pravděpodobnosti přechodu (4), kde platí $\beta_m \geqq \beta$ pro všechna m (nikoli tedy jen pro $m > m_0$). Zde budeme značit $Y_n = (S_n - S_{n-1} + u)/d$ a tyto náhodné proměnné vyjádříme ve tvaru součinů $Y_n = Y_n^0 Z_n$, kde všechny náhodné proměnné Y_n^0, Z_n jsou navzájem nezávislé, Y_n^0 mají rozdělení (5) a tedy pro náhodné proměnné Z_n musí platit

$$\mathsf{P}\{Z_n = 1 \mid S_{n-1} = m\} = 1 - \mathsf{P}\{Z_n = 0 \mid S_{n-1} = m\} = \frac{1 - \beta_m}{1 - \beta}\,.$$

Pak je ovšem $0 \leqq Z_n \leqq 1$ a tedy $Y_n = Y_n^0 Z_n \leqq Y_n^0$, $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \leqq \sum_{i=1}^{n} Y_i^0 = X_n^0$ a odtud podle již dokázaného

$$\mathsf{P}\{N > n\} \leqq \mathsf{P}\left\{X_n > \frac{1}{d}(nu + m_0 - S_0)\right\} \leqq \mathsf{P}\left\{X_n^0 > \frac{1}{d}(nu + m_0 - S_0)\right\} \leqq$$
$$\leqq \frac{n^2 c_1 + n c_2}{(n d_1 + d_2)^4},$$

takže věta je správná i v případě $\beta_m \geqq \beta$.

Následující věty, které vyplývají z uvedené pomocné věty, budou mít již bezprostřední význam pro výsledné rozdělení kontrolovaných poloh.

Věta 1: *Nechť u, t jsou přirozená čísla s nejvyšším společným dělitelem 1 a nechť je dána posloupnost $\{\beta_m\}_{m=-\infty}^{+\infty}$, kde je*

$$(6_1) \qquad 0 < \beta_m < \beta_{m+1} < 1 \qquad \textit{pro všechna } m \textit{ celá},$$

$$(6_2) \qquad \lim_{m \to -\infty} \beta_m < \frac{t}{d} < \lim_{m \to +\infty} \beta_m \qquad (d = t + u).$$

Pak je homogenní Markovův řetězec s pravděpodobnostmi přechodu

$$p_{m,m-u} = \beta_m, \quad p_{m,m+t} = 1 - \beta_m \quad (m \textit{ celá})$$

ireducibilní a periodický s periodou d a jeho stavy jsou rekurentní nenulové.

Důkaz: Z předpokladů o číslech u, t snadno plyne, že všechny stavy jsou navzájem sousledné, tj. ireducibilita řetězce, a podobně též tvrzení o periodě d. Stačí tedy jen dokázat, že libovolně zvolený stav řetězce je rekurentní nenulový. Předpokládejme nejprve $u < t$. Podle předpokladů (6) lze provést rozklad množiny stavů na podmnožiny

$$\mathsf{T}_- = \{m : m < a\}, \quad \mathsf{C} = \{m : a \leqq m \leqq b\}, \quad \mathsf{T}_+ = \{m : m > b\},$$

kde a, b jsou celá čísla taková, že je

$$(7) \qquad b = a - 1 + u,$$
$$\beta_{a-1} < \frac{t}{d} < \beta_{b+1}.$$

Jestliže stavy z množiny C jsou transientní, pak vzhledem k jejich konečnému počtu (který je roven $b - a + 1 = u$) musí systém vykonat celou množinou C s pravděpodobností 1 jen konečný počet průchodů. Odtud plyne, že s pravděpodobností 1 systém zůstane trvale ve sjednocení množin T_+, T_-. To však není možné, protože jednak přechod z množiny T_+ do T_- je uskutečnitelný pouze průchodem množinou C, jednak podle pomocné věty systém, který je v některé z množin T_+, T_-, s pravděpodobností 1 v této množině nezůstane trvale. Jsou tedy stavy množiny C (a tedy celého řetězce) rekurentní.

Zbývá dokázat nenulovost stavů řetězce. Zavedeme označení

N_{kl}, N_{kC} čas, v němž systém po průchodu stavem k po prvé dosáhne stavu l resp. kteréhokoli stavu množiny C (pro všechna k, l celá);

N_m^- čas, v němž systém po průchodu stavem $m \in \mathsf{T}_-$ po prvé dosáhne některého stavu mimo množinu T_- (pro všechna $m \in \mathsf{T}_-$);

B_{ij} jev, že vyjde-li systém ze stavu $i \in \mathsf{C}$, vstoupí při následujícím dosažení množiny C do stavu j $(i, j \in \mathsf{C})$;

v_{ij} $= \mathsf{P}\{B_{ij}\}$ $(i, j \in \mathsf{C})$.

