František Zítek

К определению индекса артикуляции

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 2, 124–134

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102746

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ИНДЕКСА АРТИКУЛЯЦИИ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek)

(Поступило в редакцию 28/4 1960 г.)

В статье решена одна математическая задача, связанная с определением индекса артикуляции (ср. [2]); далее здесь указана тоже другая возможность введения и интерпретации этого понятия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей статьи — изучение некоторых чисто математических аспектов артикуляционных испытаний, главным образом в связи с определением индекса артикуляции. Артикуляционные испытания вообще служат для установления качества устройств для передачи речи, именно с точки зрения возможности правильного идентифицирования передаваемых элементов речи. В зависимости от того, какие элементы речи имеются в виду, различают следующие виды артикуляции: фраз, словесную, слоговую, звуковую, и артикуляцию формант (ср. [2], [3]). Основной задачей артикуляционных испытаний является установление зависимости артикуляции от электроакустической характеристики канала.

В этой статье мы будем заниматься главным образом слоговой артикуляцией. Для эмпирического измерения слоговой артикуляции применяют артикуляционные таблицы, содержащие некоторое фиксированное основное множество слогов. Так как свойства этого основного множества для нас несущественны, то мы здесь не будем интересоваться вопросами, связанными с методами составления артикуляционных таблиц.

Во время испытания оператор диктует слоги из таблиц; слоги переходят через специальный электроакустический тракт, который пропускает без изменений частоты из некоторой полосы и вообще не пропускает других частот. На приемном конце тракта работает бригада слушателей, которые — независимо друг от друга — идентифицируют слоги и записывают их. Слоговая артикуляция S — это по существу вероятность того, что слог случайно выбранный из данного основного множества будет правильно идентифицирован после перехода через испытуемый тракт. Эта вероятность зависит, конечно, от многих различных влияний, из которых самое существенное для целей артикуляционных испытаний — зависимость от пропускаемой полосы частот. Другие влияния как, напр., отклонение частотной характеристики употребляемой технической аппаратуры от идеальной — прямоугольной, внешние шумы, различие лиц — членов бригады, и т. д. мы стараемся исключить, как бы то ни провести. Окончательным результатом измерения слоговой артикуляции S является установление зависимости S от интервала частот $\langle f_1, f_2\rangle$, которые канал пропускает: $S = S(\langle f_1, f_2\rangle)$.

2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ S

С практической точки зрения, измеряя слоговую артикуляцию, мы можем заранее ограничиться некоторым конечным интервалом частот $\langle f_0, f_\infty\rangle$; достаточен, например, интервал от $f_0 = 100$ Hz по $f_\infty = 10$ kHz. Слоговая артикуляция S является тогда неотрицательной функцией от интервала, определенной в $\langle f_0, f_\infty\rangle$. Чтобы неосложнять использованные обозначения мы будем записывать S в форме функции двух вещественных переменных $S(f_1, f_2)$; она, конечно, определена только для $f_0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq f_\infty$.

Естественно предполагать, что функция S непрерывна, т. е. что

$$(1) \qquad \lim_{f\to f_1, f'\to f_2, f\leqq f'} S(f, f') = S(f_1, f_2)$$

и что для любого f, $f_0 \leqq f \leqq f_\infty$, мы имеем $S(f, f) = 0$. Далее S, очевидно, является монотонной, а именно неубывающей функцией интервала: для $f_0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \leqq f_4 \leqq f_\infty$ справедливо

$$(2) \qquad 0 \leqq S(f_2, f_3) \leqq S(f_1, f_4) \leqq S(f_0, f_\infty).$$

Но результаты существующих до сих пор измерений показывают, что функция S не является *аддитивной* функцией интервала; именно этот факт навел на мысль ввести новую меру артикуляции: индекс артикуляции.

3. ИНДЕКС АРТИКУЛЯЦИИ

Индекс артикуляции (*articulation index*) был определен Френчем и Стейнбергом в статье [2]: это такая функция интервала $A = A(f_1, f_2)$, определенная в $\langle f_0, f_\infty\rangle$, которая аддитивна — это значит, что для $f_0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \leqq f_\infty$ справедливо

$$(3) \qquad A(f_1, f_2) + A(f_2, f_3) = A(f_1, f_3),$$

и одновременно является однозначной функцией слоговой артикуляции

$$(4) \qquad A(f_1, f_2) = \phi[S(f_1, f_2)].$$

Здесь $\phi(x)$ — вещественная функция одной переменной, определенная для $0 \leqq x \leqq S(f_0, f_\infty)$, непрерывная и возрастающая, $\phi(0) = 0$, $\phi[S(f_0, f_\infty)] = A(f_0, f_\infty) = 1$.

