Zdeněk Vorel

Některé odhady v teorii quasilineární soustavy s jedním stupněm volnosti

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 1, 1–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102736

ČLÁNKY

NĚKTERÉ ODHADY V TEORII QUASILINEÁRNÍ SOUSTAVY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

ZDENĚK VOREL

(Došlo dne 29. prosince 1959.)

Jsou uvedeny přibližné vzorce pro řešení skalární rovnice $\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t, \varepsilon)$ které byly získány metodou postupných aproximací, s odhadem chyby pro amplitudu i fázi řešení v rovině x, $\dot{x}$. Těchto odhadů se používá ve spojení s Poincaré-Bendixsonovou teorií k určování polohy a periody periodických řešení.

Úvod. Vyšetřujeme-li skalární rovnici

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t, \varepsilon)\,, \tag{1}$$

kde ε je malý parametr, f spojitá a lipschitzovská, v polárních souřadnicích a, ψ, získáme metodou postupných aproximací přibližné vzorce pro výpočet amplitudy $a(t)$ a fáze $\psi(t)$ řešení rovnice (1). Srovnáme-li odhady chyb těchto aproximací s odhady odpovídajících aproximací podle BOGOLJUBOVA-KRYLOVA [1], zjistíme toto: Pro aproximaci řádu m je odhad chyby řádu ε^{m+1} a platí na intervalu délky T, zatím co pro m-tou aproximaci podle Bogoljubova-Krylova se uvádí odhad řádu ε^m, který platí na intervalu délky $\frac{T}{\varepsilon}$. Přesnost uvedených odhadů je ověřena na příkladu, z něhož plyne, že odhady již nelze řádově zlepšit.

V druhém odstavci jsou uvedeny některé základní definice a věty Poincaré-Bendixsonovy teorie, a to jen v tom rozsahu, aby mohla být zformulována věta 2,1. Aby v daném mezikruží v rovině x, $\dot{x}$ existovala stabilní periodická trajektorie, stačí podle věty 2,1 nalézt dvě spirální trajektorie, z nichž vnější se blíží počátku a vnitřní se od něho vzdaluje.

Ve třetím odstavci se používá aproximací z prvního odstavce k nalezení takových trajektorií.

1. Budeme se zabývat skalární rovnicí

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, t, \varepsilon\right). \tag{1,1}$$

O funkci $f(x, y, t, \varepsilon)$ předpokládáme, že je definována pro $(x, y) \in D$, kde $D = E(x, y; \alpha < \sqrt{(x^2 + y^2)} < \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$, a má tyto vlastnosti:

1) $f(x, y, t, \varepsilon)$ je spojitá funkce všech svých argumentů v celém definičním oboru.

2) Existuje konstanta L taková, že

$$|f(x_2, y_2, t, \varepsilon) - f(x_1, y_1, t, \varepsilon)| \leqq L(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)$$

pro $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$.

3) Existuje konstanta K tak, že $|f(x, y, t, \varepsilon)| \leqq K$ pro $(x, y) \in D$, $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$.

Napišme (1,1) ve tvaru soustavy

$$(1,2) \qquad \frac{dx}{dt} = y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = - x + \varepsilon f(x, y, t, \varepsilon)\,.$$

Zaveďme nové proměnné rovnicemi

$$x = a \cos \psi\,, \quad y = - a \sin \psi\,.$$

Potom

$$x = \dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \,.\, \psi\,, \quad y = - a \sin \psi - a \cos \psi \,.\, \dot{\psi}\,.$$

Jakmile

$$\begin{vmatrix} \cos \psi\,, & - a \sin \psi \\ - \sin \psi\,, & - a \cos \psi \end{vmatrix} = - a \neq 0\,,$$

platí

$$(1,3) \qquad \dot{a} = - \varepsilon f(a \cos \psi, - a \sin \psi, t, \varepsilon) \sin \psi\,,$$

$$\dot{\psi} = 1 - \frac{\varepsilon}{a} f(a \cos \psi, - a \sin \psi, t, \varepsilon) \cos \psi\,.$$

Budiž $\alpha < a_0 < \beta$, $-\pi < \psi_0 \leqq \pi$, $\rho = \min(\beta - a_0, a_0 - \alpha)$, $0 \leqq \varepsilon < \varepsilon_1 = \min\left(\frac{\rho}{KT}, \frac{\alpha}{K}, 1\right)$. Zřejmě existuje řešení $a(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ soustavy (1,3), které je definováno pro $0 \leqq t \leqq T$, splňuje podmínku $a(0, \varepsilon) = a_0$, $\psi(0, \varepsilon) = \psi_0$ a platí: 1) $\alpha < a(t, \varepsilon) < \beta$, 2) $\psi(t, \varepsilon)$ je rostoucí pro $0 \leqq t \leqq T$. Z toho plyne, že každému řešení $x(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon)$ rovnic (1,2), určenému počáteční podmínkou $x(0, \varepsilon) = a_0 \cos \psi_0$, $y(0, \varepsilon) = - a_0 \sin \psi_0$, odpovídá jediné řešení $a(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ rovnic (1,3) s počáteční podmínkou $a(0, \varepsilon) = a_0$, $\psi(0, \varepsilon) = \psi_0$ a naopak, přičemž platí $x(t, \varepsilon) = a(t, \varepsilon) \cos \psi(t, \varepsilon)$, $y(t, \varepsilon) = - a(t, \varepsilon) \sin \psi(t, \varepsilon)$.

Poznámka 1,1. Je-li $\varepsilon = 0$, platí $a(t, 0) = a_0$, $\psi(t, 0) = \psi_0 + t$ pro $0 \leqq t \leqq T$. Podle věty o spojité závislosti řešení diferenciálního rovnice na parametru platí na $\langle 0, T \rangle$ stejnoměrně $a(t, \varepsilon) \to a_0$, $\psi(t, \varepsilon) \to \psi_0 + t$ pro $\varepsilon \to 0_+$.

Přistoupíme ke konstrukci postupných aproximací. Budiž $a(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ řešení soustavy (1,3), kde dosadíme $\varepsilon \in \langle 0, \varepsilon_1 \rangle$, které je definováno pro $0 \leqq t \leqq T$ a splňuje podmínky $a(0, \varepsilon) = a_0$, $\psi(0, \varepsilon) = \psi_0$.

Definujme aproximaci řádu $m > 0$, $a_m(t)$, $\psi_m(t)$ řešení $a(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ takto: Aproximací řádu 0 budiž a_0, $\psi_0 + t$. Je-li $a_k(t)$, $\psi_k(t)$ aproximací řádu k, $0 \leqq k < m$, potom aproximace $a_{k+1}(t)$, $\psi_{k+1}(t)$ řádu $k + 1$ je dána vztahy

$$(1,4) \quad a_{k+1}(t) = a_0 - \varepsilon \int_0^t f[a_k(\sigma) \cos \psi_k(\sigma), - a_k(\sigma) \sin \psi_k(\sigma), \sigma, \varepsilon] \sin \psi_k(\sigma) \, d\sigma ,$$

$$\psi_{k+1}(t) = \psi_0 + t - \varepsilon \int_0^t f[a_k(\sigma) \cos \psi_k(\sigma), - a_k(\sigma) \sin \psi_k(\sigma), \sigma, \varepsilon] \frac{\cos \psi_k(\sigma)}{a_k(\sigma)} \, d\sigma .$$

Poznámka 1,2. Protože pro libovolné přirozené číslo k, pro $0 \leqq \varepsilon < \varepsilon_1$ a pro $t \in \langle 0, T \rangle$ platí

1) $\alpha < a_k(t, \varepsilon) < \beta$,

2) $\psi_k(t, \varepsilon)$ je rostoucí v t,

má integrál v druhé rovnici soustavy (1,4) smysl. Dále, je-li $T \geqq \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}}$, existuje ke každému $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\varepsilon \geqq 0$ a přirozenému k jediné T_k takové, že $\psi_k(T_k, \varepsilon) - \psi_0 = 2\pi$. To ihned plyne z rovnic (1,4), z nerovnosti $|\psi_k(T_k, \varepsilon) - \psi_0| \geqq T_k \left(1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}\right)$ a z toho, že $\psi_k(t, \varepsilon)$ je rostoucí v t.

Poznámka 1,3. Aproximace $a_m(t, \varepsilon)$, $\psi_m(t, \varepsilon)$ a řešení $a(t, \varepsilon)$, $\psi(t, \varepsilon)$ budeme pro jednoduchost psát jako funkce jediné proměnné t.

Označme $B = (\alpha + 1) 2L + 2K$. Indukcí snadno dokážeme tuto větu:

Věta 1,1. *Budiž m celé nezáporné,* $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_1$.

Potom platí pro $0 \leqq t \leqq T$

$$(1,5) \quad |a_m(t) - a(t)| \leqq KB^m \frac{\varepsilon^{m+1}}{\alpha^m} \frac{t^{m+1}}{(m + 1)!} ,$$

$$|\psi_m(t) - \psi(t)| \leqq KB^m \frac{\varepsilon^{m+1}}{\alpha^{m+1}} \frac{t^{m+1}}{(m + 1)!} .$$

Poznámka 1,4. Označíme-li

$$\psi_m(t) = a_m(t) \cos \psi_m(t) , \quad y_m(t) = - a_m(t) \sin \psi_m(t) ,$$

$$\psi(t) = a(t) \cos \psi(t) , \quad y(t) = - a(t) \sin \psi(t) ,$$

platí zřejmě odhady

$$(1,6) \quad |x(t) - x_m(t)| \leqq c\varepsilon^{m+1} ,$$

$$|y(t) - y_m(t)| \leqq c\varepsilon^{m+1} ,$$

kde $c = \left(1 + \dfrac{\beta}{\alpha}\right) \dfrac{KB^m}{\alpha^m} \dfrac{t^{m+1}}{(m + 1)!}$.

Poznámka 1,5. Srovnáme-li uvedenou metodu postupných aproximací s asymptotickou metodou Bogoljubov-Krylovovou [1] pro rovnici (1,1) z hlediska odhadu chyby, vidíme toto: Aproximace řádu m podle Bogoljubova-Krylova odpovídá pracností výpočtu uvedené Picardově aproximaci téhož řádu. Odhad její odchylky od přesného řešení, které splňuje stejnou počáteční podmínku, je řádu ε^m a platí na intervalu délky $\frac{T}{\varepsilon}$, zatím co vzorce (1,6) dávají odhad řádu ε^{m+1} na intervalu délky T.

