Aplikace matematiky

Václav Doležal

Über die Anwendung von Operatoren in der Theorie der linearen dynamischen Systeme

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 1, 36–67

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102738

ÜBER DIE ANWENDUNG VON OPERATOREN IN DER THEORIE DER LINEAREN DYNAMISCHEN SYSTEME

VÁCLAV DOLEŽAL

(Eingegangen am 9. Dezember 1959.)

Der Artikel ist der Anwendung von Operatoren zur Analysis der linearen, aus zeitlich veränderlichen konzentrierten Elementen gebildeten Systemen gewidmet. Auf Grund eines gewissen Produktes der Distribution mit der glatten Funktion von zwei Veränderlichen ist eine geeignete Operatorenklasse eingeführt und ihre Eigenschaften angegeben. Die Resultaten sind dann zur Lösung der Systeme von Integrodifferentialgleichungen und zur Ermittlung von serioparallelen dynamischen Systemen angewendet.

Dieser Artikel ist der Anwendung einer gewissen Operatorenklasse zur Analyse linearer physikalischer Systeme, die aus konzentrierten Elementen gebildet sind, gewidmet; insbesondere wird der Fall betrachtet, in welchem die Elemente von der Zeit abhängig sind, d. h. wenn es sich um sog. „parametrische Systeme" handelt. Es ist bekannt, dass solche Systeme z. B. durch die Wechselstromschaltungen, mechanische Schaltungen und andere Systeme der selbsttätigen Regelung dargestellt werden.

Um den Charakter der beabsichtigten Probleme zu veranschaulichen, sei ein typisches einfaches Beispiel angeführt. Betrachten wir den elektrischen Stromkreis, der auf Abb. 1 angegeben ist. Dabei setzen wir voraus, dass die Kapazität C und die Induktivität L von der Zeit unabhängig sind; dagegen wird der Widerstandsverlauf allgemein durch irgendeine Funktion $R(t)$ dargestellt. Wenn im Stromkreise eine elektromotorische Kraft $E(t)$ wirkt, und wenn mit $J(t)$ der durchfliessende Strom bezeichnet wird, so gilt offenbar die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad L \frac{\mathrm{d}J(t)}{\mathrm{d}t} + R(t)\, J(t) + \frac{1}{C} \int_0^t J(\tau)\, \mathrm{d}\tau = E(t)\,, \quad t \geqq 0\,.$$

(Es ist vorausgesetzt, dass der Stromkreis für $t < 0$ im Ruhezustand war.) Mann soll den Stromverlauf $J(t)$ bestimmen.

Die Funktion $J(t)$ kann z. B. in der Weise ermittelt werden, indem die Integrodifferentialgleichung (a) direkt durch irgendeine Methode aufgelöst wird. Dem Leser ist jedoch gewiss die „Heaviside'sche Operatorenrechnung" bekannt. Dort werden die Symbole D und D^{-1}, die das Derivieren bzw. Integrieren bezeichnen, eingeführt,

d. h. für welche $Dx(t) = x'(t)$; $D^{-1}x(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$ ist. Mit Hilfe dieser Symbolik kann die Gl. (a) in der Form

$$\text{(b)} \qquad \left(LD + R(t) + \frac{1}{C} D^{-1}\right) J(t) = E(t)$$

geschrieben werden. Setzen wir vorläufig einfachheitshalber voraus, dass $R(t) \equiv R_0 = konst.$ ist. In diesem Falle ist die Heaviside'sche Operatorenrechnung imstande, die inverse Operation zu $LD + R_0 + \frac{1}{C} D^{-1}$ zu konstruieren, d. h. man kann eine solche Operation A finden, für welche

$$A\left(LD + R_0 + \frac{1}{C} D^{-1}\right) x = x$$

gilt. Wendet man diese Operation zu beiden Seiten der Gl. (a) an, so bekommt man unmittelbar die Lösung $J(t) = AE(t)$.

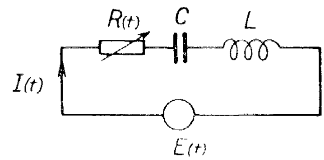

Abb. 1.

Jetzt treten folgende Fragen auf: Vor Allem, ist es möglich, die Resultate der Heaviside'schen Operatorenrechnung in der Weise zu erweitern, dass sie auch auf die Fälle, in welchen $R(t)$ nicht konstant ist, bzw. in welchen sogar L und C von der Zeit abhängen, anwendbar sind? Wie kann dann die inverse Operation A (wenn sie überhaupt existiert) konstruiert werden? Kann dann das eben angedeutete Lösungsverfahren auch in den Fällen, in welchen ein Gleichungssystem vom Typ (a) mit nichtverschwindenden Anfangsbedingungen vorgelegt ist, angewendet werden? Ausserdem wird es vorteilhaft sein, wenn direkt aus der Struktur der rechten Seiten des Systems vom Typ (a) die Struktur der Lösung abgeschätzt werden kann, ohne die Lösung auswerten zu müssen. D. h. zum Beispiel, wenn die rechten Seiten irgendwelche Impulse enthalten, ob auch die Lösung Impulse enthält bzw. stetig ist, usw.

Wie später ersichtlich wird, sind gerade die Operatoren dazu fähig, alle angegebenen Fragen zu bejahen. Aus dem Charakter der Probleme geht hervor, dass es vorteilhaft wird, die Theorie der Operatoren auf dem Systeme der Schwartz'schen Distributionen aufzubauen, sodass es nicht notwendig sein wird, die Existenz einer genügenden Anzahl von Ableitungen der rechten Seiten von (a) vorauszusetzen, wobei gleichzeitig auch die Fälle, in welchen Impulse vorkommen, bearbeitet werden können.

Im Weiteren wird vorausgesetzt, dass der Leser mit den Elementen der Theorie der Schwartz'schen Distributionen vertraut ist. (Hinreichenden Umfang der Kenntnisse findet der Leser in [1], S. 12–62, oder in [2], S. 407–415.)

Einführend werden einige weitere Tatsachen der Distributionstheorie, welche für's Weitere notwendig sind, ohne Beweis angedeutet (bezügl. ihrer Beweise vergl. [3]), und die Operatoren eingeführt. Dabei werden gleichzeitig die Anwendungsfragen besprochen.

Widmen wir uns also jetzt der Lösung der festgesetzten Aufgaben!

Es sei D_1 das System aller Distributionen, die im Intervall $(-\infty, 0)$ verschwinden. Wie bekannt, die Aussage „die Distribution f verschwindet im Intervall $(-\infty, 0)$" bedeutet, dass f folgende Eigenschaft besitzt: zu jedem $t_0 \in (-\infty, 0)$ existiert eine solche Umgebung I_{t_0} des Punktes t_0 (d. h. ein offenes Intervall, das den Punkt t_0 enthält), dass für jede Funktion $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$ (wo mit $\boldsymbol{K}$ das System aller reellen, unbeschränkt differenzierbaren finiten Funktionen bezeichnet ist), welche ausserhalb I_{t_0} verschwindet, $(f, \phi) = 0$ ist. (Vergl. [1], [2].)

Es ist offenbar, dass beispielsweise die Distributionen δ_T, H_T, ($H_T(t) = 1$ für $t > T$, $H_T(t) = 0$ für $t \leqq T$), $H_T \cos t$, $T \geqq 0$ u. s. w. dem Systeme D_1 angehören, dagegen für δ'_{-1}, $g = \sin t$ für alle t, offenbar $\delta'_{-1}, g \notin D_1$ gilt.

Im Weiteren wird noch folgende Symbolik benützt: wenn $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$ ist, so sei Q_ϕ die Menge aller t, für welche $\phi(t) \neq 0$ ist, und $\overline{Q}_\phi$ sei die Abschliessung von Q_ϕ.

Da die ganze beabsichtigte Theorie auf dem Systeme der im Intervall $(-\infty, 0)$ verschwindenden Distributionen aufgebaut wird, kann der Begriff des Produktes einer solchen Distribution mit der Funktion einigermassen verallgemeinert werden. Zu diesem Zwecke führen wir folgende Bezeichnung ein:

Es sei F_1 das System aller reellen Funktionen, die im Intervall $\langle 0, \infty)$ alle Ableitungen besitzen. (Im Punkte $t = 0$ sind naturgemäss die rechtsseitigen Ableitungen zu verstehen.)

Also z. B. gilt e^t, $\cos t$, $\dfrac{1}{t+1}$, $\dfrac{1}{(t+5)^3}$, $\sin \dfrac{1}{t+1} \in F_1$, sowie für die Funktion $g(t)$, welche durch die Gleichungen $g(t) = e^{-1/t^3}$, $t \neq 0$; $g(0) = 0$ definiert ist, $g(t) \in F_1$ gilt; dementgegen ist $\dfrac{1}{t}$, $|t - 1|$, $H_1(t)$, $\dfrac{1}{\sin t} \notin F_1$.

Es sei $\alpha(t) \in F_1$; die Funktion $\bar{\alpha}(t)$ soll die Fortsetzung der Funktion $\alpha(t)$ heissen, wenn $\bar{\alpha}(t)$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ alle Ableitungen besitzt, wobei $\bar{\alpha}(t) = \alpha(t)$ für $t \in \langle 0, \infty)$ ist. Man kann beweisen, dass zu jeder Funktion $\alpha(t) \in F_1$ eine Fortsetzung existiert.

Wir definieren jetzt das Produkt αf der Distribution $f \in D_1$ mit der Funktion $\alpha(t) \in F_1$ durch die Gleichung

$$(1) \qquad (\alpha f, \phi) = (f, \bar{\alpha}\phi) .$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass das eben definierte Produkt ebenfalls zum Systeme D_1 gehört und dass es von der Auswahl der Fortsetzung $\bar{\alpha}(t)$ unabhängig ist, d. h. dass αf eindeutig definiert ist. (Diese Tatsache hat ihren Ursprung im Verschwindensein der Distribution f im Intervall $(-\infty, 0)$.)

Führen wir ein einfaches Beispiel an! Es sei $\alpha(t) \in F_1$, $T \geqq 0$; dann gilt $(\alpha\delta_T, \phi) = (\delta_T, \bar{\alpha}\phi) = \bar{\alpha}(T)\,\phi(T) = \alpha(T)\,\phi(T) = (\delta_T, \alpha(T)\,\phi) = (\alpha(T)\,\delta_T, \phi)$, sodass $\alpha\delta_T = \alpha(T)\,\delta_T$ wie im Sinne des üblichen Produktes gilt.

Für die Distributionen aus D_1 können folgende Sätze leicht bewiesen werden:

Satz 1. *Es seien* α, β *reelle Zahlen*, $f, g \in \boldsymbol{D}_1$; *dann gilt*

a) $\alpha f + \beta g \in \boldsymbol{D}_1$,
b) $f' \in \boldsymbol{D}_1$.

Satz 2. *Es sei* $f_n \in \boldsymbol{D}_1$, $n = 1, 2, \ldots$ *und es gelte* $f_n \to f$; *dann gilt* $f \in \boldsymbol{D}_1$. *Wenn überdies* $\alpha \in \boldsymbol{F}_1$ *ist, dann gilt* $\alpha f_n \to \alpha f$.

Satz 3. *Es sei* $f \in \boldsymbol{D}_1$, $\alpha \in \boldsymbol{F}_1$ *und es gelte* $\alpha(t) \neq 0$ *im Intervall* $\langle 0, \infty)$; *wenn* $\alpha f = 0$ *ist, so gilt* $f = 0$.

Wichtig ist folgender Satz:

Satz 4. *Wenn* $f \in \boldsymbol{D}_1$ *regulär ist, (d. h. es gibt eine lokal integrierbare Funktion* $f(t)$ *derart, dass* $(f, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \phi(t)\, \mathrm{d}t$ *für alle* $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$ *ist), dann gilt* $f(t) = 0$ *fast überall im Intervall* $(-\infty, 0)$.

Für weitere Überlegungen wird ein gewisses Produkt der Distribution mit der Funktion von zwei Veränderlichen von grundsätzlicher Bedeutung sein. Zu diesem Ziel wir führen folgende Bezeichnung ein:

Es sei $\boldsymbol{F}_1^2$ das System aller reellen Funktionen $W(t, \tau)$, welche im Quadrant $t, \tau \geqq 0$ definiert sind und dort alle partielle Ableitungen besitzen.

Solche Funktionen sind beispielsweise $t\tau^3$, $(t - \tau)^5$, $\dfrac{1}{t + 3\tau + 1}$, $e^{t\tau}$ u. s. w., dementgegen ist $t + \dfrac{1}{\tau - 1}$, $H_1(t + 2\tau) \notin \boldsymbol{F}_1^2$.

Direkt aus der Definition von $\boldsymbol{F}_1^2$ ist ersichtlich, dass folgende Behauptungen gültig sind:

a) Wenn α_1, α_2 reelle Zahlen sind und $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ ist, so gilt

$$\alpha_1 W_1(t, \tau) + \alpha_2 W_2(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2 .$$

b) Wenn $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ ist, und $i, k \geqq 0$ ganze Zahlen sind, so gilt $\dfrac{\partial^{i+k} W(t, \tau)}{\partial t^i \partial \tau^k} \in \boldsymbol{F}_1^2$; wenn ausserdem $a(t) \in \boldsymbol{F}_1$ ist, so gilt $a(t)\, W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$, $W(t, \tau)\, a(\tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$.

Analog wie im Falle des Systems $\boldsymbol{F}_1$, die Funktion $\overline{W}(t, \tau)$ soll die Fortsetzung von $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ heissen, wenn $\overline{W}(t, \tau)$ in der ganzen Ebene $-\infty < t, \tau < \infty$ alle partiellen Ableitungen besitzt und wenn $\overline{W}(t, \tau) = W(t, \tau)$ für $t, \tau \geqq 0$ gilt. (Man kann beweisen, dass die Fortsetzung immer existiert.)

Jetzt kann das beabsichtigte Produkt eingeführt werden.