С несколько другой точки зрения приступают к решению той же задачи — получения аддитивной меры артикуляции — авторы монографии [3], которые исходят из формантной теории. Они определяют артикуляцию формант, обозначая ее тоже через A; артикуляция формант является по определению аддитивной функцией интервала частот. Аналогично как Френч и Стейнберг, авторы [3] тоже предполагают, что A — однозначная функция от S.

Несмотря на отличие этих двух точек зрения, мы наталкиваемся в обоих случаях на одну математическую проблему. Сразу очевидно, что гипотеза о наличии функции ϕ из (4) представляет существенное ограничение для функции S : S не может быть произвольной функцией интервала. Однако вопрос *существования* индекса артикуляции Френчем и Стейнбергом даже не поставлен. Дадим теперь несколько более абстрактную формулировку нашей задачи.

4. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНДЕКСА

Пусть дан конечный интервал $\langle f_0, f_\infty \rangle$ на вещественной оси и пусть S — конечная, неотрицательная, неубывающая и непрерывная функция интервала, определенная в $\langle f_0, f_\infty \rangle$. Какие другие свойства должна иметь функция S, чтобы существовала непрерывная и возрастающая функция ϕ, отображающая интервал $\langle 0, S(f_0, f_\infty) \rangle$ на интервал $\langle 0, 1 \rangle$ и такая, что сложная функция (4) аддитивна?

Если $S(f_0, f_\infty) = 0$, то все тривиально, поэтому мы ограничимся случаем, когда $S(f_0, f_\infty) > 0$. Нетрудно узнать, что необходимым и достаточным условием существования функции ϕ является следующее: функция S должна иметь вид

$$S(f_1, f_2) = \psi_0[B(f_1, f_2)]\,, \quad f_0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq f_\infty\,, \tag{5}$$

где B — конечная, неотрицательная, непрерывная и аддитивная функция интервала, определенная в $\langle f_0, f_\infty \rangle$, $0 < B(f_0, f_\infty) < \infty$, и ψ_0 — неотрицательная, возрастающая и непрерывная функция, которая отображает $\langle 0, B(f_0, f_\infty) \rangle$ на $\langle 0, S(f_0, f_\infty) \rangle$. Функция A тогда равна

$$A(f_1, f_2) = \frac{B(f_1, f_2)}{B(f_0, f_\infty)}\,, \tag{6}$$

так что, полагая

$$\psi(x) = \psi_0[x B(f_0, f_\infty)]\,,$$

мы получим

$$S(f_1, f_2) = \psi[A(f_1, f_2)]\,, \tag{7}$$

значит, $\psi = \phi^{-1}$. Теперь мы докажем, что справедливо следующее утверждение:

Теорема. *Функция S имеет вид* (5) *тогда и только тогда, если для $f_0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \leqq f_4 \leqq f_\infty$ справедливо*

$$[S(f_1, f_2) = S(f_3, f_4)] \Leftrightarrow [S(f_1, f_3) = S(f_2, f_4)]\,. \tag{8}$$

Доказательство. Условие (8) необходимо. Так как ψ_0 возрастает, то

$$[S(f_1,f_2) = S(f_3,f_4)] \Leftrightarrow [B(f_1,f_2) = B(f_3,f_4)] \tag{9}$$

и, аналогично,

$$[S(f_1,f_3) = S(f_2,f_4)] \Leftrightarrow [B(f_1,f_3) = B(f_2,f_4)]\,. \tag{10}$$

Но функция B аддитивна, так что

$$\begin{aligned} B(f_1,f_3) &= B(f_1,f_2) + B(f_2,f_3)\,, \\ B(f_2,f_4) &= \phantom{B(f_1,f_2) + {}} B(f_2,f_3) + B(f_3,f_4)\,. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$[B(f_1,f_2) = B(f_3,f_4)] \Leftrightarrow [B(f_1,f_3) = B(f_2,f_4)]\,. \tag{11}$$

Комбинируя (9), (10) и (11), мы получим (8).

Доказательство достаточности условия (8) волее сложно, мы дадим его путем эффективной конструкции функции ψ (ср. тоже [2] и [3]), опираясь на следующие вспомогательные рассуждения; притом (8) всегда предполагается.