V další části tohoto odstavce budeme vyšetřovat dobu jednoho oběhu řešení rovnice (1,1) kolem počátku.

Je-li $T \geqq \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}}$, potom podle pozn. 1,2 existuje jediné kladné číslo $T_k \leqq T$, které má tuto vlastnost:

Je-li k celé nezáporné, potom $\psi_k(T_k) = \psi_0 + 2\pi$. Budiž dále $T_p \leqq T$ kladné číslo, které splňuje vztah $\psi(T_p) = \psi_0 + 2\pi$. Podobně jako v pozn. 1,2 zjistíme, že takové T_p existuje a je jediné.

Věta 1,2. *Je-li* $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_1$, *platí*

$$|T_p - T_k| \leqq \varepsilon^{k+1} \frac{KB^k}{\left(1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}\right) \alpha^k (k+1)!} \left(\frac{2\pi}{1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}}\right)^{k+1}.$$

Důkaz: Zřejmě platí

$$(1,7) \quad 0 = \psi(T_p) - \psi_k(T_k) = \psi(T_p) - \psi_k(T_p) + \psi_k(T_p) - \psi_k(T_k) =$$
$$= \psi(T_p) - \psi_k(T_p) + \psi_0 + T_p - \varepsilon \int_0^{T_p} f(a_{k-1}(\sigma) \cos \psi_{k-1}(\sigma),$$
$$- a_{k-1}(\sigma) \sin \psi_{k-1}(\sigma), \sigma, \varepsilon) \frac{\cos \psi_{k-1}(\sigma)}{a_{k-1}(\sigma)} \, d\sigma - \psi_0 - T_k +$$
$$+ \varepsilon \int_0^{T_k} f(a_{k-1}(\sigma) \cos \psi_{k-1}(\sigma), - a_{k-1}(\sigma) \sin \psi_{k-1}(\sigma), \sigma, \varepsilon) \frac{\cos \psi_{k-1}(\sigma)}{a_{k-1}(\sigma)} \, d\sigma =$$
$$= \psi(T_p) - \psi_k(T_p) + T_p - T_k - \varepsilon \int_{T_k}^{T_p} f \frac{\cos \psi_{k-1}(\sigma)}{a_{k-1}(\sigma)} \, d\sigma .$$

Podle věty o střední hodnotě dostaneme z (1,7)

$$(1,8) \quad (T_p - T_k)(1 - \varepsilon f(a_{k-1}(\bar{\sigma}) \cos \psi_{k-1}(\bar{\sigma}),$$
$$- a_{k-1}(\bar{\sigma}) \sin \psi_{k-1}(\bar{\sigma}), \bar{\sigma}, \varepsilon) \frac{\cos \psi_{k-1}(\bar{\sigma})}{a_{k-1}(\bar{\sigma})}\Bigg) = \psi_k(T_p) - \psi(T_p),$$

kde $\bar{\sigma} = T_k + \Theta(T_p - T_k)$, $|\Theta| < 1$.

Odhadneme-li pravou stranu rovnice (1,8) pomocí věty 1,1, dostaneme z (1,8)

$$|T_p - T_k| \leqq \frac{KB^k \varepsilon^{k+1} T_p^{k+1}}{\left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right) \alpha^k (k+1)!}.$$

Odtud ihned plyne věta 1,2, neboť podle definice čísla T_p platí

$$2\pi = T_p - \varepsilon \int_0^{T_p} f[a(t) \cos \psi(t), - a(t) \sin \psi(t), t, \varepsilon) \frac{\cos \psi(t)}{a(t)} \, dt,$$

a z toho $T_p \leqq \dfrac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}}$.

Poznámka 1,6. Počítáme-li číslo T_p přibližně pomocí první aproximace T_1, narazíme na úlohu řešení rovnice

$$2\pi = T_1 - \frac{\varepsilon}{a_0} \int_0^{T_1} \bar{f}(t) \, dt, \tag{1,9}$$

kde $\bar{f}(t) = f(a_0 \cos(\psi_0 + t), - a_0 \sin(\psi_0 + t), t, \varepsilon) \cos(\psi_0 + t)$, vzhledem k T_1. Ukážeme, že tuto nesnáz můžeme obejít tak, že rovnici (1,9) nahradíme rovnicí jednodušší, aniž tím řádově zvětšíme chybu přibližného výpočtu doby oběhu T_p. Definujme číslo $\bar{T}_1$ rovnicí

$$2\pi = \bar{T}_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt\right). \tag{1,10}$$

Nyní platí tvrzení A: Pro $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_1$ platí odhad

$$|T_p - \bar{T}_1| \leqq \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left[\frac{2KB\pi^2}{\left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^3} + \frac{4K^2\pi}{\alpha - \varepsilon K}\right]. \tag{1,11}$$

Důkaz: Podle definice čísel T_1, $\bar{T}_1$ platí

$$2\pi = T_1 - \frac{\varepsilon}{a_0} \int_0^{T_1} \bar{f}(t) \, dt = \bar{T}_1 - \frac{\varepsilon \bar{T}_1}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt.$$

Odtud

$$T_1 - \bar{T}_1 = \frac{\varepsilon}{a_0} \left[\int_0^{T_1} \bar{f}(t) \, dt - \frac{\bar{T}_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt\right] = \tag{1,12}$$

$$= \frac{\varepsilon}{a_0} \left[\left(1 - \frac{\bar{T}_1}{2\pi}\right) \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt + \int_{2\pi}^{T_1} \bar{f}(t) \, dt\right].$$

Podle (1,10)

$$2\pi - \bar{T}_1 = 2\pi - \frac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt} = \frac{- \frac{\varepsilon}{a_0} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt}{1 - \frac{\varepsilon}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt}. \tag{1,13}$$

Podle (1,9) a podle věty o střední hodnotě platí $2\pi = T_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{a_0} \bar{f}(t_1)\right)$, kde $0 \leqq t_1 \leqq \leqq T$. Z toho

$$(1,14) \qquad 2\pi - T_1 = 2\pi - \frac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon}{a_0} \bar{f}(t_1)} = \frac{- \frac{2\pi\varepsilon}{a_0} \bar{f}(t_1)}{1 - \frac{\varepsilon}{a_0} \bar{f}(t_1)} .$$

Podle (1,12), (1,13), (1,14) a podle věty o střední hodnotě

$$T_1 - \bar{T}_1 = \frac{\varepsilon}{a_0} \left[\frac{- \frac{\varepsilon}{a_0} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt}{2\pi \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\pi a_0} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt\right)} \int_0^{2\pi} \bar{f}(t) \, dt + \frac{\frac{2\pi\varepsilon}{a_0} \bar{f}(t_1)}{1 - \frac{\varepsilon}{a_0} \bar{f}(t_1)} \bar{f}(t_2) \right],$$

kde $0 \leqq t_2 \leqq T$.

Z toho

$$(1,15) \qquad |T_1 - \bar{T}_1| \leqq \left(\frac{\varepsilon}{a_0}\right)^2 \left[\frac{2\pi K^2}{1 - \frac{\varepsilon K}{a_0}} + \frac{2\pi K^2}{1 - \frac{\varepsilon K}{a_0}} \right] \leqq \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \frac{4\pi K^2}{\alpha - \varepsilon K} .$$

Odtud a z věty 1,2 již důkaz tvrzení A snadno plyne.

P ř í k l a d 1,1. Budeme vyšetřovat rovnici

$$(1,16) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = - \sin x ,$$

na níž ověříme přesnost uvedených odhadů.

Budiž $x(t)$ řešení rovnice (1,16), splňující počáteční podmínky $x(0) = a_0 (a_0 > 0)$, $\dot{x}(0) = 0$. Je známo, že toto řešení je periodické. Přepíšeme-li rovnici (1,16) ve tvaru

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = x - \sin x ,$$

máme rovnici typu (1,1), kde klademe $\varepsilon f = x - \sin x$.

Soustava (1,3) má tvar

$$(1,17) \qquad \begin{aligned} \dot{a} &= [\sin (a \cos \psi) - a \cos \psi] \sin \psi , \\ \dot{\psi} &= 1 - \frac{1}{a} [\sin (a \cos \psi) - a \cos \psi] \cos \psi \end{aligned}$$

a řešení $x(t)$ rovnice (1,16) odpovídá řešení $a(t)$, $\psi(t)$ soustavy (1,17), splňující podmínky $a(0) = a_0$, $\psi(0) = 0$. Má-li řešení $x(t)$ nejmenší periodu T_p, má též $a(t)$ periodu T_p a platí $\psi(T_p) = 2\pi$. Skutečně, je-li $t + T_p \in \langle 0, T \rangle$, platí $a(t + T_p) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$. Dále platí $\cos \psi(t + T_p) = x(t)[x^2(t) + y^2(t)]^{-\frac{1}{2}} = \cos \psi(t)$, $\sin \psi(t + T_p) =$

$= -y(t)[x^2(t) + y^2(t)]^{-\frac{1}{2}} = \sin\psi(t)$. Protože $\dot{\psi}(t) > 0$ pro $t \in \langle 0, T \rangle$, platí $\psi(t + T_p) = \psi(t) + 2k\pi$. Protože řešení $x(t)$, $y(t)$ odpovídá v rovině x, y uzavřená křivka, je $k = 1$ a tvrzení je dokázáno.

Abychom určili interval $\langle \alpha, \beta \rangle$, v němž se bude pohybovat amplituda $a(t)$ pro $t \in \langle 0, T_p \rangle$, položme $\alpha = a_0(1 - p)$, $\beta = a_0(1 + p)$. Číslo $p \in (0,1)$ určíme z těchto podmínek:

1) $\dfrac{a_0^2(1 + p)^3}{3} \dfrac{\pi}{1 - \dfrac{a_0^2(1 + p)^3}{6(1 - p)}} \leqq p$,

2) $\dfrac{a_0^2(1 + p)^3}{6(1 - p)} < 1$,

3) $\frac{1}{6} a_0^3(1 + p)^3 < 1$.