Es sei $f \in \boldsymbol{D}_1$, $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$, und wir definieren auf $\boldsymbol{K}$ das Funktional $[Wf]$ durch die Gleichung

$$([Wf], \phi) = (f, \phi_W), \tag{2}$$

wo

$$\phi_W(t) = -\int_{-\infty}^{t} \overline{W}(\tau, t)\, \phi(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{W}(\tau, t)\, \phi(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right) . \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{3}$$

ist, wobei mit $\overline{W}(t, \tau)$ irgendeine Fortsetzung der Funktion $W(t, \tau)$ bezeichnet ist und die Funktion $\phi_0(t) \in \boldsymbol{K}$ die Bedingungen $\overline{Q}_{\phi_0} \subset (-\infty, 0)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$ erfüllt.

Dann gilt folgender Satz.

Satz 5. *Das Funktional* $[Wf]$ *gehört zum Systeme* $\boldsymbol{D}_1$ *und hängt von der Auswahl der Funktion* $\overline{W}(t, \tau)$ *und* $\phi_0(t)$, *sofern diese die Bedingungen* $\overline{Q}_{\phi_0} \subset (-\infty, 0)$, $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$ *erfüllt, nicht ab.*

Das eben eingeführte Produkt $[Wf]$ erscheint als eine Verallgemeinerung des Integrals, dessen Kern die Funktion $W(t, \tau)$ ist. Man kann nämlich folgenden Satz beweisen:

Satz 6. *Es sei* $f \in \boldsymbol{D}_1$ *regulär,* $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$; *dann ist* $[Wf]$ *ebenfalls regulär und fast überall gleich der Funktion*

$$\int_0^t W(t, \tau) f(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \quad t \in (-\infty, \infty)\,.$$

Führen wir jetzt ein Beispiel an!

Beispiel 1. Es sei $W(t, \tau) = t - \tau$, $f \in \boldsymbol{D}_1$ regulär, im Intervall $(0, \infty)$ fast überall gleich der Funktion e^{2t}. Man soll $[Wf]$ bestimmen. Laut Satz 6 gilt, dass fast überall $[Wf] = \int_0^t (t - \tau)\, e^{2\tau}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{4}(e^{2t} - 2t - 1)$ für $t > 0$, $[Wf] = 0$ für $t \leqq 0$ ist.

(Beispiele, in welchen f nicht regulär ist, werden später angegeben.)

Unmittelbar aus der Definition des Produktes $[Wf]$ ergeben sich folgende Behauptungen (die Distributivität des Produktes):

Satz 7. *a) Es seien* $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$; $f, g \in \boldsymbol{D}_1$; α, β *reelle Zahlen; dann gilt* $[W(\alpha f + \beta g)] = \alpha[Wf] + \beta[Wg]$.

b) Es seien $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$; $f \in \boldsymbol{D}_1$; *dann gilt*

$$[(W_1 + W_2)\ f] = [W_1 f] + [W_2 f]\,.$$

Weiter gilt

Satz 8. *Es sei* $a(t) \in \boldsymbol{F}_1$; $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$; $f \in \boldsymbol{D}_1$; *dann gilt*

a) $a[Wf] = [(aW) f]$, *wo* $(aW)(t, \tau) = a(t)\, W(t, \tau)$ *ist,*

b) $[W(af)] = [(Wa_\tau) f]$, *wo* $(Wa_\tau)(t, \tau) = W(t, \tau)\, a(\tau)$ *ist.*

Das Produkt $[Wf]$ ist in f stetig, d. h. es gilt:

Satz 9. *Es sei* $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$; $f, f_n \in \boldsymbol{D}_1$, $n = 1, 2, \ldots$ *und gelte* $f_n \to f$; *dann gilt* $[Wf_n] \to [Wf]$.

Führen wir jetzt folgende Symbolik ein:

Es seien $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ und wir definieren die Funktion $(W_1 \times W_2)(t, \tau)$ durch die Gleichung

$$(W_1 \times W_2)(t, \tau) = \int_\tau^t W_1(t, u)\, W_2(u, \tau)\, \mathrm{d}u \quad \text{für} \quad t, \tau \geqq 0\,.$$

Man sieht leicht ein, dass ebenfalls $(W_1 \times W_2)(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ ist. Man beachte, dass im Allgemeinen die Gleichung $W_1 \times W_2 = W_2 \times W_1$ nicht besteht, d. h. dass das „Produkt" $W_1 \times W_2$ nicht kommutativ ist.

Jetzt kann schon folgender wichtiger Satz ausgesprochen werden:

Satz 10. *Es seien* $W_1(t, \tau)$, $W_2(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$; $f \in \boldsymbol{D}_1$; *dann gilt*

$$[W_1[W_2 f]] = [(W_1 \times W_2) f]\,. \tag{4}$$

Es ist klar, dass die Bedeutung des Satzes 10 darin besteht, dass er es ermöglicht, das „zweifache" distributive Produkt auf ein „einfaches" zu reduzieren.

Beispiel 2. Es sei $W_1(t, \tau) = t - \tau$; $W_2(t, \tau) = t\tau$. Nach Definition gilt

$$(W_1 \times W_2)(t, \tau) = \int_\tau^t (t - z)(z\tau)\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{6}(t^3\tau - 3t\tau^3 + 2\tau^4)\,;$$

für jedes $f \in \boldsymbol{D}_1$ gilt also laut Satz 10, dass

$$[(t - \tau)[(t\tau) f]] = [\tfrac{1}{6}(t^3\tau - 3t\tau^3 + 2\tau^4) f]$$

ist.

Für das eingeführte „Produkt" $W_1 \times W_2$ bleibt das assoziative Gesetz gültig, d. h. dass folgender Satz gilt:

Satz 11. *Es seien* W_1, W_2, $W_3 \in \boldsymbol{F}_1^2$; *dann gilt*

$$W_1 \times (W_2 \times W_3) = (W_1 \times W_2) \times W_3\,. \tag{5}$$

Dieser Satz besagt, dass dem Symbol $W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n$ durch die Gl. (5) Sinn gegeben ist, d. h. dass es gleichgültig ist, wie die Glieder des Produktes einklammert sind.

Definieren wir jetzt für $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ die „Potenz" $W^{\times k}(t, \tau)$ durch die Gleichung

$$W^{\times k} = (W^{\times (k-1)}) \times W\,; \quad k = 2, 3, \ldots\,; \quad W^{\times 1} = W\,. \tag{6}$$

Aus Satz 11 ergibt sich dann unmittelbar folgende Behauptung:

Satz 12. *Wenn* $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ *ist, so gilt für alle ganzen Zahlen* $m, n \geqq 1$ *die Gleichung*

$$W^{\times m} \times W^{\times n} = W^{\times (m+n)}\,. \tag{7}$$

Ganz offensichtlich ist auch folgender Satz:

Satz 13. *Wenn* W_1, W_2, $W_3 \in \boldsymbol{F}_1^2$ *ist, so gilt*

$$W_1 \times (W_2 + W_3) = W_1 \times W_2 + W_1 \times W_3\,.$$

Aus den Sätzen 11 ÷ 13 geht also hervor, dass mit dem Produkte „$\times$" gerade so wie mit dem üblichen Produkte operiert werden kann, nur mit der Ausnahme, dass die Reihenfolge der Faktoren berücksichtigt werden muss.

Widmen wir jetzt einige Zeilen einem wichtigen Speziallfall des Produktes $[Wf]$. Zu diesem Zweck definieren wir die Funktionen $U_k(t, \tau)$ durch die Gleichung

$$U_k(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{k-1}}{(k - 1)!}\,; \quad k = 2, 3, \ldots\,; \quad U_1(t, \tau) \equiv 1\,. \tag{8}$$

Offensichtlich gilt $U_k(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$. Durch einige Zwischenrechnungen (die ich als eine einfache Übung dem Leser überlasse) ergibt sich, dass für beliebige ganze Zahle $k, r \geqq 1$ folgende Formel

(9) $$(U_k \times U_r)(t, \tau) = U_{k+r}(t, \tau)$$

gilt.

Mit Hilfe der Funktionen U_k definieren wir noch folgendes Symbol: Wenn $f \in \boldsymbol{D}_1$ ist, so sei

(10) $$f^{(-k)} = [U_k f]\,; \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Auf Grund des Satzes 6 überzeugt man sich leicht davon, dass $f^{(-k)}$ eine Verallgemeinerung des üblichen bestimmten k-ten Integrals darstellt. Tatsächlich, wenn $f \in \boldsymbol{D}_1$ regulär ist, so bekommt man laut Satz 6 mit Hilfe von (10) und (8), dass

$$f^{(-1)} = [U_1 f] = \int_0^t U_1(t, \tau) f(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

gilt.

Analog für $k = 2$ ist

$$f^{(-2)} = [U_2 f] = \int_0^t (t - \tau) f(\tau)\, d\tau = \int_0^t \int_0^\sigma f(\omega)\, d\omega\, d\sigma\,,$$

u. s. w.

Für das eben definierte „bestimmte Integral" gilt folgender Satz:

Satz 14. *Es sei $f \in \boldsymbol{D}_1$; k, r seien beliebige ganze Zahlen; dann gilt $(f^{(k)})^{(r)} = f^{(k+r)}$, wobei unter $f^{(0)}$ die Distribution f zu verstehen ist.*[1])

Dieser Satz besagt, dass das eingeführte „Integrieren" und distributive Derivieren gegenseitig inverse Operationen sind. Speziell gilt nämlich $(f')^{(-1)} = (f^{(1)})^{(-1)} = f$ und $(f^{(-1)})' = f$.

Folgender Satz, der die Verallgemeinerung der üblichen Integrationsregel „per-partes" darstellt, wird nützlich sein.

Satz 15. *Es sei $a(t) \in \boldsymbol{F}_1$, $f \in \boldsymbol{D}_1$; wenn $a^{(-1)} = \int_0^t a(\tau)\, d\tau + C$ ist, wo C eine beliebige reelle Konstante darstellt, so gilt*

(11) $$(af)^{(-1)} = a^{(-1)} f - (a^{(-1)} f')^{(-1)}\,.$$

Aus Satz 12 ergibt sich unmittelbar, dass für reelle Zahlen α, β und f, $g \in \boldsymbol{D}_1$ folgende Formel besteht:

(12) $$(\alpha f + \beta g)^{(-1)} = \alpha f^{(-1)} + \beta g^{(-1)}\,.$$

Analog, aus Satz 9 folgt, dass das „Integrieren" stetig ist, d. h. dass $f_n \to f$ die Konvergenz $f_n^{(-1)} \to f^{(-1)}$ zur Folge hat.

Widmen wir wieder die Aufmerksamkeit dem allgemeinen Produkte $[Wf]$ zu! Praktisch ist der Fall wichtig, in welchem $W(t, \tau)$ entartet ist. Da gilt folgender Satz:

---

[1]) Bemerkung: Falls k positiv ist, so ist unter $f^{(k)}$ naturgemäss die k-te Ableitung von f zu verstehen.

Satz 16. *Es seien $a_i(t), b_i(t) \in \boldsymbol{F}_1$, $i = 1, 2, \ldots, r$ und sei $W(t, \tau) = \sum_{i=1}^{r} a_i(t)\, b_i(\tau)$; dann gilt*

$$[Wf] = \sum_{i=1}^{r} a_i(b_i f)^{(-1)}. \tag{13}$$

Beispiel 3. Es sei $W(t, \tau) = t\tau^3 + 1 + e^{t+2\tau} + \cos(t + \tau)$, $f \in \boldsymbol{D}_1$; man soll $[Wf]$ durch „Integrale" ausdrücken.

Offenbar ist $W(t, \tau)$ entartet, da

$$W(t, \tau) = t \,.\, \tau^3 + 1 \,.\, 1 + e^t \,.\, e^{2\tau} + \cos t \,.\, \sin \tau - \sin t \,.\, \cos \tau$$

gilt.

Laut Satz 16 gilt also

$$[Wf] = t(t^3 f)^{(-1)} + f^{(-1)} + e^t(e^{2t} f)^{(-1)} + \cos t(\sin t \,.\, f)^{(-1)} - \sin t(\cos t \,.\, f)^{(-1)}.$$

Beispiel 4. Es sei $k \geqq 1$ eine ganze Zahl, $f \in \boldsymbol{D}_1$; man soll das „k-te Integral" $f^{(-k)}$ durch einfache „Integrale" ausdrücken. Laut Definition (10) und (8) gilt

$$f^{(-k)} = [U_k f], \quad U_k(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{k-1}}{(k - 1)!}.$$

Da

$$U_k(t, \tau) = \frac{1}{(k - 1)!} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k - 1}{r} t^{k-r-1} \tau^r$$

gilt, so ist $U_k(t, \tau)$ entartet und laut Satz 16 ergibt sich

$$f^{(-k)} = \frac{1}{(k - 1)!} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k - 1}{r} t^{k-r-1} (t^r f)^{(-1)}.$$

Der Kürze wegen führen wir folgende Bezeichnung ein: wenn $H(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ ist, so sei $H^* = H(t, t)$. Offenbar gilt $H^* \in \boldsymbol{F}_1$.