Z toho, co již bylo dokázáno, plyne, že N_{kl}, N_{kC}, N_m^- jsou náhodné proměnné a že je $\sum_{j \in C} v_{ij} = 1$ pro všechna $i \in \mathsf{C}$. Proto lze veličiny v_{ij} interpretovat jako pravděpodobnosti přechodu jakéhosi pomocného homogenního Markovova řetězce o u stavech a definovat

M_i doba návratu v pomocném Markovově řetězci do stavu i (pro všechna $i \in \mathsf{C}$).

Jelikož pomocný řetězec je konečný a všechny pravděpodobnosti přechodu v_{ij} jsou v něm zřejmě kladné, je ergodický a je tedy pro každé $i \in \mathsf{C}$

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(M_i) &= v_{ii} + 2 \sum_{\substack{j_1 \in C \\ j_1 \neq i}} v_{ij_1} v_{j_1 i} + \ldots + \\ &+ n \sum_{\substack{j_1 \in C \\ j_1 \neq i}} \ldots \sum_{\substack{j_{n-1} \in C \\ j_{n-1} \neq i}} v_{ij_1} v_{j_1 j_2} \ldots v_{j_{n-1} i} + \ldots < +\infty . \end{aligned} \tag{8}$$

Dále z definice vyplývá $\mathsf{E}(N_{mC}) \leqq \mathsf{E}(N_m^-) + \max_{b < l < a+t} \mathsf{E}(N_{lC})$ pro všechna $m \in \mathsf{T}_-$. Podle pomocné věty je $\mathsf{E}(N_m^-) < +\infty$, $\mathsf{E}(N_{lC}) < +\infty$ pro všechna $m \in \mathsf{T}_-$, $l \in \mathsf{T}_+$ a tedy je $\mathsf{E}(N_{mC}) < +\infty$ též pro všechna $m \in \mathsf{T}_-$. Pro $i \in \mathsf{C}$ odtud plyne

$$\mathsf{E}(N_{iC}) = 1 + \beta_i \mathsf{E}(N_{i-u,C}) + (1 - \beta_i)\, \mathsf{E}(N_{i+t,C}) < +\infty , \tag{9}$$

neboť je $i - u \in \mathsf{T}_-$, $i + t \in \mathsf{T}_+$. Platí však též

$$\mathsf{E}(N_{iC}) = \sum_{j \in C} \mathsf{E}(N_{iC} \mid B_{ij})\, v_{ij} , \tag{10}$$

a protože v_{ij} jsou všechny kladné a množina C je konečná, existuje podle (9) a (10) konstanta $K > 0$ tak, že je

$$\mathsf{E}(N_{iC} \mid B_{ij}) < K \quad \text{pro všechna } i, j \in \mathsf{C} .$$

Odtud konečně vyplývá pro střední dobu návratu do stavu $i \in \mathsf{C}$ s použitím (8)

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(N_{ii}) &= \\ &= \mathsf{E}(N_{iC} \mid B_{ii})\, v_{ii} + \sum_{\substack{j_1 \in C \\ j_1 \neq i}} [\mathsf{E}(N_{iC} \mid B_{ij_1}) + \mathsf{E}(N_{j_1 C} \mid B_{j_1 i})]\, v_{ij_1} v_{j_1 i} + \ldots < \\ &< K v_{ii} + 2K \sum_{\substack{j_1 \in C \\ j_1 \neq i}} v_{ij_1} v_{j_1 i} + \ldots = K \mathsf{E}(M_i) < +\infty , \end{aligned}$$

tzn. stav $i \in \mathsf{C}$ je nenulový. Tím je věta dokázána pro případ $u < t$. Z důvodů souměrnosti platí věta též v případě obrácené nerovnosti $u > t$. Konečně v případě $u = t$ platí $\mathsf{E}(N_{kC}) < +\infty$ pro všechna $k \notin \mathsf{C}$ přímo podle pomocné věty a odtud plyne (9) atd.

