

Aplikace matematiky

Jiří Gregor

O aproximací obrazu v Hilbertově transformaci ortogonálními řadami racionálních lomených funkcí

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 3, 214–240

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102754>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

O APROXIMACI OBRAZU V HILBERTOVĚ TRANSFORMACI
ORTOGONÁLNÍMI ŘADAMI RACIONÁLNÍCH LOMENÝCH FUNKCÍ

JIRÍ GREGOR

(Došlo dne 13. listopadu 1959.)

Článek je věnován vyšetření jisté třídy racionálních funkcí, zejména jejich užití při aproximaci dané funkce a její Hilbertovy transformace. Výsledků lze použít při řešení některých problémů v elektrotechnice, teorii automatické regulace, aerodynamice (viz cit. na str. 214).

Při řešení řady teoretických a praktických otázek techniky se užívá matematického aparátu integrálních transformací. Někdy je však praktické použití integrální transformace poččetně obtížné. V posledních letech je proto věnována velká pozornost přibližným (aproximačním) metodám těchto transformací.

Jednou z integrálních transformací, která je užívána v elektrotechnice¹⁾, v aerodynamice²⁾ a v některých jiných oborech, je transformace Hilbertova, která je definována vztahem³⁾ (funkci f nazýváme originálem, funkci g obrazem)

$$(I) \quad g(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - y} dx,$$

který budeme stručně zapisovat takto: $g = \mathcal{H}f$.

Otázkám aproximace Hilbertova obrazu byla věnována řada prací. Tyto práce většinou obcházelý některé obtíže přímého vyčíslení obrazu grafickými nebo grafo-analytickými postupy, jejichž použitelnost byla omezena na některé třídy funkcí (např. na funkce sudé nebo na funkce racionální ap.). Kromě toho i přesnost některých těchto metod byla nevelká, odhad přesnosti v praktických případech vyloučen.

V této práci je navržena metoda přibližného stanovení Hilbertova obrazu funkce, která navazuje na některé starší výsledky, citované např. v [4]. Jako aparátu je použito aproximace originálu i obrazu ve smyslu teorie ortogonálních řad.

¹⁾ Viz např. P. FEY, *Die Hilberttransformation in der Nachrichtentechnik*, Nachrichtentechnik, Heft 8, 1956.

²⁾ Viz např. K. NICKEL, *Lösung eines Integralgleichungssystems in der Tragflügeltheorie*, Math. Z., Bd. 54, 1951.

³⁾ Symbolem $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ rozumíme integrál ve smyslu hlavní hodnoty.

K problému Hilbertovy transformace je totiž možné přistoupit také jako k řešení okrajové úlohy. Za jistých předpokladů lze dokázat, že originál a obraz v Hilbertově transformaci je reálnou a imaginární částí hraničních hodnot jisté funkce komplexní proměnné, která je regulární v pravé polorovině a v bodě ∞ . Odtud pak vyplývá souvislost námi vyšetřované otázky s řešením problému Dirichletova.

Z úvah o řešení Dirichletova problému pro jednotkový kruh je známo: jestliže Fourierův rozvoj

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

konverguje podle normy v L^2 k funkci F , pak také sdružený trigonometrický rozvoj

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i \cos ix - a_i \sin ix)$$

konverguje podle normy v L^2 k jisté funkci G a platí

$$F(x) + jG(x) = U(e^{jx}),$$

kde $U(e^{jx})$ je hraniční hodnota funkce $U(z)$ regulární uvnitř jednotkové kružnice. Zdá se tedy, že by stačilo převzít příslušný aparát, tj. aparát Fourierových řad a provést konformní zobrazení jednotkového kruhu na pravou polorovinu. Tento přímý postup naráží na některé obtíže zejména proto, že příslušné konformní zobrazení, tj. na příklad funkce $w = (1 - z)/(1 + z)$ má pól na jednotkové kružnici. Proto také výsledky, které později uvedeme (zejména věta 17 a 21) jsou odlišné od obvyklého tvaru tzv. sdruženého trigonometrického rozvoje.

V první části práce je vyšetřován jistý ortogonální systém racionálních lomených funkcí, který aproximaci Hilbertova obrazu usnadňuje resp. umožňuje a má kromě toho některé další zajímavé vlastnosti. Druhá část práce je věnována vlastního problému aproximace Hilbertova obrazu. V závěru jsou ukázky praktického užití navržené metody, srovnání s jinými metodami a pomůcky pro její praktické použití.

FUNKCE $S_n(x)$ A $C_n(x)$

Uvažujme funkce

$$S_n(x) = \sin(2n \operatorname{arctg} x), \quad C_n(x) = \cos(2n \operatorname{arctg} x)$$

pro $n \geq 0$ celé, které jsou spojité pro všechna x . Ukážeme, že $S_n(x)$ a $C_n(x)$ jsou racionální lomené funkce proměnné x . Pro $n > 0$ platí

$$\begin{aligned} \sin 2n\vartheta &= \binom{2n}{1} \cos^{2n-1}\vartheta \sin \vartheta - \binom{2n}{3} \cos^{2n-3}\vartheta \sin^3 \vartheta + \dots \pm \\ &\pm \binom{2n}{2n-1} \cos \vartheta \sin^{2n-1}\vartheta. \end{aligned}$$

Položíme-li $\vartheta = \operatorname{arctg} x$, pak

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

a tedy

$$\sin(2n \operatorname{arctg} x) = \frac{\binom{2n}{1}x - \binom{2n}{3}x^3 + \dots \pm \binom{2n}{2n-1}x^{2n-1}}{(1+x^2)^n}$$

nebo

$$(2) \quad \sin(2n \operatorname{arctg} x) = \frac{\sum_{k=1}^n \binom{2n}{2k-1} x^{2k-2} (-1)^{k+1}}{(1+x^2)^n}, \quad n \neq 0.$$

Obdobně dostaneme pro $n \neq 0$

$$(3) \quad \cos(2n \operatorname{arctg} x) = \frac{\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} x^{2k} (-1)^k}{(1+x^2)^n}.$$

V dalším můžeme s výhodou použít ještě jednoho tvaru vztahů (2), (3). Můžeme psát

$$\frac{1-jx}{1+jx} = e^{2j\phi},$$

$$\text{kde } \phi = \frac{1}{2j} \ln \frac{1-jx}{1+jx} = -\operatorname{arctg} x$$

(symbolem \ln rozumíme hlavní větev logaritmu).

Pak ale

$$C_n(x) - jS_n(x) = \left(\frac{1-jx}{1+jx} \right)^n$$

a tedy

$$(4) \quad S_n(x) = -\operatorname{Im} \left(\frac{1-jx}{1+jx} \right)^n,$$

$$(5) \quad C_n(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{1-jx}{1+jx} \right)^n.$$

Než přejdeme k podrobnějšímu vyšetřování vlastností funkcí $C_n(x)$ a $S_n(x)$, uvedme jejich vyjádření racionálnímu lomenými funkcemi pro několik prvních hodnot indexu n :

$$S_0(x) = 0,$$

$$C_0(x) = 1,$$

$$S_1(x) = \frac{2x}{1+x^2},$$

$$C_1(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2},$$

$$S_2(x) = \frac{4x - 4x^3}{(1+x^2)^2},$$

$$C_2(x) = \frac{1 - 6x^2 + x^4}{(1+x^2)^2}.$$

Věta 1. Necht' posloupnosti spojitych funkcí $\{c_n(x)\}$ a $\{s_n(x)\}$, $n > 0$, vyhovují vztahům (pro přehlednost vypouštíme argument x):

$$(6) \quad \begin{aligned} c_{n+1} + c_{n-1} &= 2c_1 c_n, & s_{n+1} + s_{n-1} &= 2c_1 s_n, \\ c_{n+1} - c_{n-1} &= -2s_1 s_n, & s_{n+1} - s_{n-1} &= 2s_1 c_n, \\ c_1 &= \frac{1-x^2}{1+x^2}, & s_1 &= \frac{2x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Pak $s_n(x) \equiv S_n(x)$ a $c_n(x) \equiv C_n(x)$.

D ů k a z: Znásobíme-li druhé dvě rovnice vztahů (6) číslem j a přičteme k prvním dvěma, dostaneme po úpravě:

$$(*) \quad c_{n+1} + js_{n+1} = (c_1 + js_1)(c_n + js_n).$$

Jelikož $|c_1 + js_1| = 1$, jest také $|c_n + js_n| = 1$, o čemž je snadné se přesvědčit na základě rovnice (*) úplnou indukcí. Existují tedy funkce ϕ_n takové, že platí pro všechna $n > 0$ celá

$$(**) \quad c_n + js_n = e^{j\phi_n}.$$

Ze vztahu (*) pak plyne

$$e^{j\phi_{n+1}} = e^{j\phi_1} e^{j\phi_n}$$

a tedy

$$\phi_{n+1} = \phi_1 + \phi_n + 2k\pi,$$

kde k je vhodné celé číslo.

Odtud dostáváme

$$\phi_n = n\phi_1 + 2k\pi.$$

Funkci ϕ_1 najdeme ze vztahu

$$\phi_1 = \frac{1}{j} \ln(c_1 + js_1) = \frac{1}{j} \ln \frac{1+jx}{1-jx} = 2 \operatorname{arctg} x,$$

kde \ln je opět hlavní větev logaritmu.

Na základě (**) však odtud dostáváme

$$c_n(x) = \cos(2n \operatorname{arctg} x), \quad s_n = \sin(2n \operatorname{arctg} x),$$

což jsme měli dokázat.