Bemerkung: Durch diese Bezeichnung ist offensichtlich auch den Symbolen vom Typ $\left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^*$ und anderen Sinn gegeben, und zwar

$$\left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^* = \left\{\frac{\partial^i W(t, \tau)}{\partial t^i}\right\}_{\tau = t}.$$

Dann gilt folgender Satz:

Satz 17. *Es seien $a(t) \in \boldsymbol{F}_1$, $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$, $f \in \boldsymbol{D}_1$, $k \geqq 1$ ganze Zahl; dann gilt*

a) $$[W(af^{(k)})] = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \left(\frac{\partial^i (Wa_\tau)}{\partial \tau^i}\right)^* f^{(k-i-1)} + (-1)^k \left[\frac{\partial^k (Wa_\tau)}{\partial \tau^k} f\right],$$

wo $(Wa_\tau)(t, \tau) = W(t, \tau)\, a(\tau)$ ist,

b) $$[Wf]^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \left\{\left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^* f\right\}^{(k-i-1)} + \left[\frac{\partial^k W}{\partial t^k} f\right].$$

Beispiel 5. Es sei $a = t^2$, $W = e^{t\tau}$, $f \in \boldsymbol{D}_1$; man soll $[e^{t\tau}(t^2 f'')]$ und $[e^{t\tau}f]''$ bestimmen. Hier ist $Wa_\tau = e^{t\tau}\tau^2$, woraus $\dfrac{\partial(Wa_\tau)}{\partial\tau} = \tau e^{t\tau}(t\tau + 2)$, $\dfrac{\partial^2(Wa_\tau)}{\partial\tau^2} = e^{t\tau}(t^2\tau^2 + 4t\tau + 2)$ folgt; hiermit ist $(Wa_\tau)^* = t^2 e^{t^2}$, $\left(\dfrac{\partial(Wa_\tau)}{\partial\tau}\right)^* = te^{t^2}(t^2 + 2)$. Macht man endlich von Satz 17 Gebrauch, so bekommt man

$$[e^{t\tau}(t^2 f'')] = t^2 e^{t^2} f' - te^{t^2}(t^2 + 2) f + [e^{t\tau}(t^2\tau^2 + 4t\tau + 2) f] .$$

Analog ergibt sich $\dfrac{\partial W}{\partial t} = \tau e^{t\tau}$, $\dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \tau^2 e^{t\tau}$, woraus $W^* = e^{t^2}$, $\left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)^* = te^{t^2}$ folgt, sodass laut Satz 17 $[e^{t\tau}f]'' = (e^{t^2}f)' + te^{t^2}f + [\tau^2 e^{t\tau} f]$ gilt.

Beispiel 6. Man soll die Behauptung, welche im folgenden Satze ausgesprochen ist, beweisen.

Satz 18. *Es sei* $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$, $T \geqq 0$; *dann ist* $[W\delta_T]$ *regulär, und fast überall gleich der Funktion* $w(t) = W(t, T)$ *für* $t > T$, $w(t) = 0$ *für* $t \leqq T$.

Um den Beweis durchzuführen, beachte man, dass $\delta_T = H_T'$ gilt, wo H_T regulär ist ($H_T(t) = 1$ für $t > T$, $H_T(t) = 0$ für $t \leqq T$). Macht man von Satz 17 Gebrauch, so kann man $[W\delta_T] = [WH_T'] = W^* H_T - \left[\dfrac{\partial W}{\partial\tau} H_T\right]$ schreiben. Da H_T regulär ist, so ist laut Satz 6 $\left[\dfrac{\partial W}{\partial t} H_T\right]$ ebenfalls regulär, sodass fast überall gilt:

$$[W\delta_T] = W(t, t)\, H_T(t) - \int_0^t \frac{\partial W(t, \tau)}{\partial\tau} H_T(\tau)\, d\tau . \tag{14}$$

Wenn jetzt $t \leqq T$ ist, so verschwindet offenbar die rechte Seite der Gl. (14). Für $t > T$ bekommt man

$$[W\delta_T] = W(t, t) - \int_T^t \frac{\partial W(t, \tau)}{\partial\tau}\, d\tau = W(t, t) - [W(t, \tau)]_{\tau=T}^{\tau=t} = W(t, T) ,$$

w. z. b. w.

Um noch ein Beispiel für die Auswertung von $[Wf]$, wo f nicht regulär ist, anzuführen, sei folgende Aufgabe gelöst:

Beispiel 7. Man soll $[e^{t\tau}\delta_1'']$ ermitteln. In Übereinstimmung mit Satz 17 bekommt man

$$[e^{t\tau}\delta_1''] = e^{t^2}\delta_1' - te^{t^2}\delta_1 + [t^2 e^{t\tau}\delta_1] ;$$

da aber $\alpha\delta_T' = \alpha(T)\,\delta_T' - \alpha'(T)\,\delta_T$; $\alpha\delta_T = \alpha(T)\,\delta_T$ gilt, so ergibt sich mit Hilfe von Satz 18 schliesslich nach einigen Zwischenrechnungen $[e^{t\tau}\delta_1''] = e\delta_1' - 3e\delta_1 + g$, wo $g(t) = 0$ für $t \leqq 1$, $g(t) = t^2 e^t$ für $t > 1$ ist.

Führen wir jetzt einen wichtigen Satz, welcher die Konstruktion des inversen Operators ermöglicht, an!

Satz 19. *Es sei* $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$; *dann existiert eine einzige Funktion* $H(t, \tau)$, *die im Quadrant* $t, \tau \geqq 0$ *definiert und stetig ist, welche die Gleichung*

$$H(t, \tau) + W(t, \tau) + \int_\tau^t H(t, z)\, W(z, \tau)\, \mathrm{d}z = 0\,, \quad t, \tau \geqq 0 \tag{15}$$

erfüllt.

Ausserdem gilt

$$a)\ H(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i (W(t, \tau))^{\times i}\,; \quad (W(t, \tau))^{\times 1} = W(t, \tau)\,; \quad t, \tau \geqq 0\,, \tag{16}$$

wobei die Reihe (16) *in jedem Quadrat* $0 \leqq t, \tau \leqq T < \infty$ *gleichmässig konvergiert,*

b) $H_k(t, \tau) \to H(t, \tau)$ *gleichmässig in jedem Quadrat* $0 \leqq t, \tau \leqq T < \infty$, *wobei die Folge* $H_k(t, \tau)$ *durch*

$$H_k(t, \tau) = -\int_\tau^t H_{k-1}(t, z)\, W(z, \tau)\, \mathrm{d}z - W(t, \tau)\,; \quad t, \tau \geqq 0\,; \quad k = 2, 3, \ldots \tag{16a}$$

$H_1(t, \tau) = -W(t, \tau)$ *definiert ist,*

c) $H(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$,

d) für $t, \tau \geqq 0$ *ist die Gleichung*

$$H(t, \tau) + W(t, \tau) + \int_\tau^t W(t, z)\, H(z, \tau)\, \mathrm{d}z = 0 \tag{17}$$

erfüllt.

(Ein Beispiel der Anwendung dieses Satzes wird später angegeben.)

Widmen wir jetzt einige Zeilen den Eigenschaften der Distributionsordnung! Wir beginnen mit der Definition.

Es sei $f \in \boldsymbol{D}_1$; die kleinste ganze Zahl n, für welche eine lokal integrierbare Funktion $F(t)$ derart existiert, dass $f^{(-n)} = F$ ist, wird die Ordnung der Distribution f genannt und wird mit dem Symbol $r(f) = n$ bezeichnet. (Offenbar verschwindet eine solche Funktion $F(t)$ im Intervall $(-\infty, 0)$ fast überall.) Wenn $f \in \boldsymbol{D}_1$ regulär ist und die entsprechende Funktion $f(t)$ alle (gewöhnliche) Ableitungen besitzt, wird $r(f) = -\infty$ gesetzt. Speziell gilt also $r(0) = -\infty$. Falls für $f \in \boldsymbol{D}_1$ keine solche Zahl n existiert, so wird der Distribution f keine Ordnung zugeordnet. (Derartige Distributionen existieren, wie z. B. $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k^{(k)} \in \boldsymbol{D}_1$.)

Das System aller Distributionen aus D_1, welche die Ordnung besitzen, wird mit D_1^* bezeichnet.

Was die Ordnung der lokal integrablen Funktionen anbelangt, erweist sich folgender Satz als zweckmässig.

Satz 20. *Es sei* $f(t)$ *eine Funktion, die im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *fast überall einer stetigen, für* $t < 0$ *verschwinden Funktion* $\tilde{f}(t)$ *gleich ist;* $\tilde{f}(t)$ *besitze überall im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *die gewöhnliche* $(k-1)$*-te Ableitung* $\tilde{f}^{(k-1)}(t)$, *welche fast überall die Ableitung* $F(t)$ *hat, wobei* $F(t)$ *keine primitive Funktion darstellt; dann gilt* $r(f) = -k$.

Bemerkung: Die Aussage „$F(t)$ stellt keine primitive Funktion dar" heisst, dass es keine lokal integrable Funktion $G(t)$ gibt, für welche $F(t) = \int_0^t G(\tau)\,d\tau + C$ für alle t wäre.

Anschaulichkeitshalber führen wir einige Ordnungsrelationen, die der Leser leicht an Hand der eben ausgesprochenen Definition bestätigen kann, an!

Es ist $r(t^3 H_0) = -3$; $r(\delta_T) = 1$; $r(\delta_T^{(k)}) = k + 1$; aber $r(H_T) = 0$; $r(H_0 \cos t) = 0$, obwohl $H_T(t)$ für $t \neq T$ alle gewöhnliche Ableitungen besitzt.

Für die Ordnung kann man folgende Sätze beweisen:

Satz 21. *Es seien* $f \in \boldsymbol{D}_1^*$, $C \neq 0$ *eine reelle Zahl,* k *eine ganze Zahl; dann gilt*

a) $r(Cf) = r(f)$,

b) $r(f^{(k)}) = k + r(f)$.

Für die Ordnung der Summe zweier Distributionen gilt:

Satz 22. *Es seien* $f, g \in \boldsymbol{D}_1^*$; *dann ist* $f + g \in \boldsymbol{D}_1^*$ *und gilt*

a) $r(f + g) = \max\,[r(f), r(g)]$, *falls* $r(f) \neq r(g)$ *ist,*

b) $r(f + g) \leqq r(f)$, *falls* $r(f) = r(g)$ *ist.*

Also z. B. für $f = \delta_0'' + H_T$, $g = -\delta_0''$ gilt $r(f) = r(g) = 3$, dagegen ist $r(f + g) = 0$.

Für das Produkt kann folgender Satz bewiesen werden:

Satz 23. *Es sei* $f \in \boldsymbol{D}^*$, $\alpha(t) \in \boldsymbol{F}_1$; *dann gilt* $r(\alpha f) \leqq r(f)$. *Wenn überdies* $\alpha(t) \neq 0$ *im Intervall* $\langle 0, \infty)$ *ist, so gilt* $r(\alpha f) = r(f)$.

Z. B., da $r(H_T) = 0$ gilt, so ergibt sich laut vorigen Satz $r(e^{-t} H_T) = 0$ u. s. w. Man beachte, dass für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in der Ungleichung für die Produktordnung die Voraussetzung über das Nichtverschwinden der Funktion $\alpha(t)$ wesentlich ist. Setzt man z. B. $\alpha = t$, so gilt $r(\delta_0') = 2$, aber es ist $r(t\delta_0') = r(-\delta_0) = 1$.

Man könnte hier auch Resultate, welche die Ordnung des Produktes $[Wf]$ betrachten, angeben; dieselben sind jedoch, vom Standpunkte unserer Bedürfnisse aus gesehen, nur von einem Hilfscharakter, und deshalb werden diese Fragen erst später, im Zusammenhang mit der Operatorordnung besprochen.

Jetzt sei noch die Beziehung des Produktes $[Wf]$ zu einer gewissen Tatsache der Theorie der linearen Differentialgleichungen, welche später brauchbar wird, kürzlich erwähnt.

Es seien $a_i(t)$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ reelle im Intervall $\langle 0, \infty)$ stetige Funktionen, wobei dort $a_n(t) \neq 0$ ist. Das System der Funktionen $\xi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ wird das Fundamentalsystem der Lösungen der Gleichung

$$a_n(t)\,\xi^{(n)} + a_{n-1}(t)\,\xi^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\,\xi = 0 \tag{18}$$

genannt, wenn

1) jede Funktion $\xi_i(t)$ die n-te Ableitung besitzt und in jedem Punkte des Intervalls $\langle 0, \infty)$ die Gl. (18) erfüllt,

2) die Funktionen $\xi_i(t)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ linear unabhängig sind.

Es ist gut bekannt, (vergl. [4], S. 206), dass dann die Wronski'sche Determinante $w(t)$ des Systems $\xi_1(t), \xi_2(t), \ldots, \xi_n(t)$ überall im Intervall $\langle 0, \infty)$ von Null verschieden ist.[2])

Definieren wir jetzt den Begriff der Lösung der Gl. (18) in dem Falle, wenn auf der rechten Seite derselben eine Distribution auftritt!

Es sei also $a_i(t) \in \boldsymbol{F}_1$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $f \in \boldsymbol{D}_1$; die Distribution x soll die Lösung der Gleichung

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = f \tag{19}$$

bei verschwindenden Anfangsbedingungen heissen, wenn $x \in \boldsymbol{D}_1$ ist und die Gl. (19) im distributiven Sinne erfüllt ist.

Man bemerke, dass die eben ausgesprochene Definition nur von Hilfscharakter ist, da später der Lösungsbegriff für allgemeinere Fälle definiert wird.

Dann gilt folgender Satz:

Satz 24. *Es sei* $a_i(t) \in \boldsymbol{F}_1$; $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $a_n(t) \neq 0$ *im Intervall* $\langle 0, \infty)$ *und* $f \in \boldsymbol{D}_1$. *Dann besitzt die Gl.* (19) *bei verschwindenden Anfangsbedingungen eine einzige Lösung* x, *für welche* $x = [Wf]$ *gilt, wo*

$$W(t, \tau) = \frac{1}{a_n(\tau)\, w(\tau)} \begin{vmatrix} \xi_1(\tau), & \xi_2(\tau), & \ldots, & \xi_n(\tau) \\ \xi_1'(\tau), & \xi_2'(\tau), & \ldots, & \xi_n'(\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{(n-2)}(\tau), & \xi_2^{(n-2)}(\tau), & \ldots, & \xi_n^{(n-2)}(\tau) \\ \xi_1(t), & \xi_2(t), & \ldots, & \xi_n(t) \end{vmatrix}$$

ist, wobei mit $\xi_i(t)$; $i = 1, 2, \ldots, n$ *das Fundamentalsystem der entsprechenden homogenen Gleichung* (18), *mit* $w(t)$ *seine Wronski'sche Determinante bezeichnet ist.*

(Ein Beispiel für die Anwendung des eben ausgesprochenen Satzes wird später, bei der Konstruktion des inversen Operators, angegeben.)