Důsledkem věty 1 je

Věta 2: *V řetězci z věty 1 existuje stacionární rozdělení $\{q_{*m}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$, jednoznačně určené soustavou diferenčních rovnic*

$$q_{*m} = (1 - \beta_{m-t})\, q_{*m-t} + \beta_{m+u} q_{*m+u} \quad (m \text{ celá}) \tag{11}$$

s krajovou podmínkou

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} q_{*m} = 1\,. \tag{12}$$

Poznámka: Jestliže podmínky (6_1) rozšíříme tak, že ostré nerovnosti nahradíme neostrými, pak v příslušném řetězci mohou být některé stavy transientní, avšak věta 2 zůstává v platnosti; na některém z konců posloupnosti $\{q_{*m}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ pak ovšem obecně mohou být nulové prvky. Kromě toho při neostrých nerovnostech $\beta_m \leqq \beta_{m+1}$ nebude obecně možné předpokládat existenci čísel a, b splňujících podmínky (7). K důkazu věty 2 je pak nutno příslušným způsobem zobecnit pomocnou větu, což lze snadno provést.

Věta 3: *Rozdělení $\{q_{*m}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ určené vztahy* (11), (12) *má konečné momenty všech řádů.*

Důkaz: Jestliže existují m_0, β taková, že pro $m \geqq m_0 - t$ je $\beta_m = \beta$, pak pro $m \geqq m_0$ je podle (11), (12) $q_{*m} = \sum_{i=1}^{d} c_i x_i^m$, kde c_i, x_i jsou konstanty, $|x_i| < 1$. Dále je zřejmé, že tyto hodnoty q_{*m} jsou klesajícími funkcemi β a konečně že zvýšením některé jednotlivé hodnoty $\beta_{m'}$ $(m' \geqq m_0)$ se sníží zároveň q_{*m} pro všechna $m \geqq m'$ a součet $\sum_{m=m_0}^{+\infty} q_{*m}$. Odtud celkem plyne pro libovolné m_1 celé $\sum_{m=m_1}^{+\infty} m^k q_{*m} < < +\infty$. Z důvodů souměrnosti platí též analogické tvrzení týkající se dolní části posloupnosti $\{q_{*m}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$, takže celkem vychází $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |m|^k q^*_m < +\infty$ pro všechna $k \geqq 0$.

Důsledek: *Rozdělení $\{q_{*m}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ určené vztahy* (11), (12) *splňuje další vztahy*

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} q_{*m+jd} = \frac{1}{d} \quad \textit{pro všechna } m\,, \tag{13}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_m q_{*m} = \frac{t}{d}\,. \tag{14}$$

D ů k a z: 1. Vztah (13) je důsledkem toho, že jde o stacionární rozdělení v řetězci s periodou d. — 2. Podle (6_1), (12) a věty 3 jsou součty $\sum_m m q_{*m}$, $\sum_m \beta_m q_{*m}$ a $\sum_m m \beta_m q_{*m}$ konečné. Proto lze pro každé m rovnici (11) rozšířit číslem m a takto vzniklé rovnice sečíst přes všechna m, odkud plyne (14).

Jestliže silofunkce statistického testu používaného k rozhodování o regulačních zásazích splňuje podmínky (6) — podle poznámky k větě 2 mohou však být nerovnosti (6_1) neostré — pak q_{*m} udává asymptotickou střední četnost dosažení kontrolované polohy m (pro všechna m celá). Posloupnost $\{q_{*m}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ proto nazveme výsledným rozdělením kontrolovaných poloh.

Podle věty 2 je toto rozdělení jednoznačně určeno vztahy (11) a (12). Kromě toho musí splňovat ještě vztahy (13), (14), z nichž zejména vztah (13) je vhodný ke kontrole správnosti a přesnosti numerických výpočtů.

5. FREKVENCE REGULAČNÍCH ZÁSAHŮ

V souhlasu s aplikací vyloženou v odst. 1 rozumíme regulačním zásahem každý přechod ze stavu m do stavu $m - u$ v jednom kroku v procesu popsaném v odst. 3. Obdobně jako výše q_{*m} udávalo asymptotický střední relativní (na 1 kontrolu) počet průchodů systému stavem m, zavedeme zde veličinu

μ_{reg} asymptotická střední frekvence regulačních zásahů,

která je určena následující větou.

Věta 4: *Pro asymptotickou střední frekvenci regulačních zásahů platí zároveň dva vztahy*

$$\mu_{\text{reg}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_m q_{*m}\,, \tag{15}$$

$$\mu_{\text{reg}} = \frac{t}{d}\,. \tag{16}$$

D ů k a z: Zavedeme pro každé n přirozené náhodnou proměnnou

U_n počet regulačních zásahů při n-té kontrole.