Skutečně, položíme-li $\varepsilon = \dfrac{\beta^3}{6}$, $K = 1$, snadno se přesvědčíme, že podmínky 1), 2), 3) vyjadřují podmínky pro ε_1, uvedené za rovnicemi (1,3). Tak např. první podmínku odvodíme z požadavku, že funkce $a(t)$ se pro $0 \leqq t \leqq T_p$ nesmí vzdálit od počáteční hodnoty a_0 více než $\beta - a_0 = a_0 p$: Z druhé rovnice (1,17) plyne $T_p \leqq \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{a_0^3(1 + p)^3}{6a_0(1 - p)}}$.

Odtud a z první rovnice (1,17) dostaneme pro $0 \leqq t \leqq T_p$: $|a(t) - a_0| \leqq \dfrac{a_0^3(1 + p)^3}{6} \cdot$

$\cdot \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{a_0^2(1 + p)^3}{6(1 - p)}}$, takže požadavku $|a(t) - a_0| \leqq a_0 p$ pro $0 \leqq t \leqq T_p$ bude vyhověno, jakmile je splněna podmínka 1). Podobně pro podmínky 2), 3). Je ihned vidět že číslo p, vyhovující podmínkám 1), 2), 3), existuje, jakmile a_0 je dosti malé.

Dále určíme Lipschitzovu konstantu L funkce $f(x) = \dfrac{6}{\beta^3}(x - \sin x)$. Protože

$$|f'(x)| = \left|\frac{6}{\beta^3}(1 - \cos x)\right| \leqq \frac{6}{\beta^3}\frac{\beta^2}{2} = \frac{3}{\beta},$$

máme

$$B = (\alpha + 1)\, 2L + 2K = (\alpha + 1)\frac{6}{\beta} + 2 = 6\,\frac{a_0(1 - p) + 1}{a_0(1 + p)} + 2 = \frac{8a_0 - 4a_0 p + 6}{a_0(1 + p)}.$$

Podle pozn. 1,4 je chyba, které se dopustíme nahrazením funkcí $x(t)$, $\dot{x}(t)$ např. první aproximací, řádu a_0^4, neboť

$$|x(t) - x_1(t)| \leqq \left(1 + \frac{1 + p}{1 - p}\right)\frac{8a_0 - 4a_0 p + 6}{a_0(1 + p)}\,\frac{a_0^6(1 + p)^6}{36a_0(1 - p)}\,\frac{t^2}{2}$$

a podobně pro $|\dot{x}(t) - y_1(t)|$.

Periodu T_p funkce $x(t)$ vypočítáme přibližně podle poznámky 1,6, tedy

$$\bar{T}_1 = 2\pi\left[1 + \frac{1}{2\pi a_0}\int_0^{2\pi}(\sin(a_0\cos t) - a_0\cos t)\cos t\,\mathrm{d}t\right]^{-1}.$$

Podle (1,11) platí

$$(1{,}18)\quad |\bar{T}_1 - T_p| \leqq \frac{a_0^6(1+p)^6}{36a_0(1-p)}\left\{\frac{8a_0 - 4a_0p + 6}{a_0(1+p)}\,2\pi^2\left[1 - \frac{6(1-p)}{a_0^2(1+p)^3}\right]^{-3} + \right.$$
$$\left. + \frac{4\pi}{a_0(1 - p - \frac{1}{6}(1+p)^3}\right\} \leqq a_0^4c\,,$$

kde c nezávisí na a_0.

Zbývá ještě zjistit, jak velký je skutečný rozdíl $\bar{T}_1 - T_p$, abychom mohli zhodnotit přesnost odhadu (1,18). K tomu vyjádříme obě periody T_p a $\bar{T}_1$ ve tvaru mocninné řady v a_0.

Jak známo, $T_p = 4\int_0^{a_0}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2(\cos x - \cos a_0)}}$. Substitucí $\sin\frac{x}{2} = \sin\frac{a_0}{2}\sin\vartheta$ dostaneme $T_p = 4\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{a_0}{2}\sin^2\vartheta}}$. Poslední integrál rozložíme podle mocnin $\sin^2\frac{a_0}{2}$, dosadíme za $\sin\frac{a_0}{2}$ mocninnou řadu v a_0 a po přerovnání členů obdržíme

$$(1{,}19)\qquad T_p = 2\pi\left[1 + \frac{a_0^2}{16} + \frac{11}{6\,.\,8^4}\,a_0^4 + \ldots\right],$$

kde nevypsané členy začínají mocninou a_0^6.

Dále máme (při označení $(2\pi a_0)^{-1}\int_0^{2\pi}(\sin(a_0\cos t) - a_0\cos t)\cos t\,\mathrm{d}t = A$)

$$\bar{T}_1 = \frac{2\pi}{1 + A} = 2\pi(1 - A + A^2 - \ldots).$$

Rozložíme-li A v řadu podle mocnin a_0, dostaneme po přerovnání členů $\bar{T}_1 = 2\pi\left(1 + \frac{a_0^2}{16} + \frac{1}{12\,.\,8^2}\,a_0^4 + \ldots\right)$, kde nevypsané členy začínají mocninou a_0^6.

Odtud plyne, že odhad (1,18) nelze již řádově zlepšit.

2. V tomto odstavci se budeme zabývat rovnicí

$$(2{,}1)\qquad \dot{x} = g(x)\,;$$

kde $x = (x_1, x_2)$ a $g = (g_1, g_2)$ je spojitá a splňuje Lipschitzovu podmínku s konstantou nezávislou na x v otevřené a omezené oblasti $D \subset E_2$.

Uvedeme některé základní pojmy a výsledky Poincaré-Bendixsonovy teorie.

Bod $x \in D$, pro nějž $g_1(x) = g_2(x) = 0$, se nazývá singulární. V opačném případě se bod x nazývá regulární. Nechť $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$je řešení rovnice (2,1), které je definováno v D pro $t \geqq 0$ ($t \leqq 0$). Množina všech bodů $x(t)$ pro $t \geqq 0$ ($t \leqq 0$) se nazývá positivní (negativní) polotrajektorie rovnice (2,1) a označuje se C^+ (C^-). Bod $Q \in D$ se nazývá ω-hromadným (α-hromadným) bodem polotrajektorie C^+ (C^-), jestliže existuje posloupnost reálných čísel $\{t_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, t_n \to \infty$ ($t_n \to -\infty$) pro $n \to \infty$, taková, že $x(t_n) \to Q$ pro $n \to \infty$. Množina všech ω-hromadných bodů (α-hromadných bodů) polotrajektorie C^+ (C^-) se označuje $L(C^+)$ ($L(C^-)$).

Budiž C^+ positivní polotrajektorie, $C^+ \subset K$, K je uzavřená část oblasti D. Sestává-li množina $L(C^+)$ pouze z regulárních bodů, potom buď a) C^+ je periodická trajektorie a $C^+ = L(C^+)$, nebo b) $L(C^+)$je periodická trajektorie (Poincaré-Bendixsonova věta). V případě b) se $L(C^+)$ nazývá limitní cyklus. Odtud plyne, že polotrajektorie $C^+ \subset K$ buď směřuje do některého singulárního bodu oblasti D, nebo se navíjí na periodickou trajektorii, nebo konečně je sama periodickou trajektorií.

Uzavřená konečná úsečka l v rovině se nazývá transversála vzhledem k $g(x)$, jestliže každý bod $x \in l$ je regulární a jestliže směr vektoru $g(x)$ ve všech bodech úsečky l je různý od směru úsečky l. Důležitou vlastností transversály je, že každá trajektorie, která má s transversálou společný bod, transversálu v tomto bodě protíná, přičemž všechny takové trajektorie ji protínají stejným směrem. Dále, protíná-li konečný uzavřený oblouk A trajektorie C transversálu, děje se tak v konečném počtu průsečíků, jejichž pořadí na A je stejné jako na C. Je-li C periodická, protíná transversálu v jediném bodě.

Zaveďme konečně pojem orbitální stability: Periodická trajektorie C se nazývá positivně stabilní z vnějšku (vnitřku), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ takové, že každá positivní polotrajektorie, která vychází v čase $t = 0$ z bodu ležícího vně (uvnitř) trajektorie C vzdáleného od C méně než $\delta(\varepsilon)$, je definována pro všechna $t \geqq 0$ a nevzdálí se od C více než o ε. Periodická trajektorie se nazývá positivně stabilní, je-li positivně stabilní z vnějšku i z vnitřku. Položíme-li v uvedené definici $-t$ místo t, dostaneme pojem negativní stability.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby periodická trajektorie C byla positivně stabilní, je, aby pro vnitřek i vnějšek trajektorie C platilo buď

a) existuje polotrajektorie, která se navíjí na C pro $t \to \infty$ (C je limitní cyklus), nebo

b) v každém okolí existují periodické trajektorie.

Dále uvedeme větu, o niž se budeme opírat při úvahách v příštím odstavci.

Věta 2,1. *Budiž l transversála vzhledem k $g(x)$, buďte C_1^+ a C_2^+ polotrajektorie ležící v D, buďte P_i^1 a P_i^2 dva následující průsečíky polotrajektorie C_i^+ s transversálou l ($i = 1, 2$) takové, že platí:*

a) Jordanova křivka C_2, sestávající z otevřeného oblouku $\widehat{P_2^1 P_2^2}$ orientovaného od bodu P_2^1 do P_2^2 na polotrajektorii C_2^+ a z uzavřené úsečky $\overline{P_2^2 P_2^1}$ na l, leží uvnitř Jordanovy *křivky C_1, sestávající z $\widehat{P_1^1 P_1^2}$ a $\overline{P_1^2 P_1^1}$, přičemž pořadí těchto bodů na l je $P_1^1 P_1^2 P_2^2 P_2^1$* (obr. 1);

b) otevřená oblast D_1 omezená křivkami C_1 a C_2 je obsažena i se svou hranicí v množině D.

Neobsahuje-li množina D žádné singulární body, existuje v D_1 aspoň jedna positivně stabilní periodická trajektorie, která ve svém vnitřku obsahuje křivku C_2.