Widmen wir jetzt die Aufmerksamkeit der Einführung von Operatoren zu! Zuerst werden in Kurzform einige ihrer allgemeinen Eigenschaften erwähnt, und dann wird die beabsichtigte Operatorenklasse, welche für die dynamische Systeme die bedeutendste ist, definiert.

Es sei Ω eine nichtleere Untermenge des Systems $\boldsymbol{D}_1$. Die Menge Ω soll der Bereich heissen, wenn für beliebige Elemente $x, y \in \Omega$ und beliebige reelle Zahlen α, β das Element $\alpha x + \beta y$ ebenfalls zu Ω gehört.

[2]) Die Wronski'sche Determinante des Systems $\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)$ ist definiert durch der Gleichung

$$w(t) = \begin{vmatrix} \xi_1(t), & \xi_2(t), & \ldots, & \xi_n(t) \\ \xi_1'(t), & \xi_2'(t), & \ldots, & \xi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \xi_1^{(n-1)}(t), & \xi_2^{(n-1)}(t), & \ldots, & \xi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Es sei Ω_A ein Bereich; die Abbildung A der Menge Ω_A in die Menge $\boldsymbol{D}_1$ soll der Operator heissen. (Die „Abbildung" bedeutet, dass jedem Elemente $x \in \Omega_A$ gerade ein Element $y \in \boldsymbol{D}_1$, das mit Ax bezeichnet wird, zugeordnet ist.)

Der Operator A soll linear heissen, wenn für beliebige reelle Zahlen α, β und beliebige Distributionen $x, y \in \Omega_A$ die Gleichung

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha(Ax) + \beta(Ay)$$

gilt.

Die Menge Ω_A wird auch Originalbereich, die Menge $_A\Omega$, die aus allen Ax, $x \in \Omega_A$ besteht, wird Bildbereich genannt. Anstatt „Ω_A ist der Originalbereich von A" wird auch die Aussage „A ist auf Ω_A erklärt" benützt.

Man überzeugt sich leicht, dass der Bildbereich eines linearen Operators ein Bereich ist.

Führen wir jetzt die algebraischen Operationen mit Operatoren ein!

Es seien A, B Operatoren; die Gleichheit $A = B$ soll heissen, das $\Omega_A = \Omega_B$ ist und $Ax = Bx$ für jedes $x \in \Omega_A$ gilt.

Der Operator O, der auf Ω erklärt ist, soll Nulloperator heissen, wenn $Ox = 0$ für jedes $x \in \Omega$ ist. Analog, der Operator I soll Einheitsoperator heissen, falls $Ix = x$ für jedes $x \in \Omega$ ist.

Es sei A ein Operator, λ eine reelle Zahl; das Produkt λA sei durch die Gleichung $(\lambda A)\, x = \lambda(Ax)$, $x \in \Omega_A$, definiert. Wenn A linear ist, so ist λA offenbar ebenfalls linear. Man überzeugt sich leicht, dass folgende Gleichungen bestehen:

$$\lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)\, A\,; \quad 1 \,.\, A = A\,.$$

Da im Folgenden ausschliesslich lineare Operatoren betrachtet werden, wird der Ausdruck „Operator" einen linearen Operator bezeichnen.

Es seien jetzt A, B Operatoren, die auf Ω erklärt sind; die Summe $A + B$ wird auf Ω durch die Gleichung $(A + B)\, x = Ax + Bx$ definiert. Man überzeugt sich leicht davon, dass für Operatoren A, B, C, O, die auf Ω erklärt sind, und für reelle Zahlen λ_1, λ_2 folgende Gleichungen bestehen

$$\begin{gathered} A + B = B + A\,; \quad (A + B) + C = A + (B + C) \\ A + O = A\,; \quad A - A = O\,; \quad (-A = -1\,.\,A) \\ \lambda_1(A + B) = \lambda_1 A + \lambda_1 B\,; \quad (\lambda_1 + \lambda_2)\, A = \lambda_1 A + \lambda_2 A\,. \end{gathered}$$

Führen wir jetzt den Begriff des Operatorenproduktes ein! Es sei B auf Ω_B erklärt, A auf Ω_A, wobei $\Omega_A \supset {}_B\Omega$ ist. Das Produkt AB sei auf Ω_B durch die Gleichung $(AB)\, x = A(Bx)$ definiert. Man sieht leicht ein, dass AB linear ist, falls A, B lineare Operatoren sind. Ausserdem ist ersichtlich, dass $\lambda(AB) = (\lambda A)\, B = A(\lambda B)$ für jede reelle Zahl λ gilt.

Wenn jetzt A einen Operator, I den auf $_A\Omega$ erklärten Einheitsoperator darstellt, so gilt $IA = A$. Analog, wenn $\bar{I}$ auf Ω_A erklärter Einheitsoperator ist, so gilt $A\bar{I} = A$.[3])

[3]) Man beachte, dass die Gleichung $AI = IA$ in Allgemeinem nicht gültig ist, da die Originalbereiche von A und I sowie der Bildbereich von A nicht identisch zu sein brauchen.

Für das Operatorenprodukt gilt das assoziative und distributive Gesetz. Man kann nämlich leicht folgende Behauptungen beweisen:

1) Wenn ${}_C\Omega \subset \Omega_B$, ${}_B\Omega \subset \Omega_A$ ist, so gilt $A(BC) = (AB)\,C$.

2) Wenn $\Omega_A = \Omega_B = {}_C\Omega$ ist, so gilt $(A + B)\,C = AC + BC$.

3) Wenn $\Omega_B = \Omega_C$, $\Omega_A \supset {}_{B+C}\Omega$, $\Omega_A \supset {}_B\Omega$, $\Omega_A \supset {}_C\Omega$ ist, so gilt $A(B + C) = AB + AC$.

Wenn für irgendeinen Operator A die Inklusion ${}_A\Omega \subset \Omega_A$ gilt, kann man auf Ω_A die Potenz A^n durch die Gleichung $A^n = A \,.\, A^{n-1}$; $A^1 = A$; $n = 2, 3, \ldots$ definieren; auf Grund der vorigen Behauptung 1) ergibt sich, dass für beliebige ganze Zahlen $m, n \geqq 1$ die Gleichung $A^m \,.\, A^n = A^{m+n}$ besteht.

Führen wir jetzt den Begriff der Operatorinversion ein!

Der Operator $A \neq O$ soll regulär heissen, wenn

1) ${}_A\Omega = \Omega_A$ ist,

2) ein auf ${}_A\Omega$ erklärter Operator A^{-1} derart existiert, dass $A^{-1}(Ax) = x$ für jedes $x \in \Omega_A$ ist, d. h. dass $A^{-1}A = I$ auf Ω_A ist.

Dann gelten folgende Sätze:

Satz 25. *Wenn A linear und regulär ist, so gilt:*

a) $AA^{-1} = I$ *auf* Ω_A,

b) A^{-1} *ist linear und regulär.*

Satz 26. *Wenn A linear und ${}_A\Omega = \Omega_A$ ist, so ist A dann und nur dann regulär, wenn die Gleichung $Ax = 0$ die einzige Lösung $x = 0$ besitzt.*

Satz 27. *Es seien A, B regulär und es gelte $\Omega_A = \Omega_B$; dann ist AB ebenfalls regulär und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Es sei jetzt noch der Begriff der Operatorenstetigkeit eingeführt. Der Operator A soll stetig heissen, wenn $Ax_n \to Ax_0$ für jedes $x_0 \in \Omega_A$ und jede Folge $x_n \to x_0$; $x_n \in \Omega_A$; $n = 1, 2, \ldots$ gilt.

Man kann leicht beweisen, dass die Summe bzw. das Produkt von stetigen Operatoren ebenfalls ein stetiger Operator ist.

Um bessere Vorstellung über die Natur des Operators und der eben eingeführten Begriffe zu haben, seien jetzt einige einfache instruktive Beispiele angeführt.

Beispiel 8. Der Operator A sei auf $\boldsymbol{D}_1$ durch die Gleichung $Ax = (t + 1)\,x'$ erklärt. Es ist offensichtlich, dass A linear ist und dass ${}_A\Omega \subset \boldsymbol{D}_1$ gilt. Weiter sieht man leicht ein, dass A regulär ist. Definiert man nämlich auf $\boldsymbol{D}_1$ den Operator B durch die Gleichung $Bx = \left(\frac{1}{t+1}\, x\right)^{(-1)}$, so gilt für jedes $x \in \boldsymbol{D}_1$ laut Satz 14

$$(BA)\,x = B(Ax) = B\{(t + 1)\,x'\} = \left(\frac{1}{t+1} \,.\, (t + 1)\,x'\right)^{(-1)} = x\,.$$

Da B auf $\boldsymbol{D}_1$ erklärt ist und ${}_B\Omega \subset \boldsymbol{D}_1$ gilt, so kann man das Produkt AB bilden, für welches sich

$$(AB)x = A(Bx) = A\left(\frac{1}{t+1}x\right)^{(-1)} = (t+1)\left\{\left(\frac{1}{t+1}x\right)^{(-1)}\right\}' = x$$

ergibt.

Folglich ist B der inverse Operator A^{-1} zu A.

Beispiel 9. Es sei A auf $\boldsymbol{D}_1$ durch die Gleichung $Ax = tx' + x$ erklärt. Man überzeugt sich leicht davon, dass A nicht regulär ist. Tatsächlich, für $x = \delta_0$ gilt $A\delta_0 = 0$, sodass die Gleichung $Ax = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt; hiervon folgt laut Satz 26 die Behauptung. Man beachte an diesem Beispiel, dass der Originalbereich für die Regularität irgendeines Operators eine wesentliche Rolle spielt. Wenn nämlich der eben betrachtete Operator A nicht auf $\boldsymbol{D}_1$ sondern auf dem Systeme $\overline{\Omega_A}$ aller im Intervall $(-\infty, 1)$ verschwindenden Distributionen erklärt wäre, so wäre A regulär. In der Tat, definiert man den Operator B auf $\overline{\Omega_A}$ durch die Gleichung $Bx = gx^{(-1)}$, wo $g(t)$ eine im Intervall $(-\infty, \infty)$ unbeschränkt differenzierbare reelle Funktion darstellt, welche für $t \geqq 1$ mit $\frac{1}{t}$ identisch ist, so bestätigt man durch einfache Zwischenrechnung, dass dann $BA = AB = I$ auf $\overline{\Omega_A}$ gilt.

Beispiel 10. Es sei $\Omega_C = \boldsymbol{D}_1$, $Cx = x' + 2tx$; durch direkte Rechnung überzeugt man sich leicht, dass C regulär ist, und dass für den inversen Operator $C^{-1}x = = e^{-t^2}(e^{t^2}x)^{(-1)}$ gilt.

Beispiel 11. Es sei $h > 0$ und die Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ seien durch

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \exp\frac{1}{t-h} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t < h\,; & \beta(t) &= \exp\frac{1}{h-t} \quad \text{für} \quad t > h \\ &= 0 \quad \text{für} \quad t \geqq h\,; & &= 0 \quad \text{für} \quad t \leqq h \end{aligned}$$

definiert. Es sei ferner $W(t, \tau) = \alpha(t)\,\beta(\tau)$; offensichtlich gilt $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$. (Man beachte, dass $W(t, \tau) \not\equiv 0$ ist.) Definiert man jetzt auf $\boldsymbol{D}_1$ den Operator N durch die Gleichung $Nx = [Wx]$, so sieht man leicht ein, dass N ein Nulloperator ist. Tatsächlich, nach der Definition des Produktes $[Wx]$ gilt $(Nx, \phi) = ([Wx], \phi) = = (x, \phi_W)$, wo laut Gl. 3

$$\begin{aligned} (20) \quad \phi_W(t) &= -\int_{-\infty}^{t} \alpha(\tau)\,\beta(t)\,\phi(\tau)\,d\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau)\,\beta(t)\,\phi(\tau)\,d\tau\right) . \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\,d\tau = \\ &= \beta(t)\left\{-\int_{-\infty}^{t} \alpha(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau\right) . \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\,d\tau\right\} \end{aligned}$$

ist.

Für $t \geqq h$ gilt jedoch

$$-\int_{-\infty}^{t} \alpha(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau\right) . \int_{-\infty}^{t} \phi_0(\tau)\,d\tau = \int_{t}^{\infty} \alpha(\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau = 0\,,$$

sodass laut (20) $\phi_W(t) \equiv 0$ für beliebiege $\phi(t) \in \boldsymbol{K}$ ist. Es gilt also $(Nx, \phi) = (x, 0) = 0$, d. h. dass $Nx = 0$ für jedes $x \in \boldsymbol{D}_1$ ist.

Führen wir jetzt die beabsichtigte Operatorenklasse ein!

Es sei $\mathfrak{A}$ das System aller Operatoren A, die auf $\boldsymbol{D}_1$ durch die Gleichung

$$Ax = [Wx]^{(k)} \tag{21}$$

erklärt sind, wo $k \geqq 0$ irgendeine ganze Zahl und $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$ ist.

Wenn überdies für irgendeinen Operator $A \in \mathfrak{A}$ eine ganze Zahl $q > 0$ derart existiert, dass

$$W^* \equiv \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^* \equiv \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)^* \equiv \ldots \equiv \left(\frac{\partial^{q-2} W}{\partial t^{q-2}}\right)^* \equiv 0\,, \quad \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* \neq 0$$

im Intervall $\langle 0, \infty)$ gilt, so wird die Zahl $k - q$ die Ordnung des Operators genannt und mit $r(A)$ bezeichnet. Das System aller solchen Operatoren wird mit $\mathfrak{A}^*$ bezeichnet.

Aus der eben ausgesprochenen Definition ist mit Hilfe von Satz 7 ersichtlich, dass die Operatoren aus $\mathfrak{A}$ linear sind.