P o z n á m k a: Položíme-li $s_0 = 0$ a $c_0 = 1$, můžeme v rekurentních vztazích věty 1 opustit předpoklad $n > 0$, aniž bychom narušili jejich platnost.

Věta 2. Jestliže pro funkci $c_n(x)$, $n > 0$, platí (determinant je n -řádkový)

$$(7) \quad c_n(x) = \begin{vmatrix} C_1(x); & 1; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0 \\ 1; & 2C_1(x); & 1; & \dots; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 2C_1(x); & \dots; & 0; & 0; & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0; & 0; & 0; & \dots; & 1; & 2C_1(x); & 1 \\ 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 1; & 2C_1(x) \end{vmatrix} (n)$$

kde $C_1(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. pak $c_n(x) \equiv C_n(x)$.

Důkaz: Pro $n = 1$ je tvrzení splněno. Pro $n = 2$ platí

$$c_2(x) = 2C_1^2(x) - 1.$$

Rozvineme-li n -řádkový determinant (7) podle prvků posledního řádku, dostáváme vztah

$$c_n(x) = 2C_1(x) c_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} C_1; & 1; & 0; & \dots; & 0; & 0; & 0 \\ 1; & 2C_1; & 1; & \dots; & 0; & 0; & 0 \\ 0; & 1; & 2C_1; & \dots; & 0; & 0; & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0; & 0; & 0; & \dots; & 1; & 2C_1; & 0 \\ 0; & 0; & 0; & \dots; & 0; & 1; & 1 \end{vmatrix} (n-1)$$

(argument x jsme pro přehlednost vypustili).

Rozvineme-li však tento determinant podle prvků posledního sloupce, dostaneme pro jeho hodnotu výraz $c_{n-2}(x)$ a tedy lze rovnici upravit na tvar

$$c_n(x) = 2C_1(x) c_{n-1}(x) - c_{n-2}(x),$$

což je první z rekurentních vztahů ve větě 1. $C_1(x)$ je podle předpokladu spojitá pro všechna x a tedy i $c_n(x)$ je spojitá pro všechna x . Jelikož $c_2(x) \equiv C_2(x)$, je tím tvrzení dokázáno.

Poznámka: Jak vyplývá z obecné teorie determinantů tohoto typu⁴), je možné ukázat souvislost výrazu $[C_n(x)]/[C_{n-1}(x)]$ s jistým řetězovým zlomkem, která se opírá o větu 2. Příslušný vztah je tvaru (pro všechna x , pro která je $C_{n-1}(x) \neq 0$),

$$\frac{C_n(x)}{C_{n-1}(x)} = \left(2C_1(x) - \frac{1}{|2C_1(x)} - \frac{1}{|2C_1(x)} - \dots - \frac{1}{|2C_1(x)} \right)_{n \text{ krát}}, \quad n > 1.$$

Jeho důkaz je snadný a nebudeme jej uvádět.

Až dosud jsme definovali funkce $C_n(x)$ a $S_n(x)$ čtyřmi ekvivalentními způsoby s využitím souvislostí v podstatě algebraických. Ukážeme nyní další možnosti.

⁴) Viz např. G. KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie*, Leipzig 1909, str. 153.

Věta 3. Funkce $C_n(x)$ a $S_n(x)$, $n \neq 0$, tvoří fundamentální systém řešení lineární diferenciální rovnice

$$(8) \quad (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + 4n^2 y = 0, \quad n \neq 0.$$

Důkaz: Především se snadno přesvědčíme, že funkce $C_n(x)$ a $S_n(x)$ vyhovují diferenciální rovnici (8). Upravíme ji na tvar

$$[(1+x^2)y']' + \frac{4n^2 y}{1+x^2} = 0.$$

Položíme-li $y = C_n(x)$, pak $y' = -(2n)S_n(x)/(1+x^2)$ a po dosazení dostáváme identitu. Obdobně můžeme postupovat, ověřujeme-li, že funkce $y = S_n(x)$ je řešením rovnice (8). Zbývá dokázat lineární nezávislost obou řešení. Avšak lineární nezávislost funkcí $C_n(x)$ a $S_n(x)$ plyne bezprostředně z lineární nezávislosti funkcí $\sin t$ a $\cos t$. Funkce $C_n(x)$ a $S_n(x)$ jsou tedy dvě lineárně nezávislá řešení diferenciální rovnice (8), což jsme měli dokázat.

ORTOGONALITA SYSTÉMU A DALŠÍ VLASTNOSTI FUNKCÍ $C_n(x)$ A $S_n(x)$

Věta 4. Systém funkcí $\{C_n(x); S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je ortogonální na intervalu $(-\infty; +\infty)$

s vahou $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Pro normu funkcí⁵⁾ $C_n(x)$ a $S_n(x)$ platí $\|C_n\| = \|S_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pro $n \neq 0$, $\|C_0\| = \sqrt{\pi}$.

Důkaz: Máme dokázat, že pro všechna n a m , která nejsou současně rovna 0, platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_n(x) S_m(x) \frac{dx}{1+x^2} = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_n(x) C_m(x) \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(x) S_m(x) \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ \pi/2 & \text{pro } n = m \neq 0 \end{cases}.$$

Především je zřejmé, že všechny tyto nevlastní integrály konvergují, neboť $|S_n(x)| \leq 1$ a $|C_n(x)| \leq 1$ pro všechna n a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ konverguje. Dále je zřejmá nulovost prvního integrálu, neboť integrand je funkce lichá. Ve zbývajících dvou integrálech zavedme substituci $\arctg x = t$ a dostaneme

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2nt \cos 2mt \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2nt \sin 2mt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ \pi/2 & \text{pro } n = m \neq 0, \end{cases}$$

což jsme měli dokázat. Tvrzení o normě funkce $C_0(x)$ je zřejmé.

⁵⁾ Poznamenejme, že zde i v dalším normu funkce f definujeme vztahem

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^2(x)}{1+x^2} dx.$$

Poznámka: Systém funkcí $\{C_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ a systém funkcí $\{S_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ je zřejmě také ortogonálním systémem funkcí na intervalu $(-\infty; +\infty)$ s vahou $\rho(x) = 1/(1+x^2)$.

Věta 5. Funkce $C_n(x)$, $n \neq 0$, vyhovuje vztahu

$$(9) \quad C_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{(1+x^2)^n}{(2n-1)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \ln \sqrt{1+x^2}.$$

Důkaz: Platí

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \ln(1+x^2) = \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \frac{2x}{1+x^2}$$

a dále

$$\frac{2x}{1+x^2} = j \left(\frac{1}{1+jx} - \frac{1}{1-jx} \right).$$

Odtud

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \frac{2x}{1+x^2} &= -j \frac{j^{2n-1}(2n-1)!}{(1+jx)^{2n}} + j \frac{(-j)^{2n-1}(2n-1)!}{(1-jx)^{2n}} = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^n} \cdot 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1-jx}{1+jx} \right)^n. \end{aligned}$$

Tedy

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \ln(1+x^2) = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^n} C_n(x),$$

což dává požadovaný výsledek.

Poznámka: Vztah (9) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{dx^{2n-1}}{d^{2n}} S_1(x) = (-1)^{n+1} \frac{2(2n-1)! C_n(x)}{(1+x^2)^n}.$$

Věta 6. Funkce $S_n(x)$, $n \neq 0$, vyhovuje vztahu

$$(10) \quad S_n(x) = (-1)^n \frac{(1+x^2)^n}{(2n-1)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \operatorname{arctg} x.$$

Důkaz: Uvažujme opět

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \operatorname{arctg} x &= \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} \frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} \left(\frac{1}{1-jx} + \frac{1}{1+jx} \right) = \\ &= (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^n} \operatorname{Im} \left(\frac{1-jx}{1+jx} \right)^n, \end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \operatorname{arctg} x = (-1)^n \frac{(2n-1)!}{(1+x^2)^n} S_n(x).$$

Odtud požadovaný výsledek.

Poznámka 1: Vztah (10) lze zapsat ve tvaru

$$\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}} C_1(x) = (-1)^n \frac{2 \cdot (2n-1)! S_n(x)}{(1+x^2)^n}.$$

Poznámka 2: Vztahy (9), (10) jsou analogiemi tzv. vztahů Rodriquezových, jejichž obecné odvození pro dostatečně širokou třídu ortogonálních polynomů je podáno (zdá se poprvé) v knize [6]. Ačkoliv zde jsou tyto vztahy formulovány pro systém racionálních lomených funkcí, jsou výsledky a postup úvah v mnohém analogické.

Věta 7. Pro všechna x a pro $|t| < 1$ platí vztah

$$w_1(x, t) = \frac{1 - tC_1(x)}{1 - 2tC_1(x) + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) t^n,$$

a tedy $w_1(x, t)$ je vytvářející funkcí systému $\{C_n(x)\}$.

Důkaz: Uvažujme funkce $C_n(x)$ ve tvaru (4)

$$C_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1-jx}{1+jx} \right)^n + \left(\frac{1+jx}{1-jx} \right)^n \right].$$

Pro $|t| < 1$ dostaneme

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) t^n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - t \frac{1-jx}{1+jx}} + \frac{1}{1 - t \frac{1+jx}{1-jx}} \right],$$

neboť $|(1-jx)/(1+jx)| = 1$ pro všechna x .