3. V tomto odstavci budeme vyšetřovat případ, kdy funkce f nezávisí explicitně na t. Budeme tedy vyšetřovat rovnici

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, \varepsilon\right). \tag{3,1}$$

Funkce $f(x, y, \varepsilon)$ splňuje tyto podmínky:

1) f je definována pro $(x, y) \in D$, $D = E((x, y); \alpha < \sqrt{x^2 + y^2} < \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, $0 \leqq \varepsilon < 1$;

2) f je spojitá ve všech proměnných;

3) existuje konstanta L tak, že

$$|f(x_2, y_2, \varepsilon) - f(x_1, y_1, \varepsilon)| \leqq L\{|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\}$$

pro $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, $0 \leqq \varepsilon < 1$;

4) existuje konstanta K tak že $|f(x, y, \varepsilon)| \leqq K$ pro $(x, y) \in D$, $0 \leqq \varepsilon < 1$.

Podobně jako v prvním odstavci budeme po zavedení polárních souřadnic vyšetřovat ekvivalentní soustavu

$$\frac{da}{dt} = -\varepsilon f(a\cos\psi, -a\sin\psi, \varepsilon)\sin\psi, \tag{3,2}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = 1 - \frac{\varepsilon}{a} f(a\cos\psi, -a\sin\psi, \varepsilon)\cos\psi,$$

a postupné aproximace

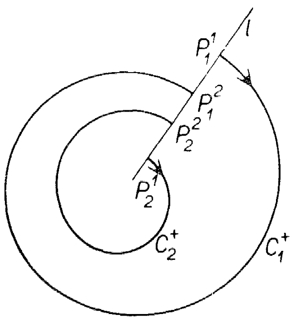
$$a_{k+1}(t) = a_0 - \varepsilon \int_0^t f(a_k(\sigma)\cos\psi_k(\sigma), -a_k(\sigma)\sin\psi_k(\sigma), \varepsilon)\sin\psi_k(\sigma)\, d\sigma, \tag{3,3}$$

$$\psi_{k+1}(t) = \psi_0 + t - \varepsilon \int_0^t \frac{\cos\psi_k(\sigma)}{a_k(\sigma)} f(a_k(\sigma)\cos\psi_k(\sigma), -a_k(\sigma)\sin\psi_k(\sigma), \varepsilon)\, d\sigma.$$

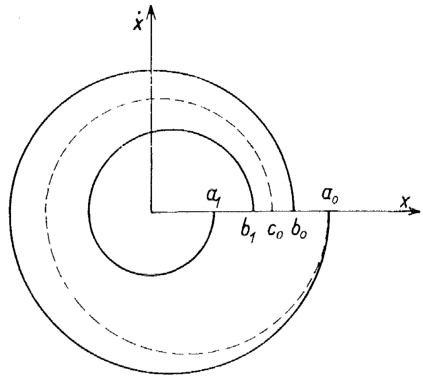
V tomto odstavci ukážeme postačující podmínky pro to, aby v mezikruží D existovala positivně stabilní periodická trajektorie rovnice (3,1). Budeme přitom postupovat tak, že nejprve najdeme takové přirozené číslo n_0 a reálné $a_0 \in (\alpha, \beta)$, že aproximace $a_{n_0}(t)$, $\psi_{n_0}(t)$, pro niž platí $a_{n_0}(0) = a_0$, $\psi_{n_0}(0) = 0$, tvoří ve fázové rovině x, $\dot{x}$ křivku, která po jednom oběhu kolem počátku protne kladnou osu x ve vzdálenosti b_0 od počátku, $b_0 < a_0$ (obr. 2). Dále hledáme n_1 a $a_1 \in (\alpha, a_0)$ takové, že aproximace $a_{n_1}(t)$, $\psi_{n_1}(t)$, pro niž platí počáteční podmínka $a_{n_1}(0) = a_1$, $\psi_{n_1}(0) = 0$, tvoří ve fázové rovině křivku, která po jednom oběhu kolem počátku protne kladnou osu x

ve vzdálenosti $b_1 > a_1$. K tomu ihned poznamenejme, že existuje-li v oblasti D jediný positivně stabilní limitní cyklus, potom čísla a_0, n_0, a_1, n_1 uvedených vlastností skutečně existují.

Jako další krok odhadneme chybu příslušných aproximací v bodech[1]) b_0, b_1. Tím zjistíme, zda trajektorie soustavy (3,1), vycházející z bodu a_0, protne po jednom oběhu kolem počátku kladnou osu x v bodě $c_0 < a_0$ (obr. 2). Podobně postupujeme pro druhou trajektorii, vycházející z bodu a_1, která protne kladnou osu x v bodě c_1.



Obr. 1.



Obr. 2.

Vyjde-li tedy, že odhad rozdílu $|b_0 - c_0|$ $(|b_1 - c_1|)$ je menší než $a_0 - b_0$ $(b_1 - a_1)$, dostaneme na základě věty 2,1, že mezi uzavřenými čarami skládajícími se z oblouku trajektorie $\widehat{a_0c_0}(\widehat{a_1c_1})$ a úsečky $\overline{c_0a_0}$ $(\overline{c_1a_1})$ existuje aspoň jedna positivně stabilní periodická trajektorie, která protíná úsečku $\overline{a_1a_0}$ v jediném bodě. Tyto úvahy budeme nyní přesně formulovat.

Nechť $\alpha < a_1 < a_0 < \beta$ a nechť n_0, n_1 jsou přirozená čísla. Označme

$$(3,4) \qquad \rho_2 = \min(\beta - a_0, a_1 - \alpha), \quad \varepsilon_2 = \min\left(1, \frac{\alpha\rho_2}{2\pi\alpha K + \rho_2 K}, \frac{\alpha}{K}\right).$$

Dokážeme, že pro $0 \leqq \varepsilon < \varepsilon_2$ řešení $A_i(t)$, $\Psi_i(t)$ rovnic (3,2), splňující počáteční podmínku $A_i(0) = a_i$, $\Psi_i(0) = 0$, $i = 0, 1$,

a) nevyjde z oblasti D pro $t \in \left\langle 0, 2\pi\left(1 - \frac{\varepsilon_2 K}{\alpha}\right)^{-1}\right\rangle$,

b) existují pro něj čísla T_0, $T_1 \in \left\langle 2\pi\left(1 + \frac{\varepsilon_2 K}{\alpha}\right)^{-1}, 2\pi\left(1 - \frac{\varepsilon_2 K}{\alpha}\right)^{-}\right.$ tak, že

$\Psi_i(T_i) = 2\pi$, $i = 0,1$. Obdobné tvrzení platí pro aproximace (3,3), pokud splňují tytéž počáteční podmínky. Důkaz: Z rovnic (3,2) a z předpokladů o funkci f plyne, že

[1]) Pro jednoduchost budeme stejně označovat body na kladné ose x a jejich vzdálenosti od počátku.

a) $|A_i(t) - a_i| \leqq \varepsilon K t \leqq \varepsilon_2 K \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{\varepsilon_2 K}{\alpha}} = 2\pi \left(\dfrac{1}{\varepsilon_2 K} - \dfrac{1}{\alpha}\right)^{-1} \leqq$

$\leqq 2\pi \left(\dfrac{2\pi\alpha K + \rho_2 K}{\alpha \rho_2 K} - \dfrac{1}{\alpha}\right)^{-1} = \rho_2 ,$

b) $|2\pi - T_i| \leqq \varepsilon \dfrac{K T_i}{\alpha}$, a odtud $T_i \in \left\langle 2\pi \left(1 + \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1}, 2\pi \left(1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1} \right\rangle$.

Věta 3,1. *Nechť $a_{n_i}(t)$, $\psi_{n_i}(t)$ pro $i = 0, 1$ jsou aproximace, dané rovnicemi (3,3), kde $a_{n_i}(0) = a_i$, $\psi_{ni}(0) = 0$, a splňují podmínku:*

Je-li $T_{n_i} \in \left\langle 2\pi \left(1 + \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1}, 2\pi \left(1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1} \right\rangle$, $\psi_{n_i}(T_{n_i}) = 2\pi$, potom

$$[a_i - a_{n_i}(T_{n_i})](-1)^i > \varepsilon^{n_i+1} \left[\frac{K B^{n_i}}{\alpha^{n_i}(n_i + 1)!} T_{n_i}^{n_i+1} + \right. \tag{3,5}$$

$$\left. + \varepsilon \frac{K^2 B^{n_i} (2\pi)^{n_i+1}}{\alpha^{n_i}(n_i + 1)! \left(1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{n_i+2}} \right], \quad \textit{kde } B = (\alpha + 1)\, 2L + 2K.$$

Označme C_0 (C_1) uzavřenou křivku, která sestává

a) z uzavřeného oblouku polotrajektorie, omezené body a_0, c_0 (a_1, c_1), kde bod c_0 (c_1) je následujícím průsečíkem polotrajektorie, vycházející z a_0 (a_1), s úsečkou l, omezenou body α, β,

b) z otevřené úsečky, omezené body c_0, a_0 (c_1, a_1).

Potom existuje aspoň jedna positivně stabilní periodická trajektorie soustavy (3,1), která protíná právě v jednom bodě úsečku omezenou body c_1, c_0 a leží tedy v topologickém mezikruží omezeném křivkami C_0 a C_1.

D ů k a z: Podle věty o střední hodnotě, věty 1,2 a podle (1,5) platí pro $i = 0, 1$

$$|A_i(T_i) - a_{n_i}(T_{n_i})| \leqq |A_i(T_i) - A_i(T_{n_i})| + |A_i(T_{n_i}) - a_{n_i}(T_{n_i})| \leqq$$

$$\leqq |T_i - T_{n_i}| \varepsilon K + \frac{K B^{n_i}}{\alpha^{n_i}(n_i + 1)!} \varepsilon^{n_i+1} T_{n_i}^{n_i+1} \leqq$$

$$\leqq \varepsilon^{n_i+2} \frac{K^2 B^{n_i} (2\pi)^{n_i+1}}{\alpha^{n_i}(n_i + 1)! \left(1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{n_i+2}} + \varepsilon^{n_i+1} \frac{K B^{n_i}}{\alpha^{n_i}(n_i + 1)!} T_{n_i}^{n_i+1} .$$

Je-li nyní $[a_i - a_{n_i}(T_{n_i})](-1)^i > |A_i(T_i) - a_{n_i}(T_{n_i})|$, $i = 0, 1$, platí $a_0 - A_0(T_0) > 0$, $A_1(T_1) - a_1 > 0$. Protože uzavřená úsečka l obsažená v intervalu (α, β) kladné osy x je transversálou vzhledem k pravým stranám rovnic (3,2), můžeme použít věty 2,1, čímž je důkaz proveden.