Ferner kann man beweisen, dass die Operatorordnung eindeutig definiert ist. (Man beachte nämlich, dass durch die Definition des Operators als eine Abbildung die Zahl k sowie die Funktion $W(t, \tau)$ nicht eindeutig bestimmt sind. Vergl. auch mit dem Beispiel 11!)

Jetzt gilt folgender wichtige Satz:

Satz 28. *Der Operator A sei auf $\boldsymbol{D}_1$ durch die Gleichung*

$$Ax = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x + [Wx] \tag{22}$$

definiert, wo $n \geqq 0$; $W(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$; $a_i(t) \in \boldsymbol{F}_1$; $i = 0, 1, \ldots, n$ *ist; dann gilt* $A \in \mathfrak{A}$. *Wenn überdies a_n überall im Intervall $\langle 0, \infty)$ von Null verschieden ist, so gilt $A \in \mathfrak{A}^*$ und $r(A) = n$.*

Ausserdem gilt: Wenn $A \in \mathfrak{A}$ ist, so kann A durch die Gl. (22) definiert werden; wenn dabei $A \in \mathfrak{A}^*$ und $r(A) = n \geqq 0$ ist, dann ist a_n im Intervall $\langle 0, \infty)$ von Null verschieden.

Die erste Behauptung des vorigen Satzes besagt, dass jeder nach Gl. (22) definierte Operator A durch die Gleichung von der Form $Ax = [\tilde{W}x]^{(k)}$ definiert werden kann; da das Verfahren der Feststellung von k und $\tilde{W}(t, \tau)$ für die Konstruktion des inversen Operators notwendig wird, so sei es hier angeführt. Dazu wird noch folgendes Lemma erforderlich:

Lemma 1. *Es sei $a(t) \in \boldsymbol{F}_1$, $f \in \boldsymbol{D}_1$, $n \geqq 0$ eine ganze Zahl; dann gilt*

$$af^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (a^{(i)} f)^{(n-i)}\,. \tag{23}$$

Es sei also A durch Gl. (22) definiert; drückt man laut Lemma 1 jedes Glied $a_k x^{(k)}$ in der Form (23) aus, und fasst man dann die Ableitungen von gleicher Ordnung zusammen, so kann man offenbar schreiben

$$Ax = (a_n x)^{(n)} + (b_{n-1} x)^{(n-1)} + (b_{n-2} x)^{(n-2)} + \ldots + b_0 x + [Wx]\,, \tag{24}$$

wo b_i lineare Kombinationen der Funktionen a_i und ihrer Ableitungen sind. Laut Satz 14 gilt jedoch

$$Ax = \{(a_n x)^{(-1)} + (b_{n-1}x)^{(-2)} + \ldots + (b_0 x)^{(-n-1)} + [Wx]^{(-n-1)}\}^{(n+1)} = \\ = [\tilde{W}x]^{(n+1)},$$

wo offenbar

$$(25) \qquad \tilde{W}(t, \tau) = U_1(t, \tau)\, a_n(\tau) + U_2(t, \tau)\, b_{n-1}(\tau) + \ldots + U_{n+1}(t, \tau)\, b_0(\tau) + \\ + (U_{n+1} \times W)(t, \tau)$$

gesetzt wurde (vergl. mit Satz 8 und Gl. (10)), womit die Form $[\tilde{W}x]^{(k)}$ erreicht ist. Um das Verfahren noch deutlicher zu machen, sei ein einfaches Beispiel durchgerechnet.

Beispiel 12. Der Operator A sei auf $\boldsymbol{D}_1$ durch die Gleichung $Ax = (t + 1)\, x' + tx + [(t - \tau)\, x]$ definiert; laut Lemma 1 bekommt man $(t + 1)\, x' = ((t + 1)\, x)' - x$, sodass $Ax = ((t + 1)\, x)' + (t - 1)\, x + [(t - \tau)\, x]$ ist; nach Gl. (24) und (25) gilt also

$$\tilde{W}(t, \tau) = U_1(t, \tau) \,.\, (\tau + 1) + U_2(t, \tau) \,.\, (\tau - 1) + U_2 \times (t - \tau)\,.$$

Da $U_1 = 1$, $U_2 = t - \tau$ und $U_2 \times U_2 = U_4 = \dfrac{(t - \tau)^3}{3!}$ ist, so bekommt man schliesslich nach einigen Zwischenrechnungen

$$\tilde{W}(t, \tau) = \tfrac{1}{6}\{t^3 - \tau^3 - 3t^2\tau + 3t\tau^2 + 6t\tau - 6\tau^2 + 12\tau - 6t + 6\}\,.$$

Es gilt also $Ax = [\tilde{W}x]^{(2)}$.

Für die Summe bzw. für das Produkt von Operatoren der Klasse $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}^*$ gilt folgender Satz:

Satz 29. *a) Es sei $A, B \in \mathfrak{A}$; dann gilt $A + B \in \mathfrak{A}$, $AB \in \mathfrak{A}$.*

b) Es sei $A, B \in \mathfrak{A}^*$; dann gilt $AB \in \mathfrak{A}^*$ und $r(AB) = r(A) + r(B)$. Wenn überdies $r(A) \neq r(B)$, so gilt $A + B \in \mathfrak{A}^*$ und $r(A + B) = \max\,[r(A), r(B)]$.

In welcher Weise die Ordnungen von Operatoren und Distributionen zusammenhängen, besagt folgender Satz:

Satz 30. *Es sei $A \in \mathfrak{A}^*, f \in \boldsymbol{D}_1^*$; dann gilt $Af \in \boldsymbol{D}_1^*$ und $r(Af) = r(A) + r(f)$.*

Beispiel 13. Es sei $f = \delta_0' - 2\delta_0 + H_0 \sin t$; man soll die Ordnung der Distribution Af bestimmen, wobei mit A der Operator aus dem Beispiel 12 bezeichnet ist. Da laut Definition der Distributionsordnung $r(\delta_0) = 1$, $r(H_0 \sin t) = -1$ ist, so gilt laut Satz 21 $r(\delta_0') = 2$, und laut Satz 22 $r(f) = \max\,[2, 1, -1] = 2$. Nach Satz 28, da $t + 1 \neq 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ ist, gilt jedoch $r(A) = 1$. Aus dem Satz 30 ergibt sich also $r(Af) = 3$.

Weiter gilt:

Satz 31. *Jeder Operator $A \in \mathfrak{A}$ ist stetig.*

Von grösster Wichtigkeit ist folgender

Satz 32. *Jeder Operator $A \in \mathfrak{A}^*$ ist regulär (d. h. existiert der Operator A^{-1} derart, dass auf $\boldsymbol{D}_1$ $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ gilt); ausserdem gilt $A^{-1} \in \mathfrak{A}^*$, $r(A^{-1}) = -r(A)$.*

Jetzt wollen wir zeigen, wie der inverse Operator A^{-1} zu $A \in \mathfrak{A}^*$ konstruiert werden kann. Es sei also $Ax = [Wx]^{(k)}$, $k \geqq 0$ und es gelte $W^* \equiv \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^* \equiv \left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)^* \equiv \ldots \equiv \left(\frac{\partial^{q-2} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* \equiv 0$, $\left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right) \neq 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$. Es ist also $r(A) = k - q$.

Laut Satz 17 kann man schreiben

$$[Wx]^{(q)} = \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* x + \left[\frac{\partial^q W}{\partial t^q} x\right]. \tag{26}$$

Bezeichnet man zur Abkürzung

$$a(t) = \left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^*, \quad \overline{W}(t, \tau) = \frac{1}{a(t)} \cdot \frac{\partial^q W(t, \tau)}{\partial t^q},$$

so gilt (vergl. mit Satz 8)

$$[Wx]^{(q)} = a(x + [\overline{W}x]) . \tag{27}$$

Wir definieren auf $\boldsymbol{D}_1$ die Operatoren A_1, A_2 durch die Gleichungen

$$A_1 x = x^{(k-q)}, \quad A_2 x = a(x + [\overline{W}x]) . \tag{28}$$

Offensichtlich gilt $A_1 A_2 = A$.

Jetzt wird von Satz 19 Gebrauch gemacht. Nach seiner Behauptung existiert eine einzige Funktion $H(t, \tau) \in \boldsymbol{F}_1^2$, welche die Gleichung

$$H + \overline{W} + H \times \overline{W} = 0 \tag{29}$$

erfüllt, wobei überdies die Gleichung

$$H + \overline{W} + \overline{W} \times H = 0 \tag{30}$$

besteht. Dabei ist die Funktion $H(t, \tau)$ durch die Reihe (16) bzw. durch die Folge (16a) gegeben. Definieren wir jetzt auf $\boldsymbol{D}_1$ die Operatoren B_1, B_2 durch die Gleichungen

$$B_1 x = \frac{1}{a} x + \left[H\left(\frac{1}{a} x\right)\right], \quad B_2 x = x^{(q-k)}, \tag{31}$$

und bilden den Operator $B = B_1 B_2$, d. h.

$$Bx = \frac{1}{a} x^{(q-k)} + \left[H\left(\frac{1}{a} x^{(q-k)}\right)\right]. \tag{32}$$

Für das Produkt $B_1 A_2$ bekommt man:

$$(B_1 A_2)\,x = B_1(A_2 x) = \frac{1}{a}\,a(x + [\overline{W}x]) + \left[H\,\frac{1}{a}\,a(x + [\overline{W}\,x])\right] =$$
$$= x + [(\overline{W} + H + H \times \overline{W})\,x] = x\,.$$

Auf $\boldsymbol{D}_1$ gilt also $B_1 A_2 = I$. Offensichtlich gilt weiter auf $\boldsymbol{D}_1$: $B_2 A_1 = A_1 B_2 = I$. Hieraus folgt

$$BA = (B_1 B_2)(A_1 A_2) = B_1(B_2 A_1)\,A_2 = B_1 A_2 = I\,.$$

Ganz gleich bekommt man

$$(A_2 B_1)\,x = A_2(B_1 x) = a\left\{\frac{1}{a}\,x + \left[H\left(\frac{1}{a}\,x\right)\right] + \left[\overline{W}\left(\frac{1}{a}\,x + \left[H\left(\frac{1}{a}\,x\right)\right]\right)\right]\right\} =$$
$$= x + a\left[(H + \overline{W} + \overline{W} \times H)\left(\frac{1}{a}\,x\right)\right] = x\,.$$

Folglich gilt $A_2 B_1 = I$. Schliesslich bekommt man $AB = (A_1 A_2)(B_1 B_2) = A_1 B_2 = I$. Hievon folgt, dass B den inversen Operator A^{-1} zu A darstellt.

Wegen seiner Wichtigkeit sei hier das ganze Konstruktionsverfahren noch kurz zusammengefasst.

1) Ist ein Operator $A \in \mathfrak{A}^*$ vorgelegt, so bringt man zuerst seine Definitionsgleichung auf die Form $Ax = [Wx]^{(k)}$.

2) Mit Hilfe von Gl. (26) werden dann die Funktionen $a(t)$, $\overline{W}(t, \tau)$ festgestellt.

3) Durch die Reihe (16) wird die Funktion $H(t, \tau)$ ermittelt.

4) Nach Gl. (32) wird schliesslich der inverse Operator A^{-1} gebildet.

B e m e r k u n g: Man beachte, dass die Funktion $H(t, \tau)$ vorzugsweise als Grenze der konvergenten Folge (16a) ermittelt werden kann. Es ist nämlich klar, dass die Glieder der Folge (16a) durch ein Iterationsprozess feststellbar sind, sodass die Ausrechnung von $H(t, \tau)$ den automatischen Rechenmaschienen angepasst werden kann.

Führen wir jetzt ein einfaches Beispiel an!

B e i s p i e l 14. Der Operator A sei auf $\boldsymbol{D}_1$ durch die Gleichung $Ax = x + [Wx]$ erklärt, wo $W(t, \tau) = a(t)\,b(\tau)$; $a(t), b(t) \in \boldsymbol{F}_1$ ist. Man soll A^{-1} bestimmen.

Offenbar ist $A \in \mathfrak{A}^*$. Laut Gl. (32) gilt $A^{-1}x = x + [Hx]$, wo $H(t, \tau)$ die Lösung der Gleichung $H + W + H \times W = 0$ darstellt. Nach Satz 19 gilt jedoch $H = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i\, W^{\times i}$. Um $H(t, \tau)$ zu bestimmen, setzen wir $\Phi(t) = a(t)\,b(t)$, und $\Phi^{(-1)}(t)$ sei irgendeine primitive Funktion zu $\Phi(t)$. Man überzeugt sich leicht, dass

$$(33) \qquad (W(t, \tau))^{\times n} = \frac{a(t)\,b(\tau)}{(n-1)!}\,(\Phi^{(-1)}(t) - \Phi^{(-1)}(\tau))^{n-1}\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

gilt. Tatsächlich, die Gl. (33) ist für $n = 1$ richtig. Setzt man voraus, dass (33) für irgendein $n \geqq 1$ gilt, so bekommt man

$$W^{\times(n+1)} = W^{\times n} \times W = \int_\tau^t \frac{a(t)\,b(z)}{(n-1)!} (\Phi^{(-1)}(t) - \Phi^{(-1)}(z))^{n-1}\, a(z)\, b(\tau)\, \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{a(t)\,b(\tau)}{(n-1)!} \int_\tau^t (\Phi^{(-1)}(t) - \Phi^{(-1)}(z))^{n-1}\, \Phi(z)\, \mathrm{d}z = \frac{a(t)\,b(\tau)}{n!} (\Phi^{(-1)}(t) - \Phi^{(-1)}(\tau))^n ,$$

w. z. b. w. Durch einsetzen ergibt sich

$$H(t, \tau) = -\, a(t)\, b(\tau) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\Phi^{(-1)}(t) - \Phi^{(-1)}(\tau))^n =$$
$$= -\, a(t)\, b(\tau) \exp\,(\Phi^{(-1)}(\tau) - \Phi^{(-1)}(t))\,.$$

Laut Satz 16 kann man also für A^{-1} schreiben:

$$A^{-1}x = x - a\, \mathrm{e}^{-\Phi^{(-1)}} (b\, \mathrm{e}^{\Phi^{(-1)}} x)^{(-1)}\,.$$

Aus dem eben angegebenen trivialen Beispiel geht hervor, dass im Allgemeinen die Konstruktion des inversen Operators numerisch keineswegs einfach zu sein braucht, vorausgesetzt, dass keine Rechenmaschinen zur Verfügung stehen. Deshalb wird hier noch eine, rechnerisch einfachere Konstruktionsmethode, die jedoch stärkere Voraussetzungen über den Operator verlangt, angeführt.