Je tedy $\mathsf{P}\{U_n = 1\} = 1 - \mathsf{P}\{U_n = 0\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_m p_m^{(n)}$, kde $p_m^{(n)}$ jsou absolutní pravděpodobnosti v řetězci podle odst. 3. Střední frekvence regulačních zásahů až do n-té kontroly je pak

$$\mu_{\text{reg}}^{(n)} = \frac{1}{n}\,\mathsf{E}\Big(\sum_{j=1}^{n} U_j\Big) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \beta_m \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} p_m^{(j)}$$

a odtud limitním přechodem dostáváme vztah (15). Odtud plyne též vztah (16) podle (14). (Vztah (16) lze též dokázat nezávisle na vztazích (14), (15).)

Frekvenci regulačních zásahů můžeme uvažovat též vzhledem k času průběhu regulovaného procesu. Dostáváme pak asymptotickou střední frekvenci μ^*_{reg}, pro kterou platí podle (16), (3) a (1)

$$\mu^*_{\text{reg}} = \frac{\mu_{\text{reg}}}{J} = \frac{\tau}{d_*},$$

a odtud

$$\tau = d_* \mu^*_{\text{reg}}. \tag{17}$$

Podle vztahu (17) můžeme z průběhu regulovaného procesu činit závěry o směrnici τ výrobního trendu, aniž bychom sledovali časový průběh úrovně seřízení nebo regulovaného znaku (což by bylo nutno při odhadu veličiny τ regresními metodami).

6. VÝSLEDNÁ ROZDĚLENÍ POLOH μ A REGULOVANÉHO ZNAKU X VZTAHY MEZI MOMENTY

Výsledné rozdělení poloh μ odvodíme z výsledného rozdělení kontrolovaných poloh μ_*, které je dáno posloupností $\{q_{*m}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$. Je-li v některém okamžiku kontroly kontrolovaná poloha $\mu_* = m\Delta\mu_*$, je tím za uplynulý kontrolní interval vytvořeno rovnoměrné rozdělení poloh μ v intervalu $(m\Delta\mu_* - t_*, m\Delta\mu_*)$. Toto podmíněné rozdělení pravděpodobností má tedy funkci hustoty pravděpodobnosti $1/t_*$ v uvedeném intervalu. Pro určitou polohu $\mu = y$ (y reálné) musíme ovšem uvažovat všechny intervaly tohoto druhu, které hodnotu y obsahují, tj. pro všechna m taková, že je $m\Delta\mu_* - t_* < y < m\Delta\mu_*$. Tím získáváme výsledné rozdělení poloh μ, popsané funkcí hustoty pravděpodobnosti

$$q(y) = \frac{1}{t_*} \sum_{(y/\Delta\mu_*) < m < (y/\Delta\mu_*) + t} q_{*m} \tag{18}$$

pro všechna y reálná, nerovná celistvým násobkům $\Delta\mu_*$ (na této spočetné množině není $q(y)$ definováno). Je patrno, že v intervalech délky $\Delta\mu_*$ mezi těmito hodnotami je funkce $q(y)$ konstantní.

Regulovaný znak X nechť má při úrovni seřízení v poloze μ rozdělení pravděpodobností, popsané funkcí $f_0(x; \mu)$. Je to tzv. *okamžité* rozdělení regulovaného znaku X, protože podle předpokladů o procesu parametr μ nezůstává v žádném časovém intervalu konstantní. Podle povahy okamžitého rozdělení znamená f_0 buď pravděpodobnost nebo hustotu pravděpodobnosti. V každém případě má však výsledné rozdělení regulovaného znaku X funkci hustoty pravděpodobnosti, pro kterou platí

$$f_v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x; y)\, q(y)\, \mathrm{d}y, \tag{19}$$

kde q je funkce hustoty pravděpodobnosti poloh μ, určená vztahem (18).

Jelikož rozdělení q_* má konečné momenty všech řádů (věta 3), má tuto vlastnost i rozdělení q. Ze vztahu (18) pak plynou příslušné vztahy mezi momenty obou rozdělení. Zejména pro střední hodnoty a rozptyly platí

$$(20) \qquad \mathsf{E}(\mu) = \mathsf{E}(\mu_*) - \frac{t_*}{2},$$

$$\sigma^2(\mu) = \sigma^2(\mu_*) + \frac{t_*^2 - (\Delta\mu_*)^2}{12}.$$

Učiňme dále o okamžitém rozdělení f_0 předpoklad, že jeho střední hodnota je rovna poloze μ a rozptyl σ_0^2 je výrobní parametr, tedy na μ nezávislý a konstantní během celého procesu. Za těchto podmínek platí mezi prvními dvěma momenty výsledného rozdělení f_v a rozdělení poloh q vztahy

$$(21) \qquad \mathsf{E}_v(X) = \mathsf{E}(\mu),$$

$$\sigma_v^2(X) = \sigma^2(\mu) + \sigma_0^2.$$

Podobné vztahy jako (20) a (21) by bylo možno odvodit i pro další momenty, ale v praxi hraje obvykle nejdůležitější roli rozptyl $\sigma_v^2(X)$ neboli *výsledný rozptyl.*