Poznámka 3,1. Podmínka (3,5) je postačující pro to, aby transversálu l protínala mezi body a_0, a_1 aspoň jedna positivně stabilní periodická trajektorie. Lze snadno ukázat, že (3,5) je zároveň nutnou podmínkou pro to, aby transversálu l potínal isolovaný positivně stabilní limitní cyklus. Tato okolnost má mimořádný význam při praktickém použití věty 3,1. Věta 3,1 totiž slouží k tomu, abychom si ověřili, že v daném mezikruží opravdu existuje positivně stabilní periodická trajektorie, kterou jsme předtím buď nějakou přibližnou metodou předpověděli, nebo jsme zjistili její existenci (případně unicitu) na základě nějaké obecné věty, ale potřebujeme blíže určit její polohu. Smysl této poznámky spočívá v tom, že existuje-li skutečně hledaný positivně stabilní isolovaný limitní cyklus, potom existují i čísla n_0, n_1, a_0, a_1 ve větě 3,1. Dále je zřejmé toto: našli-li jsme čísla n_i, a_i z formule (3,5) a existuje-li v daném mezikruží jediný positivně stabilní limitní cyklus, můžeme jej určit s libovolnou přesností, provedeme-li dostatečný počet kroků s dosti vysokým řádem aproximace.

Další věta dává odhad pro periodu daného periodického řešení.

Věta 3,2. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 3,1. Označme* $\dfrac{a_0 + a_1}{2} = d_0$. *Budiž* $a_m(t)$, $\psi_m(t)$ *aproximace typu (3,3), splňující počáteční podmínku* $a_m(0) = d_0$, $\psi_m(0) = 0$, *a budiž* T_m *číslo, pro něž platí* $\psi_m(T_m) = 2\pi$. *Buď* $a(t)$, $\psi(t)$ *řešení soustavy* (3,2), $a(0) \in (a_1, a_0)$, $\psi(0) = 0$, *a buď* T *číslo, pro něž platí* $\psi(T) = 2\pi$.[1])

Potom existují konstanty K_1, K_2 *(nezávislé na* d_0, $a(0)$, a_0, a_1, ε, m*) tak, že*

$$|T - T_m| \leqq K_1 \varepsilon^{m+1} + K_2 \varepsilon (a_0 - a_1)\,. \tag{3,6}$$

K důkazu věty budeme potřebovat toto lemma:

Lemma 3,1. *Budiž* m *přirozené číslo,* $\xi_1, \xi_2 \in (a_1, a_0)$, *a buďte* $a_m(t, \xi_i)$, $\psi_m(t, \xi_i)$ $(i = 1, 2)$ *aproximace typu* (3,3), *splňující podmínky* $a_m(0, \xi_i) = \xi_i$, $\psi_m(0, \xi_i) = 0$. *Označme* $K_4 = \max\left(K + 2LB, 2L, \dfrac{K + 2L\beta}{\alpha}, \dfrac{K\beta + 2L\beta}{\alpha}\right)$.

Potom

$$|a_m(t, \xi_1) - a_m(t, \xi_2)| \leqq \tfrac{1}{2}[1 + \exp(2\,\varepsilon_2 K_4 t)]|\xi_1 - \xi_2|,$$

$$|\psi_m(t, \xi_1) - \psi_m(t, \xi_2)| \leqq \tfrac{1}{2}\exp(2\varepsilon K_4 t)|\xi_1 - \xi_2|$$

pro $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{\varepsilon_2 K}{\alpha}}$.

Důkaz: Pro $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{\varepsilon_2 K}{\alpha}}$ zřejmě bod $[a_m(t, \xi_i)\cos\psi_m(t, \xi_i), -$ $- a_m(t, \xi_i)\sin\psi_m(t, \xi_i)] \in D$ a tudíž platí

[1]) Podobně jako v pozn. 1,2 zjistíme, že existuje právě jedna dvojice čísel T_m, T s uvedenými vlastnostmi.

$$(3,7)\quad |a_m(t,\xi_1) - a_m(t,\xi_2)| = |\xi_1 - \xi_2 - \varepsilon\int_0^t \{f[a_{m-1}(\tau,\xi_1)\cos\psi_{m-1}(\tau,\xi_1),$$
$$- a_{m-1}(\tau,\xi_1)\sin\psi_{m-1}(\tau,\xi_1),\varepsilon]\sin\psi_{m-1}(\tau,\xi_1) - f[a_{m-1}(\tau,\xi_2)\cos\psi_{m-1}(\tau,\xi_2),$$
$$- a_{m-1}(\tau,\xi_2)\sin\psi_{m-1}(\tau,\xi_2),\varepsilon]\sin\psi_{m-1}(\tau,\xi_2)\}\,d\tau| \leqq$$
$$\leqq |\xi_1 - \xi_2| + \varepsilon K\int_0^t |\psi_{m-1}(\tau,\xi_1) - \psi_{m-1}(\tau,\xi_2)|\,d\tau +$$
$$+ 2\varepsilon L\int_0^t \{|a_{m-1}(\tau,\xi_1) - a_{m-1}(\tau,\xi_2)| + \beta|\psi_{m-1}(\tau,\xi_1) - \psi_{m-1}(\tau,\xi_2)|\}\,d\tau =$$
$$= |\xi_1 - \xi_2| + (\varepsilon K + 2\varepsilon L\beta)\int_0^t |\psi_{m-1}(\tau,\xi_1) - \psi_{m-1}(\tau,\xi_2)|\,d\tau +$$
$$+ 2\varepsilon L\int_0^t |a_{m-1}(\tau,\xi_1) - a_{m-1}(\tau,\xi_2)|\,d\tau\,.$$

Podobně zjistíme, že

$$(3,8)\quad |\psi_m(t,\xi_1) - \psi_m(t,\xi_2)| \geqq \frac{\varepsilon}{\alpha^2}\left\{(K + 2\beta L)\int_0^t |a_{m-1}(\tau,\xi_1) - a_{m-1}(\tau,\xi_2)|\,d\tau +\right.$$
$$\left.+ (K\beta + 2\beta^2 L)\int_0^t |\psi_{m-1}(\tau,\xi_1) - \psi_{m-1}(\tau,\xi_2)|\,d\tau\right\}.$$

Z nerovností (3,7) a (3,8) plyne

$$(3,9)\quad |a_m(t,\xi_1) - a_m(t,\xi_2)| \leqq |\xi_1 - \xi_2| + \varepsilon K_4\int_0^t [|a_{m-1}(\tau,\xi_1) - a_{m-1}(\tau,\xi_2)| +$$
$$+ |\psi_{m-1}(\tau,\xi_1) - \psi(\tau,\xi_2)|]\,d\tau\,,$$

$$(3,10)\quad |\psi_m(t,\xi_1) - \psi_m(t,\xi_2)| \leqq \varepsilon K_4\int_0^t [|a_{m-1}(\tau,\xi_1) - a_{m-1}(\tau,\xi_2)| +$$
$$+ |\psi_{m-1}(\tau,\xi_1) - \psi_{m-1}((\tau,\xi_2)|]\,d\tau\,.$$

Dokážeme dále tvrzení A: Pro $0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{\varepsilon_2 K}{\alpha}}$, $\xi_1, \xi_2 \in (a_1, a_0)$, m přirozené, platí

$$|a_m(t,\xi_1) - a_m(t,\xi_2)| \leqq |\xi_1 - \xi_2|\left[1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{2^{i-1}(\varepsilon K_4 t)^i}{i!}\right],$$
$$|\psi_m(t,\xi_1) - \psi_m(t,\xi_2)| \leqq |\xi_1 - \xi_2|\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{2^{i-1}(\varepsilon K_4 t)^i}{i!}\right].$$

Pro $m = 1$ dostaneme tvrzení A ihned z (3,9), (3,10), dosadíme-li za $a_0(\tau,\xi_i) = \xi_i$, $\psi_0(\tau,\xi_i) = \tau$, $i = 1, 2$. Platí-li tvrzení A pro $m = k$, dostaneme z (3,9), (3,10)

$$|a_{k+1}(t,\xi_1) - a_{k+1}(t,\xi_2)| \leqq |\xi_1 - \xi_2| + \varepsilon K_4\int_0^t |\xi_1 - \xi_2|\left\{1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}(\varepsilon K_4\tau)^i}{i!} +\right.$$
$$\left.+ \sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}(\varepsilon K_4\tau)^i}{i!}\right\}d\tau \leqq |\xi_1 - \xi_2|\left\{1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{2^i(\varepsilon K_4 t)^{i+1}}{(i+1)!} + \varepsilon K_4 t\right\},$$

$$|\psi_{k+1}(t,\xi_1) - \psi_{k+1}(t,\xi_2)| \leqq \varepsilon K_4\int_0^t |\xi_1 - \xi_2|\left\{1 + \sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}(\varepsilon K_4\tau)^i}{i!} +\right.$$
$$\left.+ \sum_{i=1}^{k}\frac{2^{i-1}(\varepsilon K_4 t)^i}{i!}\right\}d\tau \leqq |\xi_1 - \xi_2|\left[\varepsilon K_4 t + \sum_{i=1}^{k}\frac{2^i(\varepsilon K_4 t)^{i+1}}{i!}\right].$$

Tvrzení A je tím dokázáno pro $m = k + 1$ a platí tedy pro všechna přirozená m.

Protože $\sum_{i=1}^{m} \frac{2^{i-1}(\varepsilon K_4 t)^i}{i!} \leqq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2\varepsilon_2 K_4 t)^i}{i!} = \frac{1}{2} [\exp(2\varepsilon_2 K_4 t) - 1]$, je lemma 3,1 dokázáno.

Důkaz věty 3,2: Budiž $a_m^*(t)$, $\psi_m^*(t)$ aproximace typu (3,3), pro niž $a_m^*(0) = a(0)$, $\psi_m^*(0) = 0$, budiž T_m^* číslo splňující rovnici $\psi_m^*(T_m^*) = 2\pi$. Potom platí podle věty 1,2

$$|T - T_m^*| \leqq \frac{KB^m \varepsilon^{m+1}}{\left(1 - \frac{\varepsilon_2 K}{\alpha}\right)^{m+2} \alpha^m (m+1)!} \left(\frac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon_2 K}{\alpha}}\right)^{m+1} \leqq K_1 \varepsilon^{m+1},$$

kde K_1 nezávisí na m, d_0, a_0, a_1, ε.