Лемма 1. *Пусть для некоторых $f, f'' \in \langle f_0, f_\infty\rangle$ имеем $S(f,f'') > 0$. Тогда существует хотя бы одно $f', f < f' < f''$ такое, что*

$$S(f,f') = S(f',f'') \tag{12}$$

и

$$0 < S(f,f') < S(f,f'')\,. \tag{13}$$

Существование f', удовлетворяющего (12), вытекает из непрерывности функции S. Так как, очевидно,

$$0 \leqq S(f,f') \leqq S(f,f'')\,, \tag{14}$$

то достаточно исключить в (14) знаки равенства. Мы докажем это от противного, пользуясь условием (8).

а) Пусть $S(f,f') = 0 = S(f'',f'')$. В силу (8) и (12)

$$S(f,f'') = S(f',f'') = S(f,f') = 0\,,$$

что противоречит условию $S(f,f'') > 0$.

б) Пусть $S(f,f') = S(f,f'')$. Но тогда из (8) и (12) вытекает, что

$$0 = S(f,f) = S(f',f'') = S(f,f') = S(f,f'')\,;$$

это опять противоречит условию $S(f,f'') > 0$.

Итак, неравенства (13) доказаны полностью. Однако, число f' может и не быть однозначно определено, в таком случае существует замкнутый интервал $\langle f^*, f^{**}\rangle$ такой, что любое $f' \in \langle f^*, f^{**}\rangle$ удовлетворяет (12).

Вернемся теперь к доказательству главной теоремы. Сначала, мы определим основную систему $\boldsymbol{F}$ точек $f_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$; $n = 1, 2, \ldots$, $\boldsymbol{F} \subset \langle f_0, f_\infty\rangle$.

а) для $n = 1$ положим $f_0^{(1)} = f_0, f_2^{(1)} = f_\infty$, и

(15) $$f_1^{(1)} = \inf\{f : S(f_0, f) = S(f, f_\infty)\} ;$$

б) если уже определены точки $f_k^{(n)}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$ для некоторого $n \geqq 1$, то для $n + 1$ положим

$$f_{2k}^{(n+1)} = f_k^{(n)}, \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n ,$$

и точки с нечетными индексами должны удовлетворять условиям

(16) $$f_1^{(n+1)} = \inf\{f : S(f_0, f) = S(f, f_1^{(n)})\} ,$$
$$f_{2k+1}^{(n+1)} = \inf\{f : S(f_k^{(n)}, f) = S(f_0, f_1^{(n+1)})\} .$$

При помощи (8) мы получим из (16) с одной стороны равенства

(17) $S(f_k^{(n)}, f_{k+p}^{(n)}) = S(f_0, f_p^{(n)})$; $\quad k = 0, 1, \ldots, 2^n; p = 0, 1, \ldots, 2^n - k; n = 1, 2, \ldots,$

и с другой стороны неравенства

(18) $$S(f_0, f_k^{(n)}) < S(f, f_{k+1}^{(n)}) , \quad k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1; \ n = 1, 2, \ldots$$

Определим теперь искомую функцию ψ, сначала только на множестве $\boldsymbol{D}$ чисел d вида $d = k\, 2^{-n}$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$; $n = 1, 2, \ldots$, равенством

(19) $$\psi(k\, 2^{-n}) = S(f_0, f_k^{(n)}) .$$

Рассмотрим свойства функции ψ на множестве $\boldsymbol{D}$. Из (18) вытекает, что она строго возрастающая. Далее, если $d_1, d_2 \in \boldsymbol{D}$, $d_1 < d_2$, и $\psi(d_1) = S(f_0, f_1)$, $\psi(d_2) = S(f_0, f_2)$, то в силу (17) $\psi(d_2 - d_1) = S(f_1, f_2)$, это почти тривиально. Справедливо даже несколько более общее утверждение, сразу вытекающее из (17) и (8):

Лемма 2. *Если для* $d_1, d_2 \in \boldsymbol{D}; f_1, f_2, f_3 \in \boldsymbol{F}$, *имеется* $\psi(d_1) = S(f_1, f_2)$ *и* $\psi(d_2) = S(f_2, f_3)$, *то*

$$\psi(d_1 + d_2) = S(f_1, f_3) .$$

Лемма 3. *Функция* ψ *непрерывна в точке* 0.

В самом деле, если $d_n \in \boldsymbol{D}$, $d_n \to 0$, то для любого целого m будет $d_n < 2^{-m}$, начиная с некоторого $n = n(m)$. Так как ψ возрастает, то и $\psi(d_n) < \psi(2^{-m})$. В силу того достаточно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(2^{-n}) = 0$. Из определения точек $f_k^{(n)}$ следует, что последовательность $\{f_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ – невозрастающая, но она ограничена снизу, $f_1^{(n)} \geqq f_0$, так что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_1^{(n)} = f_*$. В силу непрерывности функции S имеем тогда

$$\lim_{n\to\infty} \psi(2^{-n}) = \lim_{n\to\infty} S(f_0, f_1^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} S(f_1^{(n)}, f_1^{(n-1)}) = S(f_*, f_*) = 0 ,$$

ч. и т. д.

Отсюда следует, что вообще ψ *непрерывна* на $\boldsymbol{D}$. В самом деле, пусть $d_n \in \boldsymbol{D}$, $n = 1, 2, \ldots, d_n \to d \in \boldsymbol{D}$, $\psi(d_n) = S(f_0, f_n)$, $\psi(d) = S(f_0, f)$, где все f_n и f принадлежат $\boldsymbol{F}$. Допустим, что $\psi(d_n) \not\to \psi(d)$. Тогда в силу компактности интервалов $\langle 0, 1\rangle$ и $\langle f_0, f_\infty\rangle$ существует подпоследовательность $\{d_{n_k}\}$ такая, что одновременно $\lim\limits_{k\to\infty} \psi(d_{n_k}) = p \neq \psi(d)$ и $f_{n_k} \to f_* \neq f$. Положим — простоты ради — $\psi(-x) = -\psi(x)$, $S(f',f'') = -S(f'',f')$. Тогда, как мы уже видели, $S(f,f_{n_k}) = \psi(d_{n_k} - d)$ и в пределе $S(f,f_*) = \psi(0) = 0$. Но тогда из

$$0 = S(f_0,f_0) = S(f,f_*)$$

получаем в силу (8) равенство

$$\psi(d) = S(f_0,f) = S(f_0,f_*) = p\,,$$

что составляет противоречие; значит, $\psi(d_n) \to \psi(d)$, ч. и т. д.

Множество $\boldsymbol{D}$ плотно в $\langle 0, 1\rangle$. Определяя

$$\psi(x) = \lim_{d\in \boldsymbol{D},\, d\to x} \psi(d)$$

для $x \in \langle 0, 1\rangle - \boldsymbol{D}$, мы получим функцию ψ, которая будет определена во всем $\langle 0, 1\rangle$, непрерывна и строго возрастающая.

В силу свойств функции ψ существует и обратная к ней функция $\phi = \psi^{-1}$, которая определена на интервале $\langle 0, S(f_0, f_\infty)\rangle$, непрерывна и тоже строго возрастающая. Рассмотрим теперь функцию A, определенную в (4); нам надо еще доказать, что A является непрерывной, неубывающей и аддитивной функцией от интервала, определенной в $\langle f_0, f_\infty\rangle$.

Ее непрерывность вытекает непосредственно из непрерывности функций S и ϕ; аналогично доказывается и то, что она не убывает. Остается доказать, что A аддитивна; в силу нашей леммы 2 функция A аддитивна на $\boldsymbol{F}$.

Пусть для любого $f \in \langle f_0, f_\infty\rangle$

$$m(f) = \inf\{f' : S(f_0,f') = S(f_0,f)\}\,. \tag{20}$$

Тогда имеет место

Лемма 4. *Для любого $f \in \langle f_0, f_\infty\rangle$ существует последовательность $\{\lambda_n\}$ точек из $\boldsymbol{F}$ такая, что $\lambda_n \to m(f)$.*