Po úpravě plyne z (*) vztah

$$w_1(x, t) = \frac{1 - t + x^2(1+t)}{(1-t)^2 + x^2(1+t)^2} = \frac{1 - tC_1(x)}{1 - 2tC_1(x) + t^2},$$

což jsme měli dokázat.

Věta 8. Pro všechna x a pro $|t| < 1$ platí vztah

$$w_2(x, t) = \frac{S_1(x)t}{1 - 2tC_1(x) + t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(x) t^n,$$

a tedy $w_2(x, t)$ je vytvářející funkcí systému $\{S_n(x)\}$.

Důkaz: Uvažujme $S_n(x)$ ve tvaru

$$S_n(x) = \frac{j}{2} \left[\left(\frac{1-jx}{1+jx} \right)^n - \left(\frac{1+jx}{1-jx} \right)^n \right].$$

Pro $|t| < 1$ dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n(x) t^n = \frac{j}{2} \left[\frac{\frac{1-jx}{1+jx} t}{1 - t \frac{1-jx}{1+jx}} - \frac{\frac{1+jx}{1-jx} t}{1 - t \frac{1+jx}{1-jx}} \right]$$

a po úpravě

$$w_2(x, t) = \frac{2xt}{(1+x^2) - 2t(1-x^2) + t^2(1+x^2)},$$

což dává hledaný výsledek.

FOURIEROVA ŘADA V SYSTÉMU FUNKCÍ $\{C_n(x); S_n(x)\}$

Řada $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \phi_i(x)$, kde ϕ_i jsou funkce, tvořící ortogonální systém na jistém intervalu (T) a konstanty α_i jsou definovány vztahem

$$\alpha_i = \frac{1}{\|\phi_i\|^2} \int_{(T)} f(x) \phi_i(x) w(x) dx,$$

kde $\|\phi_i\|$ je norma funkcí systému a $w(x)$ jeho váha, se obvykle nazývá Fourierovou řadou funkce f v ortogonálním systému $\{\phi_i\}$.

Budeme se zabývat řadou

$$(11) \quad \sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i C_i(x) + \beta_i S_i(x)],$$

kde koeficienty α_i a β_i jsou definovány vztahy

$$(11a) \quad \alpha_i = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) C_i(x) \frac{dx}{1+x^2}, \quad i \neq 0; \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\beta_i = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) S_i(x) \frac{dx}{1+x^2}.$$

Pro stručnost ji budeme nazývat (ač tento název není zcela důsledný) C – rozvojem funkce f a koeficienty α_i resp. β_i – C_i resp. S_i koeficienty této funkce. Především platí:

Věta 9. C_i resp. S_i koeficienty funkce $f(x)$ jsou shodné s kosinovými resp. sinovými Fourierovými koeficienty funkce $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ v trigonometrickém systému na intervalu $(-\pi; \pi)$.

Důkaz: Stačí např. v prvním integrálu zavést substituci $x = \operatorname{tg} \frac{1}{2}t$ a dostaneme ($i \neq 0$)

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t) \cos it dt,$$

což je požadovaný výsledek. Pro druhý integrál je úvaha stejná.

Poznámka: Pro koeficient α_0 dostaneme

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t) dt.$$

Základní otázkou je samozřejmě otázka konvergence řady (11). Množinu funkcí f , pro které konverguje integrál

$$(12) \quad \|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^2(x)}{1+x^2} dx \right)^{1/2},$$

budeme nazývat prostorem H a číslo $\|f\|$ nazveme normou funkce f v tomto prostoru. Později dokážeme, že systém funkcí $\{C_n(x); S_n(x)\}$ s vahou $\rho(x) = 1/(1+x^2)$ je uzavřený v H . Podle známé věty je tedy také úplný v H a platí

Věta 10. *Jestliže $f \in H$, pak řada (11) s koeficienty (11a) konverguje podle normy v H k funkci f .*

Této věty budeme v dalším používat. Zastavíme se na tomto místě ještě u otázky stejnoměrné konvergence řady (11). Její řešení je usnadněno platností tohoto pomocného tvrzení:

Nechť funkce $f(x)$ je v intervalu $(-\infty; +\infty)$ po částech spojitá zároveň se svojí derivací⁶⁾ a nechť dále existují konečné limity $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Pak trigonometrický rozvoj funkce $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném intervalu, který je částí intervalu $(-\pi; \pi)$ a ve kterém je funkce $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ spojitá.

Především je zřejmé, že vztah $x = \operatorname{tg} \frac{1}{2}t$ zprostředkuje vzájemně jednoznačné, spojitě zobrazení intervalu $(-\pi; \pi)$ na celou číselnou osu. Funkce $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ je tedy zároveň se svojí derivací po částech spojitá v intervalu $(-\pi; \pi)$. Jelikož existují (vlastní) limity $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, existují také limity $\lim_{t \rightarrow -\pi+} f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ a $\lim_{t \rightarrow \pi-} f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ a tedy $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ vyhovuje v celém uzavřeném intervalu podmínkám Dirichletovým⁷⁾. Její trigonometrický rozvoj tedy konverguje stejnoměrně v každém uzavřeném subintervalu, ve kterém je funkce $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ spojitá.

Věta 10a. *Jestliže funkce $f(x)$ je zároveň se svojí derivací po částech spojitá v intervalu $(-\infty; +\infty)$ a existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, pak její C – rozvoj konverguje stejnoměrně na každém uzavřeném intervalu spojitosti $f(x)$ a její derivace.*

Poznámka: Pomocné tvrzení i větu 10 lze dále zobecnit.

NULOVÉ BODY A EXTRÉMY FUNKCÍ $C_n(x)$ A $S_n(x)$

Budeme se nyní blíže zabývat průběhem funkcí $C_n(x)$ a $S_n(x)$. Především je zřejmé, že funkce $C_n(x)$ a $S_n(x)$ jsou funkce spojitě pro všechna x , ohraničené (platí $|S_n(x)| \leq$

⁶⁾ Předpokládáme, že počet bodů nespojitosti funkce f a její derivace je konečný na intervalu $(-\infty; +\infty)$.

⁷⁾ Viz např. М. К. Гребенча, С. И. Новоселов, Курс математического анализа, Т. 2., Учпедгиз, Москва 1953, стр. 350.

≤ 1 , $|C_n(x)| \leq 1$) se spojitou a ohraničenou derivací (platí $|S'_n(x)| \leq 2n$, $|C'_n(x)| \leq \leq 2n$). Funkce $S_n(x)$ jsou liché, funkce $C_n(x)$ jsou sudé. Pro všechna n platí

$$S_n(0) = 0, \quad C_n(0) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} S_n(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C_n(x) = (-1)^n; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x S_n(x) = (-1)^{n+1} 2n.$$

Dále:

Věta 11. Funkce $S_n(x)$ má $2n - 1$ jednoduchých nulových bodů v bodech

$$x_k^{(s)} = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1).$$

Funkce $C_n(x)$ má $2n$ jednoduchých nulových bodů v bodech

$$x_k^{(e)} = \operatorname{tg} \frac{(2k+1)\pi}{4n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(n-1), -n.$$

Důkaz této věty plyne bezprostředně z definice.

Věta 12. Nulové body funkcí $\frac{S_n(x)}{C_n(x)}$ jsou body extrémů funkcí $\frac{C_n(x)}{S_n(x)}$.

Důkaz provedeme např. pro funkce $S_n(x)$. Ze vztahu

$$C'_n(x) = \frac{2n}{1+x^2} S_n(x)$$

plyne, že nulové body funkcí $S_n(x)$ jsou stacionárními body funkcí $C_n(x)$. Z diferenciální rovnice (8) pak pro funkce $C_n(x)$ v těchto bodech dostáváme

$$(1+x_0^2) C_n''(x_0) + 4n^2 C_n(x_0) = 0,$$

a tedy $C_n''(x_0) \neq 0$, neboť $C_n(x_0) \neq 0$. Tím je jedno z tvrzení věty dokázáno. Důkaz druhého je analogický.

Diferenciální rovnice (8) splňuje podmínky věty Sturmovy⁸⁾ a $C_n(x)$ a $S_n(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení této rovnice; proto lze větu 11 formulovat též takto:

Věta 12a. Mezi každými dvěma sousedními nulovými body funkce $\frac{S_n(x)}{C_n(x)}$ leží právě jeden nulový bod funkce $\frac{C_n(x)}{S_n(x)}$.

V teorii ortogonálních polynomů se dokazuje věta: Necht $p_n(x)$ tvoří ortogonální systém polynomů v intervalu $[a, b]$ s vahou $\rho(x)$. Pak mezi dvěma sousedními nulovými body polynomu $p_n(x)$ leží právě jeden nulový bod polynomu $p_{n+1}(x)$ a aspoň jeden nulový bod polynomu $p_m(x)$, $m > n$.⁹⁾

Pro vyšetřované systémy racionálních lomených funkcí dokážeme více:

⁸⁾ Viz např. В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Москва 1953, str. 252.

⁹⁾ Viz SZEGÖ G., *Orthogonal polynomials*, str. 45.

Věta 13. Počet nulových bodů μ funkce $S_m(x)$, které leží mezi dvěma sousedními nulovými body funkce $S_n(x)$, $m > n$, vyhovuje nerovnosti

$$p - 1 \leq \mu \leq p + 1,$$

kde $p = m \pmod{n}$.