Tím jsme odhadli chybu, které se dopustíme, nahradíme-li přesné řešení přibližným se stejnou počáteční podmínkou. Zbývá ještě odhadnout chybu, která vznikne nahrazením aproximace $a_m^*(t)$, $\psi_m^*(t)$ funkcí $a_m(t)$, $\psi_m(t)$, která má odlišné počáteční podmínky.

Nechť $d_1 \in \langle a_1, a_0 \rangle$ a vyšetřujme aproximaci $\bar{a}_m(t)$, $\bar{\psi}_m(t)$, splňující počáteční podmínky $\bar{a}_m(0) = d_1$, $\bar{\psi}_m(0) = 0$, Označme $\bar{T}_m(d_1)$ číslo, splňující podmínku $\bar{\psi}_m(\bar{T}_m(d_1)) = 2\pi$. Podle (3,3) platí

$$2\pi = \bar{T}_m(d_1) - \varepsilon \int_0^{\bar{T}_m(d_1)} f(a_{m-1}(\sigma) \cos \psi_{m-1}(\sigma), - a_{m-1}(\sigma) \sin \psi_{m-1}(\sigma), \varepsilon) \frac{\cos \psi_{m-1}(\sigma)}{a_{m-1}(\sigma)} \, d\sigma . \tag{3,11}$$

Rovnice (3,11) zřejmě definuje v implicitním tvaru $\bar{T}_m(d_1)$ jako spojitou funkci počáteční hodnoty $d_1 \in \langle a_1, a_0 \rangle$. Buďte $\xi_1, \xi_2 \in \langle a_1, a_0 \rangle$. Z (3,11) dostaneme

$$\begin{aligned}
\bar{T}_m(\xi_1) - \bar{T}_m(\xi_2) = {} & \int_0^{\bar{T}_m(\xi_1)} \varepsilon f[a_{m-1}(\sigma, \xi_1) \cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1), \\
& - a_{m-1}(\sigma, \xi_1) \sin \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1), \varepsilon] \frac{\cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1)}{a_{m-1}(\sigma, \xi_1)} \, d\sigma - \\
& - \int_0^{\bar{T}_m(\xi_2)} \varepsilon f[a_{m-1}(\sigma, \xi_1) \cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_2), \\
& - a_{m-1}(\sigma, \xi_2) \sin \psi_{m-1}(\sigma, \xi_2), \varepsilon] \frac{\cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_2)}{a_{m-1}(\sigma, \xi_2)} \, d\sigma = \\
= \varepsilon \int_{\bar{T}_m(\xi_2)}^{\bar{T}_m(\xi_1)} & f(\xi_1, \cdot) \frac{\cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1)}{a_{m-1}(\sigma, \xi_1)} \, d\sigma + \varepsilon \int_0^{\bar{T}_m(\xi_2)} [f(\xi_1, \cdot) \cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1) a_{m-1}(\sigma, \xi_2) - \\
& - f(\xi_2, \cdot) \cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_2) a_{m-1}(\sigma, \xi_1)][a_{m-1}(\sigma, \xi_1) a_{m-1}(\sigma, \xi_2)]^{-1} \, d\sigma = \\
= \varepsilon \int_{\bar{T}_m(\xi_2)}^{\bar{T}_m(\xi_1)} & f(\xi_1, \cdot) \frac{\cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1)}{a_{m-1}(\sigma, \xi_1)} \, d\sigma + \varepsilon \int_0^{\bar{T}_m(\xi_2)} [a_{m-1}(\sigma, \xi_1) a_{m-1}(\sigma, \xi_2)]^{-1} \, . \\
& . \{[f(\xi_1, \cdot) - f(\xi_2, \cdot)] a_{m-1}(\sigma, \xi_2) \cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1) + f(\xi_2, \cdot) a_{m-1}(\sigma, \xi_2) \, . \\
& . [\cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1) - \cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_2)] + f(\xi_2, \cdot) \cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_2) \, . \\
& . [a_{m-1}(\sigma, \xi_2) - a_{m-1}(\sigma, \xi_1)]\} \, d\sigma ,
\end{aligned} \tag{3,12}$$

kde pro zkrácení píšeme $f(\xi_i, \cdot) = f[a_{m-1}(\sigma, \xi_1) \cos \psi_{m-1}(\sigma, \xi_i), - a_{m-1}(\sigma, \xi_i)$. . $\sin \psi_{m-1}(\sigma, \xi_1), \varepsilon]$ a druhým argumentem aproximací a_{m-1}, ψ_{m-1} vyjadřujeme závislost na počáteční podmínce. Z (3,12) dostaneme

$$|\bar{T}_m(\xi_1) - \bar{T}_m(\xi_2)| \leqq \frac{\varepsilon K}{\alpha} |\bar{T}_m(\xi_1) - \bar{T}_m(\xi_2)| +$$
$$+ \varepsilon \bar{T}_m(\xi_2) \frac{1}{\alpha^2} \{\beta L[|a_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) \cos \psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) -$$
$$- a_{m-1}(\sigma_1, \xi_2) \cos \psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_2)| + |a_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) \sin \psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) -$$
$$- a_{m-1}(\sigma_1, \xi_2) \sin \psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_2)|] + K\beta |\psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) - \psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_2)| +$$
$$+ K|a_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) - a_{m-1}(\sigma_1, \xi_2)|\} \leqq \frac{\varepsilon K}{\alpha} |\bar{T}_m(\xi_1) - \bar{T}_m(\xi_2)| +$$
$$+ \varepsilon \bar{T}_m(\xi_2) \frac{1}{\alpha^2} \{(2L\beta + K)|a_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) - a_{m-1}(\sigma_1, \xi_2)| +$$
$$+ 2(L\beta^2 + K\beta)|\psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) - \psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_2)|\},$$

kde $\sigma_1 \in \langle 0, T_m(\xi_2) \rangle$.

Odtud

$$(3,13) \quad |\bar{T}_m(\xi_1) - \bar{T}_m(\xi_2)| \leqq \frac{\varepsilon \bar{T}_m(\xi_2)}{\left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)\alpha^2} [|a_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) - a_{m-1}(\sigma_1, \xi_2)| (2\beta L + K) +$$
$$+ |\psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_1) - \psi_{m-1}(\sigma_1, \xi_2)|(2\beta^2 L + K\beta)].$$

Obdobně jako tvrzení za vztahy (3,4) dokážeme, že platí $\bar{T}_m(\xi_2) \leqq \dfrac{2\pi}{1 - \dfrac{\varepsilon K}{\alpha}}$.

Odtud, z lemmatu 3,1 a z (3,13) dostaneme

(3,14)

$$|\bar{T}_m(\xi_1) - \bar{T}_m(\xi_2)| \leqq \varepsilon \frac{2\pi}{\left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)\alpha^2} \left\{(2\beta L + K) \frac{1}{2} \left[1 + \exp\left(2\varepsilon_2 K_4 \frac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \exp\left(2\varepsilon_2 K_4 \frac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}}\right)\right\} |\xi_1 - \xi_2| \leqq \varepsilon |\xi_1 - \xi_2| \frac{2\pi}{(\alpha - \varepsilon_2 K)\alpha} .$$
$$. \left\{\exp\left(\frac{4\pi\varepsilon_2 K_4 \alpha}{\alpha - \varepsilon^2 K}\right)\right\} \left[\beta L + \frac{1}{2}(K + 1)\right] + \beta L + \left.\frac{K}{2}\right\} = \varepsilon |\xi_1 - \xi_2| K_2 .$$

Věta 3,2 je dokázána.

Poznámka 3,2. Odhad (3,14) je zbytečně nepřesný, protože jsme chtěli ukázat, že existuje konstanta K_2, nezávislá na m a ε. Pro dané m lze obdobně odvodit odhad přesnější. Tak např. pro $m = 1$ vyjde

$$|\bar{T}_1(\xi_1) - \bar{T}_1(\xi_2)| \leqq \varepsilon|\xi_1 - \xi_2|\frac{2\pi(K + \alpha L)}{(\alpha - \varepsilon K)} .$$

Jde-li nám pouze o odhad polohy periodické trajektorie a nikoliv o odhad periody, můžeme konstruovat postupné aproximace nikoliv pro soustavu (3,2), nýbrž pro rovnici

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\psi} = -\varepsilon\frac{f(a\cos\psi, -a\sin\psi, \varepsilon)\sin\psi}{1 - \dfrac{\varepsilon}{a}f(a\cos\psi, -a\sin\psi, \varepsilon)\cos\psi} . \tag{3,15}$$

Tento postup se v mnoha případech může ukázat kratším a efektivnějším než předchozí a proto uvedeme odhady chyb postupných aproximací pro rovnici (3,15).

Zachovejme předpoklady o f, ε uvedené na počátku tohoto odstavce. Uvažujme funkci

$$g(a, \psi, \varepsilon) = \frac{f(a\cos\psi, -a\sin\psi, \varepsilon)\sin\psi}{1 - \dfrac{\varepsilon}{a}f(a\cos\psi, -a\sin\psi, \varepsilon)\cos\psi} .$$

Snadno zjistíme, že pro a, a_1, $a_2 \in (\alpha, \beta)$, $\psi \geqq 0$, $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_2$ platí

$$|g(a, \psi, \varepsilon)| \leqq K\left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1} = K_1,$$

$$|g(a_1, \psi, \varepsilon) - g(a_2, \psi, \varepsilon)| \leqq \left(L + \frac{\varepsilon K^2}{2\alpha^2}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^2 |a_1 - a_2| = L_1|a_1 - a_2| .$$

Aproximace prvního řádu budiž $a_1(\psi) = a_0 - \varepsilon\int_0^\psi g(a_0, \phi, \varepsilon)\,\mathrm{d}\phi$, kde a_0, ε splňuje vztah (3,4). Je-li $a_n(\psi)$ aproximace řádu n, definujme aproximaci řádu $n + 1$: $a_{n+1}(\psi) = a_0 - \varepsilon\int_0^\psi g(a_n(\sigma), \sigma, \varepsilon)\,\mathrm{d}\sigma$. Z (3,4) plyne, že $a_i(\psi) \in (\alpha, \beta)$ pro $i = 1, 2, \ldots$, $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$.