Доказательство леммы 4. Если $S(f_0,f) = 0$, то $m(f) = f_0$, и достаточно. чтобы $\lambda_n = f_0$ для всех n. Если же $S(f_0,f) = s > 0$, рассмотрим множество

$$\boldsymbol{D}(f) = \{d : d \in \boldsymbol{D}, \psi(d) < s\}\,;$$

оно, повидимому, плотно в $\langle 0, \phi(s)\rangle$, так что и множество

$$\psi[\boldsymbol{D}(f)] = \{\psi(d) : d \in \boldsymbol{D}(f)\}$$

плотно в $\langle 0, s\rangle$. Но тогда существует последовательность $\{d_n\}$, $d_n \in \boldsymbol{D}(f)$ такая, что $\psi(d_n) \to s$. Из неравенства $\psi(d_n) < s$ следует, что соответствующие $f_n \in \boldsymbol{F}$, $\psi(d_n) = S(f_0, f_n)$, тоже не больше, чем $m(f)$. Из компактности множества $\langle f_0, m(f)\rangle$ вытекает, что возможно выбрать такую подпоследовательность точек $f_{n_k} = \lambda_k$, чтобы она сходилась к некоторому пределу $\lambda_k \to \lambda$. Очевидно, что $\lambda \leqq m(f)$. Но в силу непрерывности функции S мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} S(f_0, \lambda_n) = S(f_0, \lambda) = S(f_0, f) .$$

Имея в виду (20), мы видим, что $\lambda = m(f)$, ч. и т. д.

Пусть теперь $f_1 \leqq f_2 \leqq f_3$ – произвольные точки из $\langle f_0, f_\infty \rangle$. Везьмем соответствующие последовательности $\{\lambda_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$, $\lambda_n^{(j)} \in \boldsymbol{F}$, $\lambda_n^{(j)} \to m(f_j)$, $j = 1, 2, 3$. Так как на $\boldsymbol{F}$ функция A аддитивна, то для любого n

$$A(\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}) + A(\lambda_n^{(2)}, \lambda_n^{(3)}) = A(\lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(3)})$$

(полагая, аналогично как в случае S, $A(f', f'') = - A(f'', f')$). В силу непрерывности функции A в пределе будет также

$$A[m(f_1), m(f_2)] + A[m(f_2), m(f_3)] = A[m(f_1), m(f_3)] .$$

Но из $S(f_0, f_j) = S[f_0, m(f_j)]$, $j = 1, 2, 3$, следует также

$$A(f_i, f_j) = A[m(f_i), m(f_j)] , \quad i = 1, 2;\ j = 2, 3 ;$$

так что справедливо (3), значит A – аддитивная функция интервала во всем $\langle f_0, f_\infty \rangle$, ч. и т. д.

5. ДРУГАЯ ФОРМА УСЛОВИЯ (8)

На практике измерения слоговой артикуляции возможно проводить только для некоторого конечного числа подходящим способом выбранных интервалов частот. На первом этапе мы берем интервалы вида $\langle f_0, f \rangle$ и $\langle f, f_\infty \rangle$. Пусть

$$H(f) = S(f, f_\infty) , \quad D(f) = S(f_0, f) , \tag{21}$$

целью первого этапа измерений будет определение значений функций H и D, которые позволяют определить $f_1^{(1)}$ как минимальное решение уравнения $H(f) = D(f)$. Если выразить условие (8) при помощи функций H и D, то мы получим ($f_0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq f_\infty$)

$$[H(f_1) = D(f_2)] \Leftrightarrow [H(f_2) = D(f_1)] . \tag{22}$$

Условие (22) имеет наглядный характер: кривым, представляющим функции H и D, можно „вписать" прямоугольники (ср. [3], стр. 66).

Если мы знаем, напр., функцию H в интервале $\langle f_0, f_\infty \rangle$ и функцию D в интервале $\langle f_0, f_1^{(1)} \rangle$, то – предполагая (8) или (22) – мы можем определить и значения функции D в интервале $\langle f_1^{(1)}, f_\infty \rangle$. Аналогично представляются и других три случая.

Очевидно, если мы ограничимся только этими двумя функциями H и D, определенными в (21), то (22) является только необходимым условием существования функции ϕ. Для того, чтобы получить условие не только необходимое, но и достаточное, мы должны ввести еще другие функции. Положим для $f_0 \leqq f \leqq f_\infty$

$$H_f(f') = S(f',f),\ f' \leqq f;\quad D_f(f') = S(f,f'),\quad f \leqq f'. \tag{23}$$

Для этих функций мы получаем из (8) условие ($f_0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq f_3 \leqq f_4 \leqq f_\infty$)

$$[H_{f_4}(f_2) = D_{f_1}(f_3)] \Leftrightarrow [H_{f_4}(f_3) = D_{f_1}(f_2)]. \tag{24}$$

В силу очевидного равенства $H_f(f') = D_{f'}(f)$ достаточно знать одну полную систему функций H_f или D_f (для всех f), другая система этим уже однозначно определена. Условие (24) можно так переписать в форме

$$[H_{f_4}(f_2) = H_{f_3}(f_1)] \Leftrightarrow [H_{f_4}(f_3) = H_{f_2}(f_1)] \tag{25}$$

или

$$[D_{f_2}(f_4) = D_{f_1}(f_3)] \Leftrightarrow [D_{f_3}(f_4) = D_{f_1}(f_2)]. \tag{26}$$

6. ИНТЕГРАЛ БЭРКИЛЛА ФУНКЦИИ S

В математическом анализе известна операция интегрирования по Бэркиллу (см. [1]), которая позволяет перейти от неаддитивных функций интервала к аддитивным функциям. Обозначим через $\mathscr{S}(f',f'')$ интеграл Бэркилла нашей функции S в интервале $\langle f',f''\rangle \subset \langle f_0,f_\infty\rangle$. Его определяют следующим образом: разделим интервал $\langle f', f''\rangle$ на конечное число n интервалов $\langle f_k,f_{k+1}\rangle$, $k = 1,\ldots,n$; $f' = f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots \leqq f_{n+1} = f''$, и рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} S(f_k,f_{k+1}). \tag{27}$$

Пусть теперь $n \to \infty$, причем длина самого длинного из интервалов $\langle f_k,f_{k+1}\rangle$ стремится к нулю. Если тогда суммы (27) стремятся к некоторому пределу, то именно этот предел будет представлять интеграл $\mathscr{S}(f',f'')$ функции S в интервале $\langle f',f''\rangle$. Если рассматривать $\mathscr{S}$ как функцию от интервала, то она будет аддитивна, неотрицательна и непрерывна (см. [1]).

Если наша функция S имеет вид (5), то ее интеграл Бэркилла $\mathscr{S}$ существует тогда и только тогда, когда существует правая производная функции ψ_0 в точке нуль. В этом случае

$$\mathscr{S}(f_1,f_2) = \psi_0'(0+)\,B(f_1,f_2),$$

или

$$\mathscr{S}(f_1,f_2) = \psi'(0+)\,A(f_1,f_2),$$

для $f_0 \leqq f_1 \leqq f_2 \leqq f_\infty$. Если $0 < \psi'(0+) < \infty$, то из $A(f_0,f_\infty) = 1$ мы получим $\psi'(0+) = \mathscr{S}(f_0,f_\infty)$, так что

$$A(f_1,f_2) = \frac{\mathscr{S}(f_1,f_2)}{\mathscr{S}(f_0,f_\infty)}. \tag{28}$$

Функция A оказывается пропорциональной интегралу Бэркилла $\mathscr{S}$ функции

S, если только предположить, что а) S имеет вид (5), б) $0 < \psi_0'(0+) < \infty$. Эта интерпретация индекса артикуляции соответствует наглядному определению Френча и Стейнберга (см. [2] стр. 101): A соответствует сумме вкладов отдельных узких полос Δf в общую артикуляцию.

Интеграл Бэркилла $\mathscr{S}$ может существовать, конечно, даже и тогда, когда S не имеет вида (5). В этом случае функция A, определенная равенством (28), снова является неотрицательной, непрерывной и аддитивной функцией от интервала, но для практических целей она не имеет значения: ее невозможно измерить эмпирически; кроме того, с практической точки зрения главное значение индекса артикуляции состоит в его однозначной зависимости от S.

7. ВЫВОДЫ

1. Существование индекса артикуляции, или более точно существование функции ϕ из (4) не очевидно. В каждом конкретном случае надо проверить условие (8). Эмпирическая проверка, напр., при помощи „вписанных" прямоугольников (см. [3], стр. 66), хотя и легкая для испольнения, не даст никогда *полного* ответа. Более эффективно было бы найти теоретические аргументы, поддерживающие эту гипотезу. Само условие (8) достаточно наглядно: полоса $\langle f_2, f_3 \rangle$ повышает разборчивость в равной мере, если ее добавить к $\langle f_1, f_2 \rangle$ или к $\langle f_3, f_4 \rangle$, если только основные значения разборчивости (или артикуляции) в $\langle f_1, f_2 \rangle$ и $\langle f_3, f_4 \rangle$ одинаковы.

2. Хотя и с практической точки зрения выражение (28) индекса A при помощи интеграла Бэркилла функции S не имеет принципиального значения, тем не менее оно показывает возможность новой, более наглядной интерпретации индекса артикуляции, намеченной в неявной форме уже Френчем и Стейнбергом. Она устраняет *в некоторой степени* элементы формализма в определению индекса. Было бы удобным определить в некотором конкретном случае значение $\psi'(0+)$, так как эта величина играет здесь ведущую роль.

3. В наших рассуждениях мы вообще не обращали внимания на вопрос действительности формантной теории, на которой опираются авторы монографии [3]. Формантная теория позволяет избежать проблематики определения индекса, но даже здесь условие (8) играет большую роль, так как только это условие гарантирует однозначную зависимость A от S и наоборот.

Литература

[1] *J. C. Burkill:* Functions of intervals; Proceed. London Math. Soc., Ser. II., *22* (1924), 275—310.

[2] *N. R. French, J. C. Steinberg:* Factors governing the intelligibility of speech sounds; Journal Acoust. Soc. Amer., *19*, (1947), 90—119.

[3] *Коллектив:* Расчет и измерение разборчивости русской речи; Труды Военной Краснознаменной Академии Связи им. С. М. Буденного, 33, Ленинград 1952.

Výtah

K DEFINICI INDEXU SROZUMITELNOSTI

FRANTIŠEK ZÍTEK

V článku je řešen jeden matematický problém souvisící s definicí indexu srozumitelnosti (viz [2]).

Budiž $\langle f_0, f_\infty \rangle$ kompaktní interval na reálné ose a budiž $S = S(f_1, f_2)$ nezáporná neklesající funkce intervalu definovaná v $\langle f_0, f_\infty \rangle$ a spojitá ve smyslu (1). Za jakých podmínek existuje reálná, spojitá a rostoucí funkce ϕ, zobrazující $\langle 0, S(f_0, f_\infty) \rangle$ na $\langle 0, 1 \rangle$ a taková, aby funkce intervalu A definovaná v (4) byla aditivní?

Je dokázáno, že *podmínka* (8) *je nutná a postačující pro existenci takové funkce* ϕ.

Praktický význam tohoto výsledku spočívá v tom, že se ukazuje, že index srozumitelnosti A ve smyslu definice FRENCHE a STEINBERGA (srv. [2]) *nemusí vždy existovat*. Bylo by proto vhodné v každém konkrétním případě si ověřit, zda podmínka (8) je splněna.

V šestém paragrafu je ukázáno, jak lze využít pojmu Burkillova integrálu k určení jiné aditivní míry srozumitelnosti. Tento přístup, který má poněkud názornější charakter, odpovídá i jedné nepříliš jasně formulované myšlence Frenche a Steinberga (srv. [2], str. 101).

V úvahu je vzata i další aditivní míra srozumitelnosti: tzv. formantová rozpoznatelnost A zavedená v [3]. Je ukázáno, že i v tomto případě má podmínka (8) svůj význam, neboť teprve při jejím splnění je A jednoznačnou funkcí slabikové rozpoznatelnosti S.

Summary

ON THE DEFINITION OF THE ARTICULATION INDEX

FRANTIŠEK ZÍTEK

This paper discusses a mathematical problem connected with the definition of the articulation index (see [2]).

Let $\langle f_0, f_\infty \rangle$ be a compact interval on the real axis, let $S = S(f_1, f_2)$ be a non-negative and non-decreasing function of intervals $\langle f_1, f_2 \rangle$ which is defined on $\langle f_0, f_\infty \rangle$ and continuous in the sense of (1). Then the problem is the following:

Under what conditions does there exist a real, continuous and increasing function ϕ from $\langle 0, S(f_0, f_\infty) \rangle$ to $\langle 0, 1 \rangle$ such that the function A defined by (4) is additive?

It is proved that (8) *is a necessary and sufficient condition for the existence of such a function* ϕ.

The practical importance of this result consists in showing that the articulation index A as defined by French and Steinberg in [2] *does not necessarily exist.* Thus it would be useful to verify in each practical case whether (8) is fulfilled or not.

In paragraph 6 it is shown how the notion of the Burkill integral may be applied to define another additive measure of intelligibility. This approach has the advantage of being a little more intuitive; it corresponds to a not very clearly formulated idea of French and Steinberg (see [2], p. 101).

Finally, the theory of another additive measure of intelligibility – the "formant articulation" A defined in [3] – is taken into account. It is shown that the condition (8) is important even in this case, because it is necessary and sufficient for A to be a single-valued function of the syllable articulation S.