Důkaz: Pro nulové body funkce $S_n(x)$ a $S_m(x)$ musí podle znění věty 11 platit

$$\operatorname{tg} \frac{k\pi}{2n} < \operatorname{tg} \frac{r\pi}{2m} < \operatorname{tg} \frac{(k+1)\pi}{2n},$$

kde k, r jsou čísla celá, vyhovující nerovnostem $|k+1| < n$, $|r| < m$, m a n jsou čísla přirozená. Jelikož $\operatorname{tg} x$ je funkce rostoucí, je tato nerovnost ekvivalentní s nerovností

$$\frac{k}{n} < \frac{r}{m} < \frac{k+1}{n}.$$

Máme dokázat, že pro daná m a n a libovolná celá k , vyhovující nerovnosti $|k+1| < n$, má tato nerovnost pro r právě μ celočíselných řešení, neboli, že v intervalu délky m/n obsažený počet celých čísel vyhovuje nerovnosti, uvedené ve znění věty. Položíme-li $m = pn + \alpha$, kde p je číslo přirozené a $\alpha < n$, můžeme rozeznávat dva případy:

- $\alpha = 0$: otevřený interval délky p obsahuje $p - 1$ nebo p celých čísel;
- $\alpha \neq 0$: otevřený interval délky $p + (\alpha/n)$ obsahuje p nebo $p + 1$ celých čísel.

Tím je věta dokázána.

Poznámka: Jestliže $p = 1$, pak pro $m > n$ je nutně $\alpha \neq 0$ a tedy $1 \leq \mu \leq 2$. Větu 13 můžeme tedy vyslovit v podstatně oslabeném tvaru takto: Pro $m > n$ leží mezi dvěma sousedními nulovými body funkce $S_n(x)$ alespoň jeden nulový bod funkce $S_m(x)$.

Ve zvláštním případě pro $m = n + 1$ jest $\alpha = 1$ a $p = 1$: dostáváme pro $n > 2$ tvrzení (věta 14), které není obtížné rozšířit na všechna $\alpha < \frac{1}{2}n$.

Věta 14. Mezi dvěma sousedními nulovými body funkce $S_n(x)$, $n > 2$, leží právě jeden nulový bod funkce $S_{n+1}(x)$.

Důkaz: Stačí dokázat, že počet nulových bodů funkce $S_{n+1}(x)$ mezi dvěma sousedními nulovými body funkce $S_n(x)$ nemůže být roven dvěma (viz poznámku k větě 13). Nechť x_k a x_{k+1} jsou dva sousední nulové body funkce $S_n(x)$. Podle vztahů (6) platí

$$S_{n+1}(x) = C_1(x) S_n(x) + S_1(x) C_n(x)$$

a tedy vzhledem k větě 11 a vzhledem k tomu, že extrémní hodnota funkce $C_n(x)$ je rovna ± 1 , platí dále ($S_n(x_k) = 0$)

$$|S_{n+1}(x_k)| = |S_1(x_k)|.$$

Odtud po úpravě dostaneme

$$S_{n+1}(x_k) S_{n+1}(x_{k+1}) = - \sin \frac{k\pi}{n} \sin \frac{(k+1)\pi}{n}$$

a tedy pro $n > 2$ jest

$$S_{n+1}(x_k) S_{n+1}(x_{k+1}) < 0,$$

neboť $|k+1| < n$. Počet nulových bodů funkce $S_{n+1}(x)$ v intervalu (x_k, x_{k+1}) je tedy lichý. Tím je věta dokázána.

Snadno lze dále dokázat tuto větu (její důkaz vypouštíme):

Věta 15. *Funkce $S_n(x)$ a $S_m(x)$ mají právě $2r+1$ společných nulových bodů: r je počet netriviálních společných dělitelů čísel m a n .*

Analogická tvrzení lze dokázat pro funkce $C_n(x)$.

INTEGRÁLNÍ VZTAHY MEZI FUNKCEMI $C_n(x)$ A $S_n(x)$ A TRANSFORMACE HILBERTOVA

Abychom odvodili v dalším důležitý integrální vztah mezi funkcemi $C_n(x)$ a $S_n(x)$ zabývejme se hodnotou integrálu

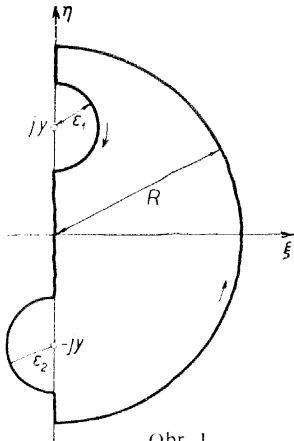
$$I = 2jy \int_C \frac{f(z)}{z^2 + y^2} dz,$$

kde $f(z) = [(1-z)/(1+z)]^n$, $z = \xi + j\eta$ a C je po částech hladká, jednoduchá, uzavřená křivka podle obrázku (obr. 1), poloměry ε_i a R polokružnic splňují nerovnosti $\varepsilon_i < \frac{1}{2}|y|$, $R > |y| + \varepsilon_i$, $i = 1, 2$, integrujeme ve směru šipky. Použijeme-li residuové věty, dostaneme

$$I = 2\pi j \cdot 2jy \operatorname{res}_{z=-jy} \frac{f(z)}{z^2 + y^2} = -2\pi j f(-jy) = -2\pi j [C_n(y) + jS_n(y)].$$

Vypočteme nyní integrály po půlkružnicích $K_1: |z - jy| = \varepsilon_1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$ a $K_2: |z + jy| = \varepsilon_2$, $\operatorname{Re} z \leq 0$. Doplňme-li nejprve polokružnici K_1 na celou kružnici, pak bude zřejmě platit (vzhledem k volbě ε_1):

$$\begin{aligned} 2jy \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(z)}{z^2 + y^2} dz &= \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(z)}{z - jy} dz - \\ &- \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(z)}{z + jy} dz = 2\pi j f(jy), \end{aligned}$$



Obr. 1.

neboť $\oint_{\varepsilon_1} f(z)/(z + jy) dz = 0$. Pro první integrál pak dostaneme, položíme-li $z - jy = \varepsilon_1 e^{j\vartheta}$:

$$\begin{aligned} \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(z)}{z - jy} dz &= \\ &= j \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(\varepsilon_1 e^{j\vartheta} + jy) d\vartheta + j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varepsilon_1 e^{j\vartheta} + jy) d\vartheta. \end{aligned}$$

Ze spojitosti funkce $f(z)$ plyne: pro $z \rightarrow jy$ jest $f(z) = f(jy) + \delta$, kde pro funkci δ platí $\lim_{z \rightarrow jy} \delta = 0$. Dostáváme tak vztah:

$$2\pi j f(jy) = j \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (f(jy) + \delta) d\vartheta + j \int_{\pi/2}^{\pi/2} f(\varepsilon_1 e^{j\vartheta} + jy) d\vartheta,$$

a tedy pro integrál po pravé polokružnici (podle obr. 1 ve směru šipky) po provedení příslušného limitního přechodu platí

$$2jy \int_{\varepsilon_1} \frac{f(z)}{z^2 + y^2} dz = -\pi j f(jy).$$

Obdobně pro integrál po levé dolní polokružnici (opět podle obr. 1)

$$2jy \int_{\varepsilon_2} \frac{f(z)}{z^2 + y^2} dz = -\pi j f(-jy).$$

Pro integrál po polokružnici s poloměrem $R > |y + \varepsilon_i|$ dostaneme pomocí odhadu ($\operatorname{Re} z \geq 0, R > |y|$)

$$\left| \frac{f(z)}{z^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{|z^2 + y^2|} \leq \frac{1}{R^2 - y^2}$$

výsledek

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0.$$

Konečně pro zbývající část integrační dráhy můžeme psát ($i = 1, 2$)

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon_i \rightarrow 0}} I_N = 2jy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(j\eta)}{y^2 - \eta^2} j d\eta = 2y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(\eta) - jS_n(\eta)}{y^2 - \eta^2} d\eta = 2y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(\eta)}{y^2 - \eta^2} d\eta$$

vzhledem k tomu, že funkce $S_n(\eta)$ je lichá (integrály vesměs ve smyslu hlavní hodnoty, viz pozn. na str. 214).

Shrňme nyní výsledky:

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon_i \rightarrow 0}} I = -2\pi j [C_n(y) + jS_n(y)],$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon_i \rightarrow 0}} I = -\pi j [f(jy) + f(-jy)] + 2y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(\eta)}{y^2 - \eta^2} d\eta.$$

Srovnáním obou rovnic dostáváme

$$\pi S_n(y) = -2y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(\eta)}{\eta^2 - y^2} d\eta.$$

Uvážíme-li, že platí

$$\frac{2y}{\eta^2 - y^2} = \frac{1}{\eta - y} - \frac{1}{\eta + y}$$

a dále

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(\eta)}{\eta + y} d\eta = - \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(\eta)}{\eta - y} d\eta,$$

dostaneme vztah

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(\eta)}{\eta - y} d\eta = - \pi S_n(y).$$

Vzhledem k definici Hilbertovy transformace (1) tedy platí

Věta 16. Platí vztah

$$(13) \quad \mathcal{H}C_n = - S_n.$$

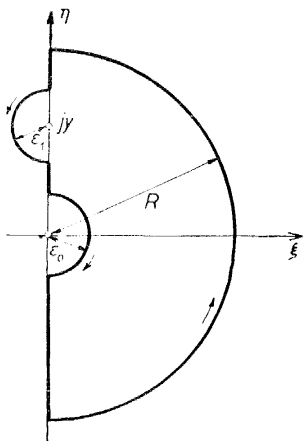
Analogický výsledek dostaneme, vyšetříme-li hodnotu integrálu

$$I = jy \int_C \frac{f(z)}{z(z - jy)} dz,$$

kde opět $f(z) = [(1 - z)/(1 + z)]^n$, $z = \xi + j\eta$ a C je uzavřená, jednoduchá, po částech hladká křivka podle obr. 2; $\varepsilon_0 < \frac{1}{2}|y|$, $\varepsilon_+ < \frac{1}{2}|y|$, $R > |y + \varepsilon_+$.