Es sei also $A \in \mathfrak{A}^*$, $Ax = [Wx]^{(k)}$. „Der Operator A erfüllt die Bedingung B" heisst, dass

1) $W(t, \tau)$ entartet ist, d. h. dass $W(t, \tau) = \sum_{i=1}^{r} a_i(t)\, b_i(\tau)$; $a_i, b_i \in \boldsymbol{F}_1$ gilt,

2) die Wronski'sche Determinante $w(t)$ der Funktionen $a_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ von Null verschieden ist. Jetzt gilt folgender Satz:

Satz 33. *Wenn der Operator $A \in \mathfrak{A}^*$ die Bedingung* B *erfüllt, so reduziert sich die Konstruktion von A^{-1} zur Lösung einer linearen Differentialgleichung.*

Beweis: Es gelte also $Ax = [Wx]^{(k)} = y$, wobei $W^* \equiv \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^* \equiv \ldots \equiv \left(\frac{\partial^{q-2} W}{\partial t^{q-2}}\right)^* \equiv 0$, $\left(\frac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^* \not\equiv 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ ist. Setzt man zur Abkürzung $u = y^{(-k)}$, so kann man schreiben

$$[Wx] = u\,. \tag{34}$$

Deriviert man jetzt die Gl. (34) ein-bis r-mal, so ergibt sich mit Hilfe von Satzt 17 folgendes System:

$$\begin{aligned} [Wx] &= u\,, \\ \left[\frac{\partial W}{\partial t}\, x\right] &= u' - W^* x\,, \\ &\vdots \\ \left[\frac{\partial^r W}{\partial t^r}\, x\right] &= u^{(r)} - \sum_{i=0}^{r-1} \left\{\left(\frac{\partial^i W}{\partial t^i}\right)^* x\right\}^{(r-i-1)}. \end{aligned} \tag{35}$$

Für jedes k gilt jedoch nach Satz 16:

$$\left[\frac{\partial^k W}{\partial^k t}\, x\right] = \left[\left(\sum_{i=1}^{r} a_i^{(k)}(t)\, b_i(\tau)\right) x\right] = \sum_{i=0}^{k} a_i^{(k)}(b_i x)^{(-1)} .$$

Löst man die erste bis r-te Gleichung des Systemes (35) nach den Unbekannten $(b_i x)^{(-1)}$; $i = 1, 2, \ldots, r$ auf, (was immer möglich ist, da die Systemdeterminante gerade die Wronski'sche Determinante $w(t)$ der Funktionen $a_i(t)$ ist), und setzt man für $(b_i x)^{(-1)}$ in die letzte Gleichung (35) ein, so bekommt man

$$\sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i u^{(i)} + u^{(r)} - \sum_{i=0}^{r-q} \beta_i x^{(i)} = 0 . \tag{36}$$

Man kann leicht beweisen, dass $r - q \geqq 0$ und $\beta_{r-q} = \left(\dfrac{\partial^{q-1} W}{\partial t^{q-1}}\right)^*$ ist. Die Gl. (36) stellt jedoch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung $r - q$-ter Ordnung für x dar; mit Hilfe von Satz 24 kann man ihre Lösung x in der Form $x = [\tilde{W} v]$, $v = u^{(r)} + \sum_{i=0}^{r-1} \alpha_i u^{(i)}$ bekommen, womit der inverse Operator A^{-1} ermittelt ist. (Man kann gegebenenfalls auch vom Satz 17 bzw. von der Formel $y^{(-m)} = [U_m y]$ Gebrauch machen, um x in kanonischer Form $x = [\overline{W} y]^{(q)}$ darstellen zu können.)

Bemerkung 1: Wenn der Operator $A \in \mathfrak{A}^*$ durch die Gleichung $Ax = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x + [Wx]$ definiert ist, wobei $W(t, \tau) = \sum_i b_i(t)\, c_i(\tau)$ entartet ist und die Wronski'sche Determinante der Funktionen $b_i(t)$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ nicht verschwindet, so ist es offenbar nicht notwendig, A auf die kanonische Form zu bringen, sondern den erläuterten Kniff direkt auf $[Wx]$ anzuwenden.

Bemerkung 2: Die praktische Bedeutung des eben angegebenen Konstruktionsverfahren besteht darin, dass es eine Anzahl von Methoden gibt, die es gestatten, das Fundamentalsystem der Lösungen einer homogenen Differentialgleichung beispielsweise mit Hilfe von Analogen-Rechenmaschinen zu ermitteln. (Vergl. z. B. [5].)

Es seien jetzt drei einfache Beispiele, die das besprochene Konstruktionsverfahren illustrieren, angegeben!

Beispiel 15. Der Operator $A \in \mathfrak{A}$ sei durch die Gleichung

$$Ax = -(t+1)((t+1)^2 x)^{(-1)} + (t+1)^2((t+1)\, x)^{(-1)} \tag{37}$$

definiert. Man sieht leicht ein, dass $A \in \mathfrak{A}^*$ gilt; tatsächlich, es ist nämlich

$$Ax = [Wx], \quad W(t, \tau) = -(t+1)(\tau+1)^2 + (t+1)^2(\tau+1),$$

wobei $W^* \equiv 0$, $\left(\dfrac{\partial W}{\partial t}\right)^* = (t+1)^2 \neq 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ gilt. Überdies gilt offensichtlich

$$w(t) = \begin{vmatrix} -(t+1); & (t+1)^2 \\ -1; & 2(t+1) \end{vmatrix} = -(t+1)^2 ,$$

sodass die Bedingung B erfüllt ist. Setzt man zur Abkürzung $P = ((t + 1)^2 x)^{(-1)}$, $Q = ((t + 1) x)^{(-1)}$, so bekommt man durch Derivieren von (37):

$$
\begin{aligned}
-(t+1)P + (t+1)^2 Q &= y \\
-P + 2(t+1)Q &= y' \\
2Q &= y'' - (t+1)^2 x .
\end{aligned} \tag{38}
$$

Rechnet man aus den ersten zwei Gleichungen (38) P und Q aus, und setzt man die gewonnene Ausdrücke in die dritte Gleichung (38) ein, so bekommt man nach einigen Zwischenrechnungen unmittelbar

$$x = \frac{1}{(t+1)^2} y'' - \frac{2}{(t+1)^3} y' + \frac{2}{(t+1)^4} y .$$

Beispiel 16. Es sei

$$Ax = e^{t/2} x' - (1 + t) e^{-t/2} \left(\frac{e^t}{(1+t)^2} x \right)^{(-1)} . \tag{39}$$

Offenbar ist $A \in \mathfrak{A}^*$. Da $-(1 + t) e^{-t/2} \neq 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ ist, so wird A^{-1} im Sinne der Bemerkung 1 ermittelt. Deriviert man (39), so ergibt sich

$$e^{t/2} x'' + \tfrac{1}{2} e^{t/2} x' - \frac{e^{t/2}}{1+t} x - \frac{(1-t)}{2} e^{-t/2} \left(\frac{e^t}{(1+t)^2} x \right)^{(-1)} = y' . \tag{40}$$

Multipliziert man (39) mit $t - 1$, (40) mit $2(t + 1)$ und addiert man die so entstandene Gleichungen, so bekommt man

$$x'' + \frac{t}{t+1} x' - \frac{1}{t+1} x = u , \tag{41}$$

wo $u = e^{-t/2} \left\{ y' + \dfrac{t-1}{2(t+1)} y \right\}$ gesetzt wurde.

Durch Einsetzen überzeugt man sich leicht, dass die Funktionen $\xi_1 = t$, $\xi_2 = e^{-t}$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung zu (41) bilden. Wendet man also die Formel des Satzes 24 an, so bekommt man unmittelbar

$$x = t \left(\frac{1}{1+t} u \right)^{(-1)} - e^{-t} \left(\frac{te^t}{1+t} u \right)^{(-1)} . \tag{42}$$

Setzt man schliesslich für u in (42) ein und macht von Satz 15 („Integration per-partes") Gebrauch, so bekommt man nach einigen Zwischenrechnungen

$$x = t \left(\frac{e^{-t/2}}{1+t} y \right)^{(-1)} + e^{-t} \left(\frac{e^{t/2}}{1+t} y \right)^{(-1)} .$$

Beispiel 17. Betrachten wir erneut den Operator A aus dem Beispiel 14. Wenn dort $a(t) \neq 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ ist, kann man A^{-1} mit Hilfe des eben besprochenen Verfahrens bestimmen. (Das sei dem Leser als eine einfache Übung überlassen.) Man beachte, dass im Beisp. 14 keine Voraussetzungen über das Nichtverschwinden-sein von $a(t)$ getan werden mussten, dementgegen das Verfahren von Satz 33 versagt, falls in irgendeinem Punkte $t_0 \in \langle 0, \infty)$ die Funktion $a(t)$ verschwindet.

Widmen wir jetzt noch einige Zeilen den Operatoren, welche man in Anwendungen als „Heaviside'sche Operatoren" zu bezeichnen pflegt.

Es sei D der Operator, der auf $\boldsymbol{D}_1$ durch $Dx = x'$ erklärt ist; der Operator A soll „Heaviside'scher Operator" heissen, wenn

$$(43) \qquad A = (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0)^{-1} (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots + b_0)$$

ist, wo a_i, b_i reelle Zahlen sind. Das System aller solchen Operatoren sei mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Diese Operatoren sind offensichtlich regulär. Ausserdem gilt folgender Satz:

Satz 34. *Es sei $A, B \in \mathfrak{H}$; dann gilt*

$$1)\ A + B \in \mathfrak{H}\,, \quad 2)\ AB \in \mathfrak{H}\,, \quad 3)\ A^{-1} \in \mathfrak{H}\,, \quad 4)\ AB = BA\,.$$

Dieser Satz besagt insbesondere, dass die Heaviside'schen Operatoren die „angenehme" Eigenschaft besitzen, dass ihr Produkt kommutativ ist. Hieraus folgt, dass sie formal als rationale Funktionen des Operators D behandelt werden können. Bedeutungsvoll ist dann insbesondere die Tatsache, dass der Satz über die Partialbruchzerlegung gültig bleibt, was die Bestimmung des inversen Operators weitgehend erleichtert. Das sind allerdings wohlbekannte Tatsachen und deshalb wird nicht auf sie näher eingegangen. (Im Zusammenhang damit vergl. [6].)

Widmen wir uns jetzt der Anwendung von Operatoren zu!

Zuerst werden die Fragen der Ermittlung von Lösung eines Systems der Integrodifferentialgleichungen besprochen. (Durch eben solche Systeme ist nämlich die Dynamik jedes physikalischen, aus konzentrierten zeitlich veränderlichen Elementen gebildeten Systems beschrieben.) Zu diesem Zwecke führen wir einige Bezeichnungen ein!

Es sei $\boldsymbol{D}_r$ das System aller r-dimensionalen Vektoren, deren Elemente zu $\boldsymbol{D}_1$ gehören. Es seien ferner $A_i(t)$; $i = 0, 1, \ldots, n$ die Quadratmatrizen r-ter Ordnung, deren Elemente zu $\boldsymbol{F}_1$ gehören und es sei $W(t, \tau)$ eine Quadratmatrix r-ter Ordnung, deren Elemente zu $\boldsymbol{F}_1^2$ gehören. Es seien schliesslich c_i, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$ reelle r-dimensionale Zahlenvektoren.

Betrachten wir die Vektorgleichung

$$(44) \qquad \sum_{i=0}^{n} A_i(t)\, x^{(i)} + \int_0^t W(t, \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau = f\,.$$

Es sei $f \in \boldsymbol{D}_r$; der Vektor x soll die (distributive) Lösung der Gl. (44) mit den Anfangsbedingungen $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ heissen, wenn

1) $x \in \boldsymbol{D}_r$,

2) die Gleichung

$$(45) \qquad \sum_{i=0}^{n} A_i\Big(x^{(i)} - \sum_{k=0}^{i-1} c_k \delta_0^{(i-k-1)}\Big) + [Wx] = f$$

erfüllt ist. (Dabei wird $\sum\limits_{k=0}^{-1} \ldots = 0$ gesetzt, der Sinn der anderen Symbole ist gewiss klar.)

Bevor die Fragen der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (44) besprochen werden, sei angedeutet, warum die Lösung gerade in dieser Weise definiert wurde. Die Antwort auf diese Frage ist in folgendem Satze enthalten:

Satz 35. *Es sei f ein Vektor, dessen Elemente im Intervall $\langle 0, \infty)$ stetige Funktionen sind; jede klassische Lösung*[4] *$x(t)$ (falls sie überhaupt existiert) der Gl. (44), definierte als $x(t) = 0$ für $t < 0$, ist dann gleichzeitig die distributive Lösung von (44) mit denselben Anfangsbedingungen.*

Aus dem eben ausgesprochenen Satz geht hervor, dass die distributive Lösung eine Verallgemeinerung der klassischen Lösung darstellt.

Um weitere Überlegungen zu vereinfachen, seien folgende Tatsachen beachtet: man kann voraussetzen, dass die in Gl. (45) auftretenden Glieder $A_i c_k \delta_0^{(i-k-1)}$ in dem Vektor f schon einbezogen sind, sodass man in Übereinstimmung mit Satz 28 folgende, einfachere Gleichung

$$Ax = f, \tag{46}$$

wo $A = [A_{ik}]$ die entsprechende Quadratmatrix ist, deren Elemente zu dem Systeme $\mathfrak{A}$ gehören, betrachten kann.