7. POZNÁMKY K OPTIMALISACI PARAMETRŮ REGULACE

Jak plyne z dosavadních úvah, parametry statistické regulace spolu s parametry výrobními jednoznačně určují výsledné rozdělení regulovaného znaku X. Na hodnotách parametrů regulace však na druhé straně závisí též technicko-ekonomická stránka statistické regulace, jak bylo zmíněno v odst. 1. Můžeme proto předpokládat, že ke každé kombinaci hodnot výrobních parametrů lze v praxi přiřazovat vždy určitou kombinaci hodnot parametrů regulace stanovenou např. pomocí vhodných nákladových funkcí tak, aby byla optimální z obou uvedených zřetelů, uvažovaných současně.

Jestliže se během regulovaného procesu mění výrobní parametry a tudíž i optimální úroveň parametrů regulace obecně nezůstává konstantní, lze při automatické regulaci řešit tuto situaci např. tím, že zároveň s vlastní statistickou regulací se provádějí opakované testy výrobních parametrů a podle výsledků testů se automaticky přestavují parametry regulace. Přitom lze k testům směrnice τ výrobního trendu s výhodou použít vztahu (17) a k testům residuálního rozptylu σ_0^2 skupinového testu (viz [3]); oba tyto testy totiž zaručují vysokou úspornost konstrukce automatického zařízení k jejich provádění.

Další směr, jímž lze zlepšit účinnost statistické regulace s konstantním regulačním krokem, je zavedení obecně nekonstantního kontrolního intervalu J jako náhodné proměnné závislé na předchozím průběhu regulovaného procesu. Sem patří např.

procesy, v nichž se po každém regulačním zásahu provádí nová kontrola okamžitě, nebo v nichž kontrolní interval je funkcí hodnoty testovacího kritéria zjištěné při poslední kontrole apod. Vyšetřování všech těchto zobecněných případů statistické regulace bude moci vycházet, podobně jako v této práci, z Markovova řetězce, definovaného tak, aby jím byl popsán proces změn kontrolovaných poloh.

Literatura

[1] ČSN 01 0265 Statistická regulace. Praha 1959.

[2] *Hrabák, Osvald, Režný:* Statistický vyhodnocovací přístroj pro skupinovou metodu prostými výběry. Výzkumná zpráva SVÚTT-58-01022.

[3] *Režný:* Skupinové testy statistických hypotéz podle dvou kontrolních mezí. Aplikace matematiky sv. 4 (1959), č. 4, str. 290—302.

[4] *Feller:* An Introduction to Probability Theory and Its Applications, vol. I, New York 1950

Резюме

СТАТИСТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ДЛЯ МОНОТОННОГО ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ТРЕНДА

ЗДЕНЕК РЕЖНЫЙ (Zdeněk Režný)

Для производственных процессов, в которых проявляется монотонное систематическое влияние (т. н. производственный тренд) предлагается следующий способ статистического регулирования: в постоянных промежутках времени повторяется проверка значимости отклонения производственного признака от требуемой величины в направлении тренда; предполагается при этом, что функция мощности этой проверки известна. В тех случаях, когда проверка обуславливает регулирующее вмешательство, наладка корректируется на постоянную величину (невзирая на истинную величину отклонения). При помощи теории цепей Маркова было выведено окончательное распределение вероятностей регулируемой величины и средней частоты регулирующего вмешательства для случая линейного производственного тренда и постоянной производственной точности. Однако, полученные результаты применимы для оптимального регулирования и при более общих предположениях о производственном процессе.

Summary

STATISTICAL CONTROL WITH CONSTANT MAGNITUDE OF CORRECTION FOR THE CASE OF A ONE-SIDED DRIFT OF PROCESS LEVEL

ZDENĚK REŽNÝ

Production processes characterized by a one-sided drift of process level may be controlled by using the following statistical control method. At constant time intervals a significance test of the deviation of the proces level from the required value is performed; a knowledge of the power function of the test is assumed. If the test results in the decision to take control action, the magnitude of the correction is constant irrespective of the actual value of the deviation. By using Markov chain theory, the resultant probability distribution of the controlled quantity and the mean frequency of adjustment are derived on the assumption of a linear process drift and a constant process accuracy. As indicated. the results may also be used to achieve optimum control even under more general assumptions about the production process.