Podle residuové věty platí

$$I = - 2\pi y \operatorname{res}_{z=jy} \frac{f(z)}{z(z - jy)} = 2\pi j [C_n(y) - jS_n(y)].$$



Obr. 2.

Jelikož

$$I = \int_C \frac{f(z)}{z - jy} dz - \int_C \frac{f(z)}{z} dz = \int_C \frac{f(z)}{z - jy} dz$$

a (viz předchozí důkaz)

$$\lim_{\varepsilon_+ \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_+} \frac{f(z)}{z - jy} dz = \pi j f(jy)$$

a kromě toho na kružnici $z = R e^{j\phi}$, $R > |y + \varepsilon_+|$

$$\left| \frac{f(z)}{z(z - jy)} \right| \leq \frac{1}{R(R - |y|)},$$

zbývá již jen vyčíslit integrál po polokružnici $z = \varepsilon_0 e^{j\phi}$ ve směru, vyznačeném na obr. 2 šipkou. Obdobně jako v předchozím případě dostaneme pro tento integrál výsledek

$$jy \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_0} \frac{f(z)}{z(z - jy)} dz = \pi j.$$

Integrál po imaginární ose můžeme považovat po provedení příslušného limitního přechodu za

$$\begin{aligned} -y \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{f(j\eta)}{j\eta(j\eta - y)} d\eta &= -y \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(j\eta)}{\eta(\eta - y)} d\eta = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(j\eta)}{\eta - y} d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(j\eta)}{\eta} d\eta, \end{aligned}$$

jelikož oba integrály na pravé straně existují ve smyslu hlavní hodnoty. Uvážíme-li že tímto limitním přechodem není narušena platnost výsledku, který jsme pro hledaný integrál získali použitím residuové věty, dostáváme vztah

$$2\pi j [C_n(y) - jS_n(y)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(j\eta)}{\eta - y} d\eta + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(j\eta)}{\eta} d\eta + \pi j [C_n(y) - jS_n(y)] + \pi j$$

a odtud srovnáním reálných a imaginárních částí na obou stranách rovnice dostáváme (kromě vztahu z věty 16)

$$\pi C_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_n(\eta)}{\eta - y} d\eta - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_n(y)}{y} dy + \pi.$$

Pro druhý integrál jest

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_n(y)}{y} dy = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx.$$

Uvažujme nyní $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$, pak

$$\frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \cos 2ix$$

a tedy

$$2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(2k-1)x}{\sin x} dx = 2\pi + 4 \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^{\pi} \cos 2ix dx = 2\pi.$$

Pro $n = 2k$, $k = 1, 2, \dots$, jest

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kx}{\sin x} dx &= \int_0^{\pi} (2k \cos^{2k-1} x - \binom{2k}{3} \cos^{2k-3} x \sin^2 x + \dots \pm \\ &\pm \binom{2k}{2k-1} \cos x \sin^{2k-2} x) dx, \end{aligned}$$

což po úpravě dává jistý součet integrálů, které jsou vesměs typu $\int_0^{\pi} \cos^{2m-1} x dx$. Všechny tyto integrály jsou ale rovny nule. Odtud závěr:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_n(y)}{y} dy = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudá} \\ 2\pi & \text{pro } n \text{ lichá.} \end{cases}$$

K větě 16 tedy platí analogická

Věta 17. Platí vztah

$$(14) \quad \mathcal{H} S_n = C_n + (-1)^{n+1}.$$

Poznámka: Pro transformaci Hilbertovu se uvádí tvrzení: Je-li $\mathcal{H}f = g$ pak $\mathcal{H}g = -f$. Toto tvrzení není v našem případě splněno, neboť není ani v této podobě správné. Uvádí jej tak např. [2] a zapomíná podotýkat, že platí pouze pro funkce $f \in L^2(-\infty; +\infty)^{10}$. Není např. splněno pro konstantu, neboť $\mathcal{H}1 = 0$.

Z věty 16 nyní snadno odvodíme platnost vztahů ($n \neq 0$)

$$(15) \quad \mathcal{H} \frac{C_n(x)}{1+x^2} = -\frac{S_n(x)}{1+x^2}; \quad \mathcal{H} \frac{S_n(x)}{1+x^2} = \frac{C_n(x)}{1+x^2}.$$

Ve smyslu předchozí poznámky stačí dokázat např. první z nich. Přímým výpočtem dostaneme

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(t)}{(1+t^2)(t-x)} dt = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(t)}{t-x} dt - x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C_n(t)}{1+t^2} dt \right).$$

Druhý integrál na pravé straně je roven nule pro $n \neq 0$ (viz věta 4).

SOUVISLOST SYSTÉMU FUNKCÍ $\{C_n(x); S_n(x)\}$ S TRANSFORMACÍ HILBERTOVOU

Uvažujme funkce f , které mají tuto vlastnost: Ke každé funkci f existuje jistá konstanta C a funkce $f_r \in L^2(-\infty; +\infty)$ tak, že platí

$$(16) \quad f(x) = f_r(x) + C.$$

Množinu takových funkcí označme L_+^2 . Ke každé funkci $f \in L_+^2$ existuje jediná funkce f_r a jediná konstanta C tak, aby byl splněn vztah (16). Kdyby totiž existovaly např. dvě různé konstanty C_1 a C_2 , pak funkce $f(x) - C_1$ a $f(x) - C_2$ by obě patřily do prostoru $L^2(-\infty; +\infty)$ a tedy by tam také patřil jejich rozdíl $C_1 - C_2$, což je možné právě jen pro $C_1 = C_2$. Funkci f_r nazveme representantem funkce $f \in L_+^2$. V množině L_+^2 definujeme normu vztahem (12).

Vztahy (16) a (12) definují normovaný lineární prostor¹¹). V tomto prostoru pro Hilbertovu transformaci platí $\mathcal{H}f = \mathcal{H}f_r$.

Uvedeme nyní zvláštní případ věty, dokázané M. Rieszem a jeden její jednoduchý důsledek (viz [9], str. 183, rus. vyd.).

Věta 18. Nechtí funkce f, g, h, k patří vesměs do prostoru $L^2(-\infty; +\infty)$ a nechtí dále $g = \mathcal{H}f, k = \mathcal{H}h$; pak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) h(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) k(x) dx.$$

¹⁰) Přesněji $L^p(-\infty; +\infty)$; $p > 1$; viz TITCHMARSH E. C., *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Oxford 1937.

¹¹) Zřejmě je $L_+^2 \subset H$, kde H je definováno na str. 223.

Důkaz:

Platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(x) dx$$

a analogicky pro dvojici h a k . Platí tedy také

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x) + h(x)]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x) + k(x)]^2 dx$$

a odtud požadované tvrzení.

Důsledek: Položme $h(x) = C_n(x)/(1+x^2)$, $k(x) = -S_n(x)/(1+x^2)$, $n \neq 0$, $f \in L^2$, $g \in L^2$. Předpoklady věty 18 jsou splněny. Platí tedy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{C_n(x)}{1+x^2} dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{S_n(x)}{1+x^2} dx$$

pro všechna $n \neq 0$.

Uvedme nyní ještě, že funkce $C_n(x)$ a $S_n(x)$ patří do prostoru L^2_+ . Pro funkce $S_n(x)$ je toto tvrzení zřejmé a u funkcí $C_n(x)$ stačí uvést, že $[C_n(x) + (-1)^n] \in L^2(-\infty; +\infty)$. Systém funkcí $\{C_n(x); S_n(x)\}$ je uzavřený a tedy i úplný v H , neboť je-li $f(x) \in H$, pak $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t) \in L^2(-\pi; \pi)$ a trigonometrický systém (ve který $\{C_n(x); S_n(x)\}$ přejde substitucí $x = \operatorname{tg} \frac{1}{2}t$), je uzavřený v $L^2(-\pi; \pi)$.

Můžeme nyní vyslovit větu, která dává přibližnou metodu konstrukce Hilbertova obrazu jisté třídy funkcí.

Věta 19. *Nechť f je sudá funkce, $f \in L^2_+$ a nechť dále α_i jsou koeficienty jejího C -rozvoje. Pak*

$$\|\mathcal{H}f + \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(x)\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Důkaz tohoto tvrzení plyne okamžitě z úplnosti systému funkcí $\{C_n(x); S_n(x)\}$ v prostoru L^2_+ a z důsledku věty 18. Než přejdeme k analogii věty 19 pro funkce liché, uvedeme jednu důležitou vlastnost koeficientů β_i definovaných vztahem (11a).

Věta 20. *Jestliže f je funkce lichá a platí $f \in L^2(-\infty; +\infty)$, pak*

$$\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \beta_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \frac{dx}{1+x^2},$$

kde $g = \mathcal{H}f$.