Im Zusammenhang mit den Fragen der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von (46) sei folgende Bezeichnung eingeführt: „Die Matrix A besitzt die Reduktion $A^{(1)}$" heisst, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) Es gibt solche Permutation von Spalten und Reihen der Matrix A, dass in der so entstandenen Matrix $\tilde{A}$ das Element $\tilde{A}_{rr}$ ein regulärer Operator ist.

2) Wenn $r > 1$ ist, dann enthält die Matrix $A^{(1)}(r-1)$-ter Ordnung, welche die „Reduktion" genannt wird, und welche laut Gleichung

$$A^{(1)} = [A^{(1)}_{ik}] = [\tilde{A}_{ik} - \tilde{A}_{ir}\tilde{A}_{rr}^{-1}\tilde{A}_{rk}], \quad 1 \leq i, k \leq r-1 \tag{47}$$

gebildet ist, mindestens ein Element, das ein regulärer Operator ist.

Es ist klar, dass im Allgemeinen zu einer gegebenen Matrix A mehrere Reduktionen existieren können.

Die Matrix A soll reduzibel heissen, wenn eine Matrizenfolge $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(r-1)}$ existiert, wobei jede Matrix $A^{(i)}$ irgendeine Reduktion der Matrix $A^{(i-1)}$, $i = 2, 3, \ldots, r-1$ und $A^{(1)}$ eine Reduktion von A darstellt.

Man beachte, dass offenbar die Matrix $A^{(i)}$ von der Ordnung $r - i$ ist, also speziell $A^{(r-1)}$ ist eine, durch ein Element, das ein regulärer Operator ist, gebildete Matrix.

[4]) Wie bekannt, der Vektor $x(t)$ heisst die klassische Lösung von (44), wenn $x(t)$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ die stetige n-te Ableitung besitzt, die Gl. (44) in jedem Punkte des Intervalls $\langle 0, \infty)$ erfüllt ist und dabei $x^{(i)}(0) = c_i$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$ gilt.

Dann gilt folgender Satz:

Satz 36. *Es sei A eine reduzible Matrix; dann gilt:*

a) für jedes $f \in \boldsymbol{D}_r$ existiert eine einzige Lösung der Gleichung $Ax = f$,

b) wenn $f_k \in \boldsymbol{D}_r$, $k = 1, 2, \ldots$ und $f_k \to f$ ist, dann gilt $x_k \to x$, wo x_k, x die Lösung der Gleichung $Ax_k = f_k$ bzw. $Ax = f$ darstellen.

Widmen wir einige Worte der Erläuterung der Behauptungen des eben ausgesprochenen Satzes zu!

a) Die Begriffe „Reduktion", „reduzible Matrix" stellen offenbar gemeinsam mit der Behauptung a) ein formalisiertes Auflösungsverfahren der Unbekannten x_i (Komponenten des Vektors x) im Systeme (46) dar. Es ist nämlich klar, dass die Bildung der Matrix $A^{(1)}$ laut Gl. (47) der Auflösung irgendeiner Unbekannten x_i aus dem Systeme $Ax = f$ äquivalent ist. Diese Tatsache, aus dem Standpunkte der Rechenpraxis gesehen, heisst, dass dann, wenn das Auflösungsverfahren zum Ziel führt (d. h. wenn in reduzierten Systemen immer reguläre Operatoren vorhanden sind), das System $Ax = f$ eine einzige Lösung besitzt.

b) Aus dieser Behauptung geht hervor, dass bei festgehaltenen Vektoren $c_0, c_1, \ldots$ $\ldots, c_{n-1}$ die Lösung x der Gl. (44) von dem Vektor f stetig abhängt. Da aber jede Distribution als Grenze einer Folge von unbeschränkt differenzierbaren Funktionen darstellbar ist, heisst das, dass jede (distributive) Lösung der Gl. (44) als die Grenze der Folge von klassischen Lösungen derselben Gleichung (selbstverständlich mit anderen Vektoren f) erscheint. Physikalisch heisst das folgendes: wenn die wirklichen Störungen, die ein dynamisches System erregen, durch Distributionen beschrieben werden (d. h. z. B. wenn die Störungen Impulse enthalten), so erfasst die ermittelte distributive Lösung die physikalische Wirklichkeit.

Ferner kann man leicht beweisen, dass die „Struktur" der Lösung der Gl. (44) mit der Struktur von f übereinstimmt. Um diese Vorstellung präzisieren zu können, sei folgende Bezeichnung eingeführt. Es sei (t_i) eine Zahlenfolge, für welche $0 = t_0 <$ $< t_1 < t_2 < \ldots, t_i \to \infty$ gilt. Die Distribution f soll „(t_i)-standard" heissen, wenn

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} c_{ik} \delta_{t_i}^{(k)} + g$$

ist, wo c_{ik} reelle Zahlen sind und $n \geqq 0$ eine von i unabhängige ganze Zahl darstellt, wobei g regulär ist und die entsprechende Funktion $g(t)$ folgende Eigenschaften besitzt:

1) $g(t)$ veschwindet für $t < 0$.

2) $g(t)$ ist im Intervall (t_i, t_{i+1}), $i = 0, 1, \ldots$ unbeschränkt differenzierbar,

3) jede Ableitung $g^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$ ist in jedem Intervall (t_i, t_{i+1}) beschränkt.

Analog definiert man den Begriff eines (t_i)-standarden Vektors. Es ist klar, dass jede (t_i)-standarde Distribution zum Systeme $\boldsymbol{D}_1$ gehört. Man beachte auch, dass durch den Begriff der (t_i)-standarden Distribution jede in physikalischer Wirklichkeit vorkommende Störung charakterisiert werden kann.

Jetzt kann man beweisen, dass folgender Satz gültig ist:

Satz 37. *Es sei A eine reduzible Matrix; wenn f ein (t_i)-standarder Vektor ist, so ist die Lösung x der Gleichung $Ax = f$ ebenfalls (t_i)-standard.*

Die Behauptung dieses Satzes heisst physikalisch, dass die Systemreaktionen nur in den Zeitpunkten Impulse enthalten können, in welchen die Störungen Impulse enthalten bzw. unstetig sind.

Führen wir jetzt ein Beispiel, das die Lösung eines Gleichungssystems illustriert, an!

Beispiel 18. Die Dynamik irgendeines Systems ist durch die Gleichungen

$$(48) \quad -2(2t^2 + 10t + 15)\, x_1^{(4)} - 2(6t^2 + 26t + 35)\, x_1''' - 16x_1 + (t+1)\, x_2' = h_1 \,,$$

$$-8(t+1)\, x_1' - x_2 - (t+1) \int_0^t \frac{1}{(\tau + 1)^2}\, x_2(\tau)\, d\tau + 16x_3 = 0 \,,$$

$$x_1' - (t+1)\, x_3' + x_3 = h_3 \,,$$

beschrieben, wo $h_1 = 30\delta_0$, $h_3 = \delta_0$ ist und die Anfangsbedingungen $c_1^{(0)} = c_1^{(1)} = c_1^{(2)} = 0$, $c_1^{(3)} = -5$, $c_2^{(0)} = 0$, $c_3^{(0)} = 1$ sind (der obere Index bezieht sich zur Ordnung der Ableitung, der untere zur Unbekannten); man soll die Reaktionen x_1, x_2, x_3 bestimmen. Laut der Definition des Lösungsbegriffs schreibt man im Systeme

$$(48) \qquad x_1^{(4)} - c_1^{(0)}\delta_0''' - c_1^{(1)}\delta_0'' - c_1^{(2)}\delta_0' - c_1^{(3)}\delta_0 = x_1^{(4)} + 5\delta_0$$

anstatt $x_1^{(4)}$ und analog für andere Ableitungen. Hiermit bekommt man für die Distributionen x_1, x_2, x_3 folgendes System

$$(49) \quad -2(2t^2 + 10t + 15)\, x_1^{(4)} - 2(6t^2 + 26t + 35)\, x_1''' - 16x_1 + (t+1)\, x_2' = g \,,$$

$$-8(t+1)\, x_1' - x_2 - (t+1)\left(\frac{1}{(t+1)^2}\, x_2\right)^{(-1)} + 16x_3 = 0 \,,$$

$$x_1' - (t+1)\, x_3' + x_3 = 0 \,,$$

wo $g = 180\delta_0$ ist.

Bevor (49) gelöst wird, sei an diesem Beispiel die Anwendung der Sätze, welche die Ordnungen von Operatoren und Distributionen betrachten, angedeutet. Bestreben wir uns, die Ordnungen von x_1, x_2, x_3 zu bestimmen! Setzen wir also vorläufig voraus, dass das System (49) eine einzige Lösung besitzt, dass x_1, x_2, $x_3 \in \boldsymbol{D}_1^*$ ist und bezeichnen wir zur Abkürzung $r(x_i) = r_i$, $i = 1, 2, 3$. Schreibt man die dritte Gleichung (49) in der Form $x_1' = (t+1)\, x_3' - x_3$, so ist klar, dass die Operatoren, die hier auf x_1 und x_3 wirken, zu $\mathfrak{A}^*$ gehören und die Ordnung 1 besitzen. Da aus der Gleichkeit von zwei Distributionen aus $\boldsymbol{D}_1^*$ die Gleichkeit ihrer Ordnungen folgt, so hat man laut Satz 30: $1 + r_1 = 1 + r_3$, d. h. $r_1 = r_3$. Der Operator B, der in der zweiten Gleichung (49) auf x_1 wirkt, besitzt die Ordnung 1, sodass die Distribution Bx_1 die Ordnung $1 + r_1$ hat; die Distribution $16x_3$ hat die Ordnung $r_3 = r_1$, sodass die Summe $Bx_1 + 16x_3$ laut Satz 22 von der Ordnung $\max[1 + r_1, r_1] = 1 + r_1$ ist. Schliesslich, der Operator C, der dort auf x_2 wirkt, besitzt die Ordnung 0, sodass Cx_2 die Ordnung r_2 hat. Aus der zweiten Gleichung (49) folgt also $r_2 = 1 + r_1$. Aus der ersten Gleichung (49) folgt analog, dass $r(Ax_1) = 4 + r_1$ und $r((t + 1)\, x_2') = 1 + r_2 = 2 + r_1$ ist, sodass die linke Seite der ersten Gleichung (49) die Ordnung $4 + r_1$ besitzt. Da aber $r(g) = r(180\delta_0) = 1$ ist, so gilt $4 + r_1 = 1$, woraus endlich $r_1 = -3 = r_3$, $r_2 = -2$ folgt. Die Lösungen x_1, x_2, x_3 sind also reguläre Distributionen, wobei die entsprechenden Funktionen $x_1(t)$, $x_3(t)$ die dritte, $x_2(t)$ die zweite (gewöhnliche) Ableitung überall im Intervall $(-\infty, \infty)$ besitzen.

Widmen wir uns jetzt der Lösung des Systems (49), was im Sinne des Satzes 36 und der nachfolgenden Bemerkung 1 durchgeführt wird. Löst man die dritte Gleichung (49) nach x_3 auf, so bekommt man

$$x_3 = (t + 1)\left(\frac{1}{t + 1}\, x_1'\right)^{(-1)}. \tag{50}$$

Durch Einsetzen in die übrigen Gleichungen (49) (in unserem Falle nur in die zweite) ergibt sich

(51)

$$-8(t + 1)\, x_1' + 16(t + 1)\left(\frac{1}{t + 1}\, x_1'\right)^{(-1)} - x_2 - (t + 1)\left(\frac{1}{(t + 1)^2}\, x_2\right)^{(-1)} = 0\,.$$

Der Operator, welcher in Gl. (51) auf x_2 wirkt, ist offenbar wieder regulär, und da überdies $-(t + 1) \neq 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ ist, so kann seine Inversion mit Hilfe von Satz 33 ermittelt werden. Deriviert man also (51), so bekommt man

$$\begin{aligned} -8x_1' - 8(t + 1)\, x_1'' + 16\left(\frac{1}{t + 1}\, x_1'\right)^{(-1)} + 16x_1' - x_2' - \\ - \left(\frac{1}{(t + 1)^2}\, x_2\right)^{(-1)} - \frac{1}{t + 1}\, x_2 = 0\,. \end{aligned} \tag{52}$$

Multipliziert man (52) mit $-(t + 1)$ und addiert man die so entstandene Gleichung mit der Gl. (51), so ergibt sich $8(t + 1)^2\, x_1'' - 16(t + 1)\, x_1' + (t + 1)\, x_2' = 0$, sodass

$$x_2 = 16x_1 - 8((t + 1)\, x_1'')^{(-1)} \tag{53}$$

gilt. Setzt man endlich hieraus für x_2 in die erste Gleichung (49) ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} -2(2t^2 + 10t + 15)\, x_1^{(4)} - 2(6t^2 + 26t + 35)\, x_1''' - 8(t + 1)^2\, x_1'' + \\ + 16(t + 1)\, x_1' - 16x_1 = g\,. \end{aligned} \tag{54}$$

Der in Gl. (54) auf x_1 wirkende Operator ist offenbar regulär; hieraus folgt, dass die Operatorenmatrix des Systems (49) reduzibel ist, und folglich (49) eine einzige Lösung besitzt. Es bleibt also noch übrig, die Inversion des Operators in Gl. (54) zu bestimmen. Durch Einsetzen überzeugt man sich leicht davon, dass die Funktionen $(t + 1)$, $(t + 1)^2$, e^{-t}, e^{-2t} ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung von (54) bilden. Die entsprechende Wronski'sche Determinante $w(t)$ des betrachteten Fundamentalsystems ergibt sich

$$w(t) = -2e^{-3t}(2t^2 + 10t + 15)\,.$$

Laut Satz 24 gilt also $x_1 = [Wg]$, wo

$$(55)\quad W(t,\tau) = -\frac{1}{2(2\tau^2 + 10\tau + 15)\,w(\tau)} \begin{vmatrix} \tau + 1; & (\tau + 1)^2; & e^{-\tau}; & e^{-2\tau} \\ 1; & 2(\tau + 1); & -e^{-\tau}; & -2e^{-2\tau} \\ 0; & 2; & e^{-\tau}; & 4e^{-2\tau} \\ t + 1; & (t + 1)^2; & e^{-t}; & e^{-2t} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4(2\tau^2 + 10\tau + 15)^2} \{2(t + 1)(\tau^2 + 5\tau + 5) - (t + 1)^2(2\tau + 5) -$$

$$- 2e^{\tau - t}(2\tau^2 + 6\tau + 5) + e^{2(\tau - t)}(\tau^2 + 4\tau + 5)\}$$

ist.