Věta 3,3. *Budiž $a(\psi)$ řešení rovnice (3,15), splňující počáteční podmínku $a(0) = a_0$, a nechť platí $0 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_2$.*

Potom pro každé přirozené m a $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ platí

$$|a(\psi) - a_m(\psi)| \leqq \varepsilon^{m+1}K_1L_1^m\frac{\psi^{m+1}}{(m + 1)!} . \tag{3,16}$$

Důkaz plyne ze známého vzorce pro Picardovy aproximace.

Poznámka 3,3. Může se stát, že výpočet integrálu $\displaystyle\int_0^\psi f\left(1 - \frac{\varepsilon}{a_0}f\right)^{-1}\mathrm{d}\sigma$ nám činí potíže, zatím co $\int_0^\psi f\,\mathrm{d}\sigma$ se řeší jednoduše. Jedná-li se v takovém případě jen o výpočet první aproximace, můžeme buď použít aproximací typu (3,3), nebo, nejde-li o odhad periody, použijeme tohoto tvrzení: Je-li

(3,17) $$\bar{a}_1(\psi) = a_0 - \varepsilon \int_0^\psi f(a_0 \cos \sigma, - a_0 \sin \sigma, \varepsilon) \sin \sigma \, d\sigma ,$$

potom platí pro $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$ a a_0 splňující podmínku (3,4)

$$|a_1(\psi) - \bar{a}_1(\psi)| \leqq \varepsilon^2 \frac{K^2 \psi}{2a_0 \left(1 - \dfrac{\varepsilon K}{a_0}\right)} .$$

Důkaz ihned plyne z toho, že

$$a_1(\psi) - \bar{a}_1(\psi) = \varepsilon \int_0^\psi \{f(a_0 \cos \sigma, - a_0 \sin \sigma, \varepsilon) \sin \sigma -$$

$$- f(a_0 \cos \sigma, - a_0 \sin \sigma, \varepsilon) \sin \sigma \left[1 - \frac{\varepsilon}{a_0} f(a_0 \cos \sigma, - a_0 \sin \sigma, \varepsilon) \cos \sigma)\right]^{-1}\Bigg\} d\sigma =$$

$$= - \varepsilon \int_0^\psi \frac{\varepsilon}{a_0} f^2 \cos \sigma \sin \sigma \left[1 - \frac{\varepsilon}{a_0} f \cos \sigma\right]^{-1} d\sigma .$$

Z toho dostaneme, že nahrazením funkce $a_1(\psi)$ funkcí $a_1(\psi)$ zvětšíme pravou stranu nerovnosti (3,16) o veličinu řádu ε^2, tedy platí pro $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$

(3,18) $$|a(\psi) - \bar{a}_1(\psi)| \leqq \frac{1}{2} K_1 L_1 \varepsilon^2 \psi^2 + \varepsilon^2 K^2 \psi \left[2a_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{a_0} K\right)\right]^{-1} .$$

Poznámka 3,4. Na základě odhadu (3,16) lze formulovat větu analogickou větě 3,1, kde místo nerovností (3,5) bude

(3,19) $$[a_i - a_{n_i}(2\pi)] (-1)^i > \varepsilon^{n_i + 1} \frac{K_1 L_1^{n_i}}{(n_i + 1)!} (2\pi)^{n_i + 1}$$

pro $i = 0, 1$.

V nejjednodušším případě, kdy položíme $n_0 = n_1 = 1$ a kdy ve smyslu poznámky 3,3 pracujeme se zjednodušenou aproximací (3,17), má podmínka pro existenci periodické trajektorie tvar

(3,20) $$[a_i - a_{1i}(2\pi)](-1)^i > \varepsilon^2 \left(2K_1 L_1 \pi^2 + K^2 \pi \left(a_i \left(1 - \frac{\varepsilon K}{a_i}\right)\right)^{-1}\right)$$

pro $i = 0, 1$.

Poznámka 3,5. Hledání počátečních hodnot a_0, a_1 bude usnadněno, najdeme-li přibližně polohu periodické trajektorie z podmínky $\bar{a}_1(0) = \bar{a}_1(2\pi)$, tj.

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon f[\bar{a}_1(0) \cos \psi, - \bar{a}_1(0) \sin \psi, \varepsilon] \sin \psi \, d\psi = 0 .$$

Poznámka 3,6. Všimněme si toho, že uvedenou metodou lze určovat polohu periodické trajektorie, aniž předpokládáme existenci derivací funkce f, čemuž se nevyhneme u jiných metod malého parametru. Tato skutečnost souvisí s tím, že jsme vyšli z vět topologického charakteru.

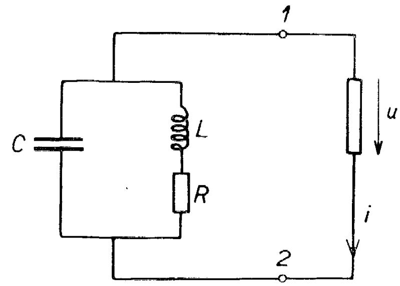
Příklad 3,1. Vyšetřujme elektrický obvod na obr. 3 [2]. Na svorky 1,2 obvodu s konstantními soustředěnými parametry R, L, C je připojen dvojpól, pro nějž závislost proudu i na napětí u je dána funkcí $i = G(u)$, která má tyto vlastnosti:

a) G má derivace druhého řádu na celé přímce.

b) Existují čísla $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ tak, že platí

$$\frac{dG}{du} + \frac{RC}{L} < 0 \quad \text{pro} \quad u \in (-x_1, x_2)$$

$$\frac{dG}{du} + \frac{RC}{L} \geqq 0 \quad \text{pro} \quad u \notin (-x_1, x_2)\,.$$



Obr. 3.

c) $u^2 + RuG(u) > 0$ pro $|u| > 0$.

d) $\int_0^{\pm\infty} [u + RG(u)]\, du = \int_0^{\pm\infty} \left[L \frac{dG}{du} + RC\right] du = \infty\,.$

e) Označíme-li $\int_0^u (\bar{u} + RG(u))\, d\bar{u} = \Xi(u)$, platí $\Xi(-x_1) = \Xi(x_2)$.

Snadno zjistíme, že pro vyšetřovaný obvod platí rovnice

$$(3,21) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + u + RG(u) + \frac{du}{dt}\left[L\frac{dG}{du} + RC\right](LC)^{-\frac{1}{2}} = 0\,.$$

Podle [3] rovnice (3,21) má v rovině u, $\frac{du}{dt}$ jedinou netriviální periodickou trajektorii přičemž tato je positivně stabilní.

Použijeme nyní metody vyložené v tomto odstavci k odhadu polohy periodické trajektorie pro případ, že funkce $G(u) = au + bu^3$; a, b jsou konstanty tak malé, že rovnice (3,21) je typu (3,1).

Zvolme

$$C = 10^3\, pF,\; L = 10^{-4}\, H,\; R = 2{,}1\, \Omega,$$

$$a = -2{,}2 \,.\, 10^{-5}\, \frac{A}{V}, \quad b = 1{,}8 \,.\, 10^{-7}\, \frac{A}{V^3}\,.$$

Rovnice (3,21) má po dosazení tvar

$$(3,22) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} + u = -\frac{du}{dt}(1{,}71 \,.\, 10^{-4}\, u^2 - 3{,}16 \,.\, 10^{-4}) + \\ + 4{,}63 \,.\, 10^{-5}\, u - 3{,}78 \,.\, 10^{-7}\, u^3\,.$$

Ve smyslu poznámky 3,5 položíme ve vzorci (3,17) $\bar{a}_1(2\pi) = a_0$, tj.

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon f(a_0 \cos \sigma, -a_0 \sin \sigma, \varepsilon) \sin \sigma\, d\sigma = 0\,,$$

čímž dostaneme rovnici pro přibližnou počáteční hodnotu a_0 periodického řešení. Dosazením pravé strany (3,22) za εf a řešením obdržíme $a_0 = 2{,}72$. Oblast D nesmíme volit příliš velkou, aby konstanty K, L, $\frac{1}{\alpha}$ nevyšly zbytečně velké, ale také ne příliš malou, aby pro daný řád aproximace byly ještě při vhodné volbě počátečních podmínek splněny nerovnosti (3,19). Zvolme tedy $\alpha = 2{,}5$, $\beta = 3$. Budeme postupovat podle poznámky 3,4, kde položíme $n_0 = n_1 = 1$. Položíme-li $\varepsilon = 10^{-3}$, vyjde $K_1 = 2{,}1$, $L_1 = 1{,}6$. Protože pravá strana rovnice (3,22) jako funkce dvou proměnných u a $\frac{du}{dt}$ je symetrická vzhledem k počátku (a tedy i vektorové pole je symetrické), stačí dokázat toto: Polotrajektorie rovnice (3,22) vycházející z bodu $(a_0, 0)((a_1, 0))$ v rovině $\left(u, \frac{du}{dt}\right)$, protne po prvé osu u v bodě $(c_0, 0)((c_1, 0))$, $0 > c_0 > -a_0$ $(0 > -a_1 > c_1)$. Vzhledem k tomu nerovnost (3,20) se změní na

$$(3{,}23)\quad [a_i - \bar{a}_{1i}(\pi)](-1)^i > 10^{-6}\left[1{,}68\pi^2 + 4{,}4\pi\left(2a_i\left(1 - \frac{2{,}1 \cdot 10^{-3}}{a_i}\right)\right)^{-1}\right].$$

pro $i = 0, 1$.

Snadno zjistíme, že nerovnosti (3,23) vyhovují např. čísla $a_0 = 2{,}75$, $a_1 = 2{,}70$. Podle poznámky 3,4 existuje tedy positivně stabilní limitní cyklus rovnice (3,22), který protíná osu u v intervalu $(2{,}70, 2{,}75)$. Tohoto výsledku je možno v případě potřeby použít jako výchozího bodu pro přesnější odhad polohy limitního cyklu pomocí vyšších aproximací.

Literatura

[1] *Ю. А. Митропольский:* Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Киев 1955.

[2] *S. Vojtášek:* Kathodově vázaný oscilátor jako kvasilineární soustava. Apl. mat., sv. 1 (1956), č. 2.

[3] *N. Levinson, O. K. Smith:* A General Equation For Relaxation Oscillations. Duke Math. Journal, 9, 1942, str. 382.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ В ТЕОРИИ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

ЗДЕНЕК ВОРЕЛ (Zdeněk Vorel)

Рассматривается скалярное уравнение (1). Функция $f(x, y, t, \varepsilon)$ определена для $(x, y) \in D$, где $D = E(x, y; \alpha < \sqrt{(x^2 + y^2)} < \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, и обладает следующими свойствами:

1. f непрерывна в x, y, t, ε и $|f(x, y, t, \varepsilon)| \leqq K$ для $(x, y) \in D$, $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq \leqq \varepsilon \leqq 1$.

2. Существует постоянная L такая, что справедливо неравенство

$$|f(x_2, y_2, t, \varepsilon) - f(x_1, y_1, t, \varepsilon)| \leqq L(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)$$

для $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$.

С помощью полярных координат уравнение (1) преобразуется к уравнениям (2).

Уравнения (2) можно решить методом последовательных приближений, которые определены следующим образом:

Если $a(t), \psi(t)$ — решение уравнений (2), удовлетворяющее начальным условиям $a(0) = a_0, \psi(0) = \psi_0$ и определенное на $\langle 0, T\rangle$, и если $a_k(t), \psi_k(t)$ — приближение порядка k, то приближение порядка $k + 1$ определено соотношениями (3). Здесь мы полагаем $a_0(t) = a_0$, $\psi_0(t) = \psi_0 + t$.

Обозначим $B = (\alpha + 1)\, 2L + 2K$. Пусть $T_p \leqq T$ — время одного поворота решения $x(t)$ уравнения (1) вокруг начала координат в плоскости $(x, \dot{x})$, т. е. пусть $(\psi T_p) = \psi_0 + 2\pi$. Пусть аналогично $T_k \leqq T$, $\psi_k(T_k) = \psi_0 + 2\pi$.

Теорема 1. Если m — *натуральное число и*

$$\varepsilon \leq \min\left(\frac{\beta - a_0}{KT}, \frac{a_0 - \alpha}{KT}, \frac{\alpha}{K}, 1\right)$$

то имеют место соотношения (4) *и* (5) *для* $0 \leqq t \leqq T$.

На примере математического маятника показано, что оценку (5) нельзя существенно улучшить.

В дальнейшем изучается автономный случай уравнения (1). Формулы (4) и (5) применены для доказательства существования положительно устойчивой периодической траектории уравнения (1) и для оценки ее положения и периода.

Теорема 2. *Пусть* $a_{ni}(t), \psi_{ni}(t)$, $i = 0, 1$ — *приближение решения уравнения* (1) *порядка n, которое удовлетворяет следующим условиям:*

1. $a_{ni}(0) = a_i$, $0 < a_1 < a_0$, $\psi_{ni}(0) = 0$;

2. *Если* $T_{ni} \in \left\langle 2\pi\left(1 + \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1}, 2\pi\left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1}\right\rangle$, $\psi_{ni}(T_{ni}) = 2\pi$,

то имеет место (6).

Обозначим символом C_0 *(или* C_1*) замкнутую кривую, состоящую из*

а) *замкнутой дуги полутраектории, ограниченной точками* a_0, c_0 (a_1, c_1) *на оси* x *(фиг. 2), где* $c_0(c_1)$ — *следующая точка пересечения полутраектории выходящей из точки* $a_0(a_1)$ *с трансверсалью* l, *ограниченной точками* α, β;

б) *открытой дуги, ограниченной точками* c_0, $a_0(c_1, a_1)$.

Тогда существует по меньшей мере одна положительно устойчивая периодическая траектория уравнения (1), *которая пересекает отрезок* $\overline{c_1 c_0}$

в одной и только в одной точке. Эта траектория содержится в области D^*, ограниченной кривыми C_0 и C_1. Если $a_m(t)$, $\psi_m(t)$ — приближение с начальным условием $a_m(0) = \dfrac{a_0 + a_1}{2}$, $\psi_0 = 0$, и если T_m — число, удовлетворяющее соотношению $\psi_m(T_m) = 2\pi$, и T_p — период траектории, содержащейся внутри D^*, то существуют постоянные K_1 и K_2 (не зависящие от a_0, a_1, ε, m) такие, что имеет место (7).

В заключение изложенные результаты применены к решению численного примера.

Summary

SOME ESTIMATES IN THE THEORY OF A QUASILINEAR SYSTEM WITH ONE DEGREE OF FREEDOM

ZDENĚK VOREL

Let us consider the scalar equation

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, t, \varepsilon\right). \tag{1}$$

The real-valued function $f(x, y, t, \varepsilon)$ is defined for $(x, y) \in D$, where D

$$D = E(x, y; \alpha < \sqrt{(x^2 + y^2)} < \beta), \ 0 < \alpha < \beta, \ 0 \leqq t \leqq T, \ 0 \leqq \varepsilon \leqq 1,$$

and has the following properties:

(i) f is continuous in x, y, t, ε and $|f(x, y, t, \varepsilon)| \leqq K$ for $(x, y) \in D$, $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$.

(ii) There exists a constant L such that $|f(x_2, y_2, t, \varepsilon) - f(x_1, y_1, t, \varepsilon)| \leqq \leqq L(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|)$ for (y_1, y_1), $(x_2, y_2) \in D$, $0 \leqq t \leqq T$, $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$.

By means of polar coordinates a, ψ the equation (1) can be transformed into

$$\dot{a} = -\varepsilon f(a \cos \psi, -a \sin \psi, t, \varepsilon) \sin \psi, \tag{2}$$

$$\dot{\psi} = 1 - \frac{\varepsilon}{a} f(a \cos \psi, -a \sin \psi, t, \varepsilon) \cos \psi.$$

The equations (2) can be solved by the method of successive approximations which are defined as follows:
If $a(t)$, $\psi(t)$ is a solution of (2) satisfying the initial conditions $a(0) = a_0$, $\psi(0) = \psi_0$ and defined on $\langle 0, T \rangle$ and if $a_k(t)$, $\psi_k(t)$ is the k^{th} approximation, then

$$a_{k+1}(t) = a_0 - \varepsilon \int_0^t f[a_k(\sigma) \cos \psi_k(\sigma), -a_k(\sigma) \sin \psi_k(\sigma), \sigma, \varepsilon] . \sin \psi_k(\sigma) \, d\sigma, \tag{3}$$

$$\psi_{k+1}(t) = \psi_0 + t - \varepsilon \int_0^t f[a_k(\sigma) \cos \psi_k(\sigma), - a_k(\sigma) \sin \psi_k(\sigma), \sigma, \varepsilon] \frac{\cos \psi_k(\sigma)}{a_k(\sigma)} \, d\sigma .$$

We put

$$a_0(t) = a_0 , \quad \psi_0(t) = \psi_0 + t .$$

Let us denote $B = (\alpha + 1) 2L + 2K$. Let $T_p \leq T$ be the period of one revolution of the solution $x(t)$ of (1) around the origin in the $(x, \dot{x})$ – plane, i. e. let $\psi(T_p) = \psi_0 + 2\pi$. Similarly let $T_k \leqq T$, $\psi_k(T_k) = \psi_0 + 2\pi$.

Theorem 1. *If m is a positive integer and* $\varepsilon \leqq \min\left(\frac{\beta - a_0}{KT}, \frac{a_0 - \alpha}{KT}, \frac{\alpha}{K}, 1\right)$, *then*

$$|a_m(t) - a(t)| \leqq KB^m \frac{\varepsilon^{m+1}}{\alpha^m} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}, \tag{4}$$

$$|\psi_m(t) - \psi(t)| \leqq KB^m \frac{\varepsilon^{m+1}}{\alpha^{m+1}} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}$$

for $0 \leqq t \leqq T$ *and*

$$|T_p - T_m| \leqq \varepsilon^{m+1} \frac{KB^m}{\left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right) \alpha^m (m+1)!} \left(\frac{2\pi}{1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}}\right)^{m+1} . \tag{5}$$

Referring to the case of the mathematical pendulum it is shown that the estimate (5) cannot be essentially improved.

In the remaining part of this paper, the autonomous case of equation (1) is studied (*i. e. f* does not depend on t). Formulae (4) and (5) are used to prove the existence of a positively stable periodic orbit of (1) and to estimate its position and period.

Theorem 2. *Let $a_{ni}(t)$, $\psi_{ni}(t)$, $i = 0, 1$, be n^{th} approximations of* (1), *which satisfy the following conditions:*

(i) $a_{ni}(0) = a_i$, $0 < a_1 < a_0$, $\psi_{ni}(0) = 0$;

(ii) *If* $T_{n_i} \in \left\langle 2\pi \left(1 + \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1}, 2\pi \left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{-1} \right\rangle$, $\psi_{n_i}(T_{n_i}) = 2\pi$, *then*

$$[a_i - a_{n_i}(T_{ni})](-1)^i > \tag{6}$$

$$> \varepsilon^{n+1} \left[\frac{KB^n}{\alpha^n (n+1)!} T_{n_i}^{n+1} + \varepsilon \frac{K^2 B^n (2\pi)^{n+1}}{\alpha^n (n+1)! \left(1 - \frac{\varepsilon K}{\alpha}\right)^{n+2}} \right] .$$

Let us denote by C_0 (C_1) a closed curve consisting of (a) *a closed arc of the semiorbit bounded by two points a_0, c_0, (a_1, c_1) on the x-axis (fig. 2) where c_0 (c_1) is the next following intersection of the semiorbit starting from a_0 (a_1) with the transversal l bounded by the points α, β or the x-axis,* (b) *an open arc bounded by the points c_0, a_0 (c_1, a_1).*

Then there exists at least one positively stable periodic orbit of (1) *which intersects the segment* $\overline{c_1 c_0}$ *in one and only one point. This orbit is contained in the domain* D^* *bounded by the curves* C_0 *and* C_1. *Moreover, if* $a_m(t)$, $\psi_m(t)$ *is the approximation satisfying the initial conditions* $a_m(0) = \dfrac{a_0 + a_1}{2}$, $\psi_0 = 0$, *if* T_m *is the number for which* $\psi_m(T_m) = 2\pi$ *and if* T_p *is the period of the periodic orbit contained in* D^*, *then there exist constants* K_1, K_2 *(independent of* a_0, a_1, ε, m*) such that*

$$|T_p - T_m| \leqq K_1 \varepsilon^{m+1} + K_2 \varepsilon