Důkaz: Snadným výpočtem se nejprve přesvědčíme, že platí

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} S_i(x) = \frac{x}{2} - \frac{(-1)^n}{2} (S_n(x) + xC_n(x)).$$

Vyšetřme nyní n -tý částečný součet řady $\sum (-1)^{i+1} \beta_i$, kde β_i jsou definovány vztahy (11a). Jest

$$\sum_i (-1)^{i+1} \beta_i = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{i+1} f(x) \frac{S_i(x)}{1+x^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} \left[\frac{x}{2} - \frac{(-1)^n}{2} (S_n(x) + xC_n(x)) \right] dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(x)}{1+x^2} dx - \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{S_n(x)}{1+x^2} dx - \frac{(-1)^n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(x)}{1+x^2} C_n(x) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(x)}{1+x^2} dx - (-1)^n (\beta_n + a_n),
\end{aligned}$$

kde jsme a_n označili n -tý C – koeficient funkce $xf(x)$. Podle předpokladu však $f \in L^2$ a tedy $xf(x) \in H$, jak se lze snadno přesvědčit. Odtud plyne, že $\lim a_n = 0$. Analogicky, jelikož $f \in L^2$, je také $\lim \beta_n = 0$. Odtud plyne: Řada $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \beta_i$ konverguje a její součet je roven $1/\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [xf(x)]/[1+x^2] dx$. Použijme nyní věty 18. Platí totiž, že

$$\mathcal{H} \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

a odtud již plyne požadovaný výsledek.

Na základě toho můžeme nyní zobecnit větu 19.

Věta 21. *Nechť $f \in L^2_+$. Jsou-li koeficienty α_i, β_i definovány vztahy (11a), pak platí*

$$\|\mathcal{H}f - \sum_{i=1}^n \{\beta_i [C_i(x) + (-1)^{i+1}] - \alpha_i S_i(x)\}\| \rightarrow 0 \quad \text{pro } n \rightarrow \infty.$$

Důkaz opět plyne okamžitě z vlastností vyšetřovaného ortogonálního systému funkcí a z věty 20.¹²⁾

Užití vět 19 a 21 bude v dalším ukázáno na několika příkladech.

O charakteru konvergence řad, jejichž částečné součty aproximují Hilbertův obraz funkce, lze v některých případech říci více, než je obsaženo ve větách 19 a 21, které užívají pojmu konvergence podle normy. Zjevná otázky absolutní a stejnoměrné konvergence příslušných řad mohou být v praktických případech zajímavé. Jako příklad řešení této otázky uveďme následující úvahu:

Jestliže $f(x)$ splňuje pro všechna konečná x Hölderovu podmínku, tj. když existují čísla $A > 0$ a $0 < \lambda \leq 1$ tak, že pro libovolnou dvojici čísel x_1 a x_2 platí

$$|f(x_1) - f(x_2)| < A |x_1 - x_2|^\lambda,$$

dále když existuje $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = q$ a pro velká $|x|$ jest

$$|f(x) - q| < \frac{B}{|x|^\mu},$$

kde $B > 0$, $\mu > \frac{1}{2}$, pak $g(x) = 1/\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)]/[t-x] dt$ existuje a splňuje Hölder-

¹²⁾ Porovnáním vět 10 a 21 vzniká otázka, zda lze nějakým způsobem rozšířit platnost věty 21 i na funkce, které nespĺňují podmínku $f \in L^2_+$, ale pouze podmínku $f \in H$ (je totiž $L^2_+ \subset H$). Takovou funkcí je např. $f(x) = \text{sign } x$, pro kterou ovšem $\mathcal{H}f$ neexistuje.

rovu podmínku s tímtež exponentem, je-li $\lambda \neq 1$ a s exponentem $1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), je-li $\lambda = 1$, na každém otevřeném omezeném intervalu. Důkaz tohoto tvrzení je obsažen v knize [8] na str. 43–51. Jestliže však $g = \mathcal{H}f$ splňuje Hölderovu podmínku, pak její C -řada konverguje stejnoměrně a je-li splněna Hölderova podmínka s exponentem $\lambda > \frac{1}{2}$, pak C -řada konverguje kromě toho ještě v každém bodě absolutně. Dostáváme tak tvrzení:

Věta 22. *Jestliže existuje $A > 0$ a $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ tak, že pro libovolnou dvojici x_1 a x_2 platí $|f(x_1) - f(x_2)| < A |x_1 - x_2|^\lambda$, existuje vlastní limita $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = q$ a pro velká $|x|$ jest $|f(x) - q| < B|x|^\mu$, ($B > 0$, $\mu > \frac{1}{2}$), pak řada*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \{ \beta_i [C_i(x) + (-1)^{i+1}] - \alpha_i S_i(x) \}$$

konverguje absolutně a stejnoměrně k funkci $g = \mathcal{H}f$ na libovolném omezeném intervalu.

K důkazu tohoto tvrzení stačí nyní již jen uvést, že když platí $|f(x_1) - f(x_2)| < A |x_1 - x_2|^\lambda$, pak také $|f(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t_1) - f(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t_2)| < A^* |t_1 - t_2|^\lambda$ pro všechna $t \in (-\pi, \pi)$, a dále konverguje-li např. absolutně řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos ix + b_i \sin ix$

v intervalu $(-\pi; \pi)$, pak také řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i C_i(x) + b_i S_i(x)$ konverguje absolutně v libovolném omezeném intervalu. Tvrzení věty pak vyplývá okamžitě ze známých vlastností Fourierových řad (viz např. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, I. díl, Cambridge 1959, str. 241).

PŘÍKLADY A APLIKACE

Uvedeme nejprve jednoduchý příklad na ilustraci uvedené metody.

Příklad 1. Najděte Hilbertův obraz funkce

$$f(x) = k \frac{1 + x^2}{1 + k^2 x^2}, \quad k > 0.$$

Řešení: Můžeme použít věty 19, jejíž předpoklady jsou zřejmě splněny. Pro výpočet koeficientů α_i použijeme věty 9. Funkce $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t)$ je tvaru

$$f(\operatorname{tg} \frac{1}{2} t) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos t + a^2},$$

kde $a = (k - 1)/(k + 1)$ a platí $|a| < 1$ vzhledem k předpokladu $k > 0$. Trigonometrický rozvoj této funkce (jádro Poissonovo) je tvaru

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos t + a^2} = 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} a^i \cos it$$

a pro koeficienty α_i ($i \neq 0$) dostáváme

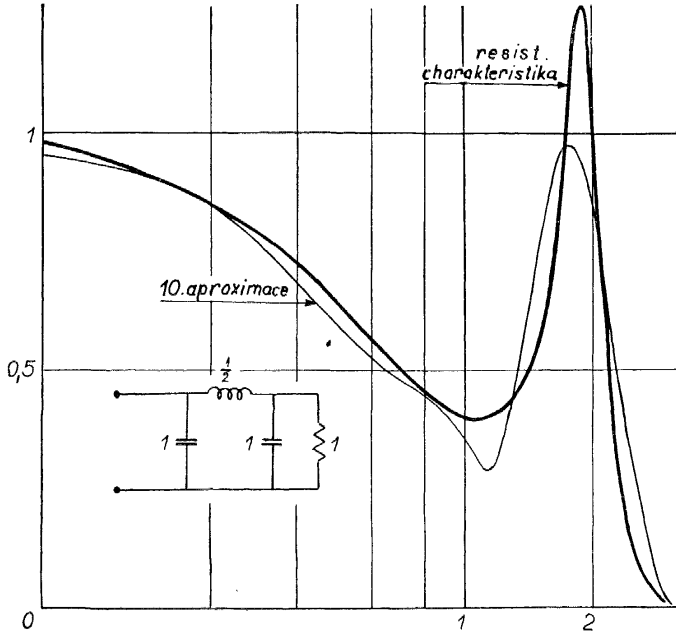
$$\alpha_i = 2a^i.$$

Podle věty 19 tedy platí

$$\mathcal{H}k \frac{1+x^2}{1+k^2x^2} = -2 \sum_{i=1}^{\infty} a^i S_i(y).$$

Použijeme-li nyní vztahu (4), dostaneme

$$\mathcal{H}k \frac{1+x^2}{1+k^2x^2} = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ a^i \left[\left(\frac{1-jy}{1+jy} \right)^i - \left(\frac{1+jy}{1-jy} \right)^i \right] \right\}$$



Obr. 3.

a po úpravě

$$\mathcal{H}k \frac{1+x^2}{1+k^2x^2} = \frac{(1-k^2)y}{1+k^2y^2}.$$

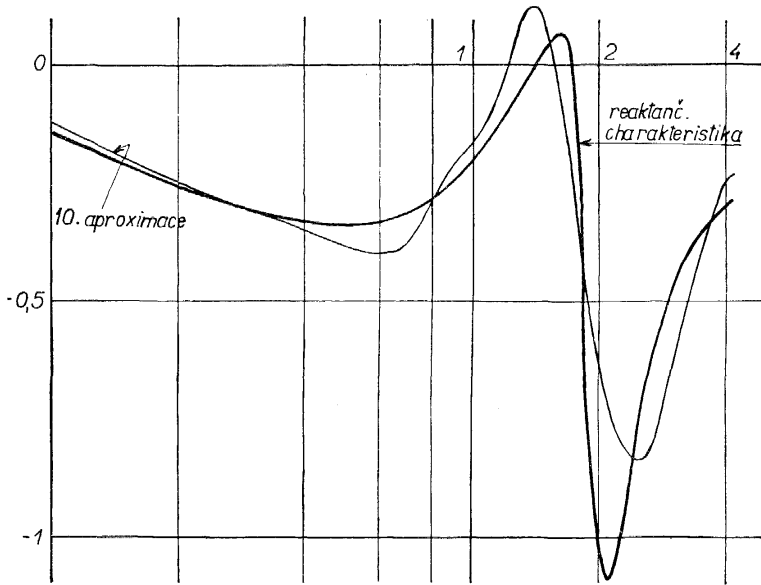
Obvykle se nám ovšem nepodaří řadu pro $\mathcal{H}f$ sečíst. Tento nedostatek však není příliš podstatný, zejména uvážíme-li, že v běžných praktických případech nebývá dán analytický předpis funkce, jejíž Hilbertovu transformaci hledáme. Je-li tato funkce dána svým grafem, pak prakticky hledáme stejně Hilbertův obraz jisté její aproximace.

Pro vyčíslení částečného součtu řady je užitečné mít po ruce tabulky hodnot funkcí $C_n(x)$ a $S_n(x)$. V prakticky postačujícím rozsahu jsou tyto tabulky připojeny na konci práce.

Uvedeme ještě příklad, který je řešen v práci [7].

Příklad 2. K dané rezistanční charakteristice pasivního elektrického dvojpólu (obr. 3) najděte reaktanční charakteristiku¹³⁾.

Postup práce: Najdeme graf funkce $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$ příslušnou transformací stupnice na vodorovné ose. (Graf funkce $f(x)$ je dán.) Některou z přibližných metod stanovíme Fourierovy koeficienty funkce $f(\operatorname{tg} \frac{1}{2}t)$. V našem případě dostaneme pro prvních 10 koeficientů mechanickým analyzátozem systému Henrici-Coradi tyto výsledky:



Obr. 4.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= +0,3683, & \alpha_6 &= +0,1448, \\ \alpha_2 &= -0,0376, & \alpha_7 &= -0,0894, \\ \alpha_3 &= +0,2172, & \alpha_8 &= -0,0349, \\ \alpha_4 &= -0,0677, & \alpha_9 &= +0,1015, \\ \alpha_5 &= -0,0791, & \alpha_{10} &= -0,0624. \end{aligned}$$

Koeficient α_0 je $\alpha_0 = +0,50235$, tento koeficient však nemá vliv na hledaný Hilbertův obraz. Do obr. 3 jsme však chtěli zakreslit zároveň aproximaci dané charakteristiky. V obou případech je vyneseno 10. částečný součet příslušné řady. Koeficienty β_i jsou vesměs rovny nule, neboť funkce je sudá. Pomocí tabulek funkcí $S_n(x)$ můžeme nyní vypočítat hodnoty $\mathcal{H}f$. Výsledky lze shrnout v grafu (obr. 4), kde je zakreslen naměřený průběh reaktanční charakteristiky a její aproximace částečným součtem.

¹³⁾ Resistanční resp. reaktanční charakteristikou dvojpólu nazýváme závislost reálné resp. imaginární části jeho impedance na frekvenci.

Příklad je vzat z práce, která zdá se formuluje nejpřesnější aproximační metodu Hilbertovy transformace sudých funkcí. Výsledky dosažené právě popsanou metodou jsou při použití 10. částečného součtu poněkud horší, její přesnost však je možné stupňovat aniž by bylo třeba předchozí výpočty opakovat. Kromě toho je právě popsaná metoda použitelná pro podstatně širší třídu funkcí.

Uvedeme ještě jeden velmi jednoduchý příklad, jehož řešení dosavadními aproximačními metodami není možné.

Příklad 3. Stanovte $\mathcal{H}f(x)$, jestliže

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < a, \\ 1 & \text{pro } a < x < b, \\ 0 & \text{pro } x > b. \end{cases}$$

Řešení: Vypočteme nejprve koeficienty α_i a β_i ve smyslu věty 9 a najdeme tak C -rozvoj funkce $f(x)$.

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a),$$

$$\alpha_i = \frac{2}{\pi} \int_a^b C_i(x) \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{i\pi} (S_i(b) - S_i(a)) \quad \text{pro } i \neq 0,$$

$$\beta_i = \frac{2}{\pi} \int_a^b S_i(x) \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{i\pi} (C_i(b) - C_i(a)).$$

Ve zvláštním případě pro $a = 1, b = 2$ dostaneme

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = & 0,10240, \\ \alpha_1 = & -0,06417, \quad \beta_1 = & 0,19099, \\ \alpha_2 = & -0,15279, \quad \beta_2 = & -0,11459, \\ \alpha_3 = & 0,14345, \quad \beta_3 = & -0,09931, \\ \alpha_4 = & 0,04278, \quad \beta_4 = & 0,14668, \\ \alpha_5 = & -0,12714, \quad \beta_5 = & -0,00483, \\ \alpha_6 = & 0,03421, \quad \beta_6 = & -0,09296, \\ \alpha_7 = & 0,05486, \quad \beta_7 = & 0,04449, \\ \alpha_8 = & -0,03568, \quad \beta_8 = & 0,02299, \\ \alpha_9 = & -0,00419, \quad \beta_9 = & -0,01670, \\ \alpha_{10} = & 0,00481, \quad \beta_{10} = & -0,00036. \end{array}$$

Podle věty 21 pro Hilbertův obraz funkce $f(x)$ dostaneme

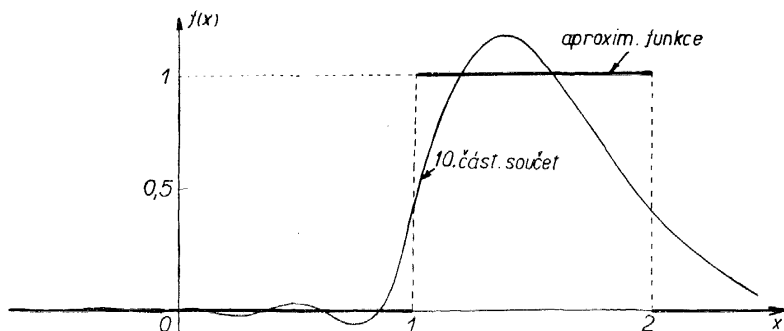
$$\mathcal{H}f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} [(-1)^{i+1} \beta_i + \beta_i C_i(y) - \alpha_i S_i(y)],$$

kde $\beta_0 = 0$.

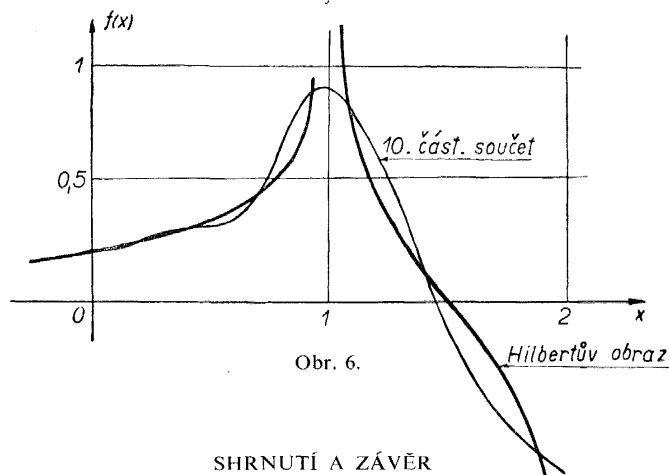
Přímým výpočtem dostaneme pro

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{dx}{x-y} = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{b-y}{a-y} \right|.$$

V obr. 5 je porovnán průběh funkce $f(x)$ s jeho aproximací částečným součtem jejího C -rozvoje ve vyšetřovaném zvláštním případě. Na obr. 6 lze analogicky srovnávat Hilbertův obraz funkce $f(x)$ a jeho aproximaci. Nelze mít samozřejmě velké nároky na přesnost aproximace v okolí bodů nespojitosti originálu. Jinde je v tomto případě aproximace obrazu dokonce „lepší“ než aproximace originálu.



Obr. 5.



Obr. 6.

SHRNUTÍ A ZÁVĚR

Byl vyšetřován jistý ortogonální systém funkcí a zkoumány možnosti jeho užití při přibližném stanovení obrazu nebo originálu v Hilbertově transformaci. Byly formulovány příslušné postačující podmínky a na příkladech ukázána únosnost metody a možnost jejího užití. Matematicky lze dále rozvíjet metody aproximace pomocí racionálních lomených funkcí. Nami vyšetřované funkce $C_n(x)$ a $S_n(x)$ mají „Čebyševovu vlastnost“ (maximum jejich odchylky od nuly je v jisté třídě racionálních lomených funkcí minimální). Jsou tedy řešením problému, který je blízký úlohám Zolotarevovým. Zde již je zřejmá souvislost s některými otázkami syntézy pasivních elektrických obvodů (viz např. [4], str. 312)¹⁴. Jak ukazuje příklad 3 lze metody užít

i v souvislosti s tzv. konečnou Hilbertovou transformací. Pomocí popsané metody zejména lze konstruovat přibližné řešení integrální rovnice speciálního typu, která je jednou ze základních rovnic teorie křídla (viz pozn. 2 na str. 214).

Praktické užití metody není obtížné, všechny potřebné výpočty lze provádět na kalkulačním stroji; tyto výpočty nejsou poměrně příliš pracné.

DODATEK

Praktické užití metody velmi urychlí použití tabulek. Připojujeme proto tab. 1 a 2, ve kterých jsou uvedeny hodnoty $C_n(x) \cdot 10^5$, resp. $S_n(x) \cdot 10^5$ pro $n = 1, 2, \dots, 10$ a pro některé hodnoty argumentu. Tabulky lze snadno doplňovat pro hodnoty $n > 10$ pomocí vztahů (6) a pro jiné hodnoty argumentu např. podle vztahů

$$C_n(x) = (-1)^n C_n(1/x), \quad S_n(x) = (-1)^{n+1} S_n(1/x),$$

které není obtížné dokázat.

Tab. 1.

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$	$C_5(x)$	$C_6(x)$	$C_7(x)$	$C_8(x)$	$C_9(x)$	$C_{10}(x)$
0,10	98020	92158	82646	69861	54309	36606	17454	-02390	-22139	-41011
0,20	92308	70414	37688	-00837	-39233	-71593	-92938	-99986	-91651	-69216
0,30	83480	39399	-17701	-68954	-97434	-93734	-59075	-04906	50884	89868
0,40	72414	04875	-65353	-99524	-78786	-14579	57671	98103	84409	21444
0,50	60000	-28000	-93600	-84320	-07584	75219	97847	42197	-47210	-98850
0,60	47059	-55709	-99491	-37929	63793	97970	28414	-71227	-95451	-18609
0,70	34228	-76569	-86644	17255	98456	50144	-64129	-94045	-00251	93874
0,80	21951	-90363	-61623	63309	89417	-24053	-99977	-19839	91267	59908
0,90	10497	-97796	-31029	91282	50193	-80744	-67145	66647	81137	-49613
1,00	00000	-100000	00000	100000	00000	-100000	00000	100000	00000	-100000
1,10	-09502	-98194	28164	92842	-45808	-84136	61797	72392	-75555	-58033
1,20	-18033	-93496	51753	74831	-78741	-46433	95487	11995	-99813	24003
1,30	-25651	-86841	70201	50827	-96276	-01436	97013	-48332	-72218	85381
1,40	-32432	-78963	83651	24702	-99675	39951	73760	-87796	-16811	98701
1,50	-38461	-70414	92626	-00837	-91983	71593	36911	-99986	40001	69216
1,60	-43820	-61596	97803	-24119	-76665	91309	-03358	-88365	80802	17550
1,70	-48586	-52788	99881	-44269	-56864	99525	-39847	-60805	98932	-35329
1,80	-52830	-44179	99510	-60964	-35096	98046	-68500	-25669	95622	-75365
1,90	-56616	-35892	97258	-74235	-13200	89182	-87782	10216	76215	-96515
2,00	-60000	-28000	93600	-84320	07584	75219	-97847	42197	47210	-98850
2,50	-72414	04875	65353	-99525	78786	-14579	-57671	98103	-84409	24144
3,00	-80000	28000	35200	-84320	99712	-75219	20639	42197	-88154	98850
3,50	-84906	44179	09884	-60964	93639	-98046	72854	-25669	-29266	75365
4,00	-88235	55709	-10075	-37929	77009	-97970	95878	-71227	29817	18609

¹⁴⁾ Tyto problémy byly podrobněji vyšetřeny v práci V. DOLEŽALA, *Применение теории аппроксимаций для построения электрических цепей*, Acta technica 1957, č. 1, str. 57–100.

Tab. 2.

x	$S_1(x)$	$S_2(x)$	$S_3(x)$	$S_4(x)$	$S_5(x)$	$S_6(x)$	$S_7(x)$	$S_8(x)$	$S_9(x)$	$S_{10}(x)$
0,10	19802	38820	56300	71551	83968	93059	98465	99971	97518	91203
0,20	38462	71006	92626	99996	91983	69817	36911	-01674	-40001	-72174
0,30	55046	91911	98421	72424	22508	-34842	-80685	-99879	-86086	-43861
0,40	68965	99881	75690	09739	-61585	-98931	-81695	-19385	53620	97041
0,50	80000	96000	35200	-53760	-99712	-65894	20639	90661	88154	15124
0,60	88235	83045	-10075	-92528	-77009	20048	95878	70190	-29817	-98253
0,70	93960	64321	-49928	-98500	-17502	86519	76730	-33992	-10000	-34464
0,80	97561	42832	-78757	-77408	44773	97064	-02159	-98012	-40870	80069
0,90	99447	20878	-95064	-40837	86491	58995	-74105	-74553	58453	-86825
1,00	100000	00000	-100000	00000	100000	00000	-100000	00000	100000	00000
1,10	99547	-18918	-95952	37154	88891	-54047	-78620	68988	65509	-81438
1,20	98361	-35474	-85567	66334	61643	-88566	-29701	99278	-06104	-97076
1,30	96654	-49585	-71217	86120	27036	-99990	24259	87544	-69170	-52059
1,40	94594	-61359	-54794	96901	-08060	-91673	67523	47873	-98577	16068
1,50	92308	-71006	-37688	99996	-39233	-69817	92938	-01673	-91651	72174
1,60	89888	-78778	-20846	97048	-64207	-40777	99943	-46814	-58915	98448
1,70	87403	-84932	-04873	89667	-82259	-09735	91718	-79390	-14573	93551
1,80	84906	-89912	09884	79268	-93639	19671	72854	-96649	29266	65727
1,90	82429	-93337	23257	67002	-99125	45240	47899	-99477	64741	26170
2,00	80000	-96000	35200	53760	-99712	65894	20639	-90661	88154	-15124
2,50	68966	-99881	75690	-09739	-61585	98931	-81695	19385	53620	-97041
3,00	60000	-96000	93600	-53760	-07584	65894	-97847	90661	-47210	-15124
3,50	52830	-89712	99510	-79268	35096	-19671	-68500	96649	-95622	65727
4,00	47059	-83045	99491	-92528	63793	-20048	-28414	70190	-95451	98253

Literatura

- [1] Антоколский М. Л.: О связи между частотными и фазовыми характеристиками в линейных системах, Журнал тех. физики, XVII (1947), No. 2, стр. 203—210.
- [2] Bateman H.: Tables of Integral Transforms, McGraw-Hill, New York, 1954.
- [3] Bayard M.: Relations entre les parties réelles et imaginaires des impedances et détermination des impedances en fonction de l'une partie, Révue générale de l'électricité, 1935, Mai, str. 659.
- [4] Guillemin E. A.: Synthesis of Passive Networks, Wiley & S., New York, 1957.
- [5] Kauffman H.: Zur Bestimmung von Frequenz-Charakteristik u. Phasenmass eines Netzwerkes bei beliebig vorgegebener Dämpfungskurve, AEU, 1955, September, str. 192.
- [6] Ласрептев М. А., Шавант Б. В.: Методы теории функций комплексного переменного, Москва, 1958.
- [7] Thomas D. E.: Tables of Phase Associated with a Semi-Infinite Unit Slope of Attenuation, Bell Syst. Tech. Journal, Vol. XXVI, 1947, str. 870—899.
- [8] Гахов Ф. Д.: Краевые задачи, Москва, 1958.
- [9] Titchmarsh E. C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford 1937.

Резюме

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА ОРТОГОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

ИРЖИ ГРЕГОР (Jiří Gregor)

В статье рассматривается система функций

$$\{\cos(2n \operatorname{arctg} x); \sin(2n \operatorname{arctg} x)\},$$

ортогональных с весом $\rho = 1/(1+x^2)$ в промежутке $(-\infty; +\infty)$. После изложения характерных черт этой системы даны доказательства основных теорем о сходимости рядов Фурье в этой системе. Основным результатом является доказательство интегральных соотношений между функциями $\cos(2n \operatorname{arctg} x)$ и $\sin(2n \operatorname{arctg} x)$ в виде так называемого преобразования Гильберта (теорема 16 и 17). Это соотношение используется для приближенного построения преобразования Гильберта функций определенного класса. Приведены достаточные условия такого построения (теорема 19 и 21). Использование этого метода показано на трех примерах. Необходимые вычисления сводятся к гармоническому анализу по стандартным методам. В прикладных задачах удобно пользоваться таблицами, приложенными к статье.

Zusammenfassung

ZUR ANNÄHERUNG DER HILBERT-TRANSFORMIERTEN MIT HILFE VON ORTHOGONALREIHEN RATIONALER FUNKTIONEN

Jiří GREGOR

Es wird das, im Intervall $(-\infty; +\infty)$ bezüglich des Gewichtes $\rho(x) = 1/(1+x^2)$ orthogonale Funktionensystem

$$\{\cos(2n \operatorname{arctg} x); \sin(2n \operatorname{arctg} x)\}$$

untersucht. Nach Erörterung der Grundeigenschaften dieses Systemes werden die Hauptsätze über die Konvergenz der Fourierschen Reihen in diesem System bewiesen. Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit besteht im Beweis gewisser Integralrelationen zwischen den Funktionen $\cos(2n \operatorname{arctg} x)$ und $\sin(2n \operatorname{arctg} x)$, welche die Form der sog. Hilbertschen Transformation besitzen (Satz 16. u. 17.). Auf Grund dieser Relationen werden dann die Hilbert-Transformierten von Funktionen einer gewissen Funktionenklasse annäherend konstruiert. Es werden weiter hinreichende Bedingungen für diese Konstruktion bewiesen (Satz 19. u. 21.). Zur Berechnung genügen die üblichen Methoden der harmonischen Analysis. In Anwendungen empfiehlt man die Benützung von Tabellen der Funktionen $\cos(2n \operatorname{arctg} x)$ und $\sin(2n \operatorname{arctg} x)$ die dieser Arbeit angeschlossen sind. Das Ganze Verfahren wird an drei Beispielen erläutert.