Da in unserem Falle $g = 180\delta_0$ ist und laut Satz 18 $[W\delta_0] = H_0 W(t, 0)$ gilt, $(H_0(t) = 1$ für $t > 0$, $H_0(t) = 0$ für $t \leq 0)$, so ergibt sich aus (55) unmittelbar

$$(56)\qquad x_1 = (1 - t^2 - 2e^{-t} + e^{-2t})\,H_0\,.$$

Die Unbekannte x_2 wird mit Hilfe von Gl. (53) ermittelt. Man bekommt

$$x_1' = (1 - t^2 - 2e^{-t} + e^{-2t})\,\delta_0 + (-2t + 2e^{-t} - 2e^{-2t})\,H_0 =$$

$$= 2(-t + e^{-t} - e^{-2t})\,H_0\,,$$

und ähnlich $x_1'' = 2(-1 - e^{-t} + 2e^{-2t})\,H_0$, sodass durch Einsetzen folgt

$$x_2 = 8(3 + 2t - t^2 - 2e^{-t}(t + 4) + e^{-2t}(2t + 5))\,H_0\,.$$

Für x_3 bekommt man endgültig aus (50):

$$x_3 = 2(t + 1)\int_0^t \frac{-\tau + e^{-\tau} - e^{-2\tau}}{\tau + 1}\,d\tau\,.\,H_0\,.$$

(Die Bestätigung dessen, dass die ermittelten Distributionen x_1, x_2, x_3 tatsächlich die früher bestimmten Ordnungen besitzen, sei als eine einfache Übung dem Leser überlassen.)

Widmen wir jetzt die Aufmerksamkeit dem praktisch wichtigen Falle zu, in welchem das betrachtete dynamische System eine serio-paralelle Struktur besitzt, und am Anfang im Ruhezustand ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei Systeme („Zweipole") S_1, S_2, von welchen bekannt sei, dass zwischen der Störung u und der Reaktion x_i des Systems S_i die Beziehung $x_i = A_i u$ besteht, wobei $A_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2$ ist. Aus solchen Systemen S_1,S_2 kann man zwei neue Systeme bilden, und zwar 1) die Nebeneinanderschaltung S_p (paralelle Schaltung), 2) die Reihenschaltung S_s (Serienschaltung). (Vergl. mit der Schematisierung auf Abb. 2.) Dabei wird unter der Nebeneinanderschaltung die Schaltung verstanden, für welche die Störung den beiden Einzelsystemen S_1, S_2 gemeinsam ist und die Reaktionen sich addieren. Die Reihenschaltung ist dann die Schaltung, in welcher die Reaktion gemeinsam ist und die Gesamtstörung sich additiv auf die Einzelsysteme aufteilt. (Der Sinn dieser Begriffe in der Elektrotechnik bzw. in der Mechanik ist gewiss klar.) Wenn jetzt die Systeme S_1, S_2 parallel geschaltet sind, und wenn mit x die Gesamtreaktion auf die Störung u bezeichnet ist, so gilt $x = x_1 + x_2 = A_1 u + A_2 u = (A_1 + A_2)\,u$. Wenn die Operatoren A_i

in Analogie mit der Elektrotechnik Admittanzen benannt werden, so ist ersichtlich, dass die Admittanz einer Nebeneinanderschaltung der Summe von Admittanzen der Einzelsysteme gleich ist. Analog, wenn es sich um die Reihenschaltung handelt, und wenn mit x die Reaktion, mit u_i die partiellen Störungen, die auf S_i wirken, bezeichnet sind, so gilt dann für die Gesamtstörung $u = u_1 + u_2$. Wenn dann für die Systeme S_1, S_2 die Gleichungen $u_i = Z_i x$, $Z_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2$ bestehen, wo die Operatoren Z_i Impedanzen genannt werden, so ergibt sich $u = (Z_1 + Z_2)\, x$, d. h. die Impedanz einer Reihenschaltung ist gleich der Summe von Impedanzen der Einzelsysteme.

Da jedes serio-paralelle System durch Nebeneinander- und Reihenschaltungen der Einzelsysteme gebildet werden kann, so folgt aus diesem, dass die eingeführten Impedanzen und Admittanzen formal gerade so behandelt werden können, wie es für die Systeme mit unveränderlichen Elementen üblich ist. Man muss jedoch nur den Umstand beachten, dass das Produkt im Allgemeinen nicht kommutativ ist, und ob die gebildeten Ausdrücke überhaupt einen Sinn haben. (Z. B., sind A_1, A_2 Admittanzen, so ist $A_1 + A_2$ die Admittanz der Nebeneinanderschaltung S_p, aber S_p braucht schon keine Impedanz, d. h. $(A_1 + A_2)^{-1}$, zu besitzen.)

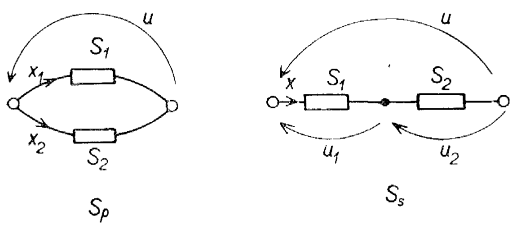

Abb. 2.

Bevor ein Beispiel, das die Lösung eines serio-paralellen Systems illustriert, angegeben wird, sei noch die folgende Behauptung, welche die Behandlung von konkreten Fällen erleichtert, ausgesprochen.

Wenn mit D der auf $\boldsymbol{D}_1$ durch die Gleichung $Dx = x'$ erklärte Operator bezeichnet ist und $\alpha \in \boldsymbol{F}_1$, so gilt

(57)
$$\begin{aligned} D\alpha &= \alpha' + \alpha D\,, & D\alpha D^{-1} &= \alpha' D^{-1} + \alpha\,, \\ D\alpha D &= \alpha' D + \alpha D^2\,, & D^{-1}\alpha D^{-1} &= \alpha^{(-1)} D^{-1} - D^{-1}\alpha^{(-1)}\,. \\ D^{-1}\alpha D &= \alpha - D^{-1}\alpha\,, \end{aligned}$$

Beispiel 19. Die auf Abb. 3 angegebene Schaltung wird durch die Spannung $e \in \boldsymbol{D}_1$ erregt. Dabei sind die Widerstände R, ρ unveränderlich und von Null verschieden, $L(t), C(t) \in \boldsymbol{F}_1$, wobei $L(t), C(t) \neq 0$ für $t \geqq 0$ ist. Mann soll die Spannung e_1, welche auf ρ herrscht, bestimmen, verausgesetzt, dass die Schaltung für $t < 0$ im Ruhezustand war.

Für die Schaltung gilt

(58)
$$\begin{aligned} e &= e_1 + e_2\,, \\ e_1 &= \rho x_1 = \frac{1}{C} D^{-1} x_2\,, \\ e_2 &= (R + DL)(x_1 + x_2)\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $x_1 = \sigma e_1$, $x_2 = DCe_1$, $\sigma = \dfrac{1}{\rho}$, was mit der letzten Gl. (58) ergibt

$$e_2 = (R + DL)(\sigma + DC)\, e_1\ ;$$

aus der ersten Gleichung (58) folgt dann

$$\{1 + (R + DL)(\sigma + DC)\}e_1 = e. \tag{59}$$

Für den in den Wellenklammern von (59) stehenden Operator A bekommt man mit Hilfe von (57)

$$A = 1 + R\sigma + RDC + DL\sigma + DLDC = 1 + R\sigma + RC' + RCD + \sigma L' +$$
$$+ \sigma LD + (L' + LD)(C' + CD) = LCD^2 + (RC + \sigma L + 2LC' + L'C)\, D +$$
$$+ (1 + R\sigma + RC' + \sigma L' + L'C' + LC'')\,.$$

Da $LC \neq 0$ im Intervall $\langle 0, \infty)$ ist, so ist A regulär; der Operator A^{-1} und hiermit auch e_1 wird dann durch die schon besprochene Methoden ermittelt.

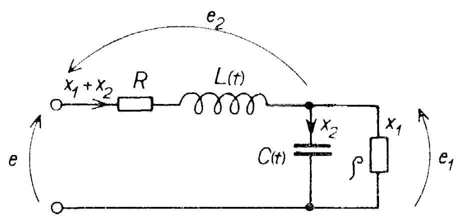

Abb. 3.

Zum Schluss des Artikels seien noch einige Bemerkungen getan. Betrachten wir die physikalische Bedeutung des Falles, in welchem das Gleichungssystem (46), das ein dynamisches System mit veränderlichen Elementen beschreibt, keine reduzible Operatorenmatrix besitzt, oder spezieller den Fall eines nichtregulären Operators. Es ist klar, dass dann keine Lösung zu existieren braucht, oder dass es mehrere Lösungen gibt. Falls mehrere Lösungen existieren, heisst das physikalisch, dass für $t > 0$ das System nicht im Ruhezustand zu sein braucht, sogar auch dann, wenn es durch keine Störung bewirkt wird und wenn es am Anfang „tot“ war. Naturgemäss erforden solche Fälle eine spezielle Analyse. Dass solche Fälle überhaupt möglich sind, zeigt folgendes triviale Beispiel an. Es sei der Stromkreis durch die Induktivität $L(t)$ und den Widerstand $R(t)$ gebildet und durch keine Störung erregt, wobei die Anfangsbedingungen verschwinden. Bezeichnet man mit x den durchfliessenden Strom, so gilt die Gleichung $(Lx)' + Rx = 0$. Betrachten wir jetzt den Fall, im welchen $L(t) = t$, $R(t) = t - 4$ ist. Die vorige Gleichung lautet dann $tx' + (t - 3)\,x = 0$. Offenbar liegt der Fall eines nichtregulären Operators vor. Man überzeugt sich nämlich leicht, dass in $\boldsymbol{D}_1$ nebst der trivialen Lösung $x_1 = 0$ noch die Lösung $x_2 = t^3 e^{-t} H_0$ existiert.

Bemerkenswert ist dabei, dass x_2 die klassische Lösung darstellt und überdies $x(0) = x'(0) = x''(0) =$ gilt. Offenbar können solche Erscheinungen in Systemen mit konstanten Elementen nicht vorkommen.

Die Theorie, welche in diesem Artikel angegeben wurde, ist nicht die einzige, die zur Analyse von dynamischen Systemen mit veränderlichen Elementen geeignet ist.

Eine andere, speziellere Auffassung des Problems, die im Grundsatz auf den Methoden der Transformationen beruht, findet der Leser in den Arbeiten [7] und [8].

Literatur

[1] *Гельфанд И. М.-Шилов Г. Е.:* Обобщенные функции и действия над ними, Гос. изд. физико-матем. лит., Москва 1958.

[2] *Doležal V.:* O použití distribucí v teorii lineárních dynamických soustav, Aplikace matem., č. 6, 1959.

[3] *Doležal V.:* Über eine Klasse linearer Operatoren, Čas. pro pěstování matematiky, č. 2, 1961.

[4] *Stěpanov V. V.:* Kurs diferenciálních rovnic, Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950.

[5] *Матыаш Й.:* Методика решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами при помощи моделирующих устройств, Автоматика и телемеханика, том XX, 7, 1959.

[6] *Сансоне Дж.:* Обыкновенные дифференциальные уравнения, том. II, Изд. иностр. лит., Москва 1954.

[7] *Zadeh L. A.:* Time-dependent Heaviside Operators, Journal of Math. and Physics, Vol. XXX, 1951.

[8] *Zadeh L. A.:* A General Theory of Linear Signal Transmission Systems, Journal of The Franklin Institute, Vol. 253, 1952.

Výtah

O POUŽITÍ OPERÁTORŮ V TEORII LINEÁRNÍCH DYNAMICKÝCH SOUSTAV

VÁCLAV DOLEŽAL

Článek je věnován použití jisté třídy lineárních operátorů k analyse dynamiky lineárních fysikálních soustav s časově proměnnými parametry. Nejdříve je zaveden jistý součin distribuce a hladké funkce dvou proměnných, a jsou uvedeny jeho základní, dále potřebné vlastnosti. Pomocí tohoto součinu jsou pak na systému distribucí rovných nule na intervalu $(-\infty, 0)$ definovány operátory a ukázány jejich potřebné vlastnosti, zejména vlastnosti jejich řádu a konstrukce inversního operátoru. Poté jsou operátory aplikovány jednak k řešení systému lineárních integrodiferenciálních rovnic s hladkými koeficienty (takové systémy rovnic popisují dynamiku každé lineární fysikální soustavy s proměnnými elementy), jednak k přímému vyšetření serioparalelních dynamických soustav. Jak vyložená teorie, tak její aplikace jsou ilustrovány četnými příklady.

Резюме

О ПРИМЕНЕНИИ ОПЕРАТОРОВ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

Статья посвящена приложениям определенного класса операторов к анализу динамики физических систем с параметрами, переменными во времени. Сначала вводится одно произведение обобщенной функции и гладкой функции двух переменных, и приводятся его основные, в последующем надобные свойства. При помощи этого произведения определяются на системе обобщенных функций, равных нулью на интервале $(-\infty, 0)$ операторы, и перечисляются их необходимые свойства, в особенности свойства их порядка и построение обратного оператора. Затем операторы применяются, во-первых, к решению системы линейных интегро-дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами (такие системы уравнений описывают динамику любой линейной физической системы с переменными элементами), во-вторых, при непосредственном анализе сериопараллельных динамических систем. Как изложенная теория, так и ее приложения, иллюстрированы на ряде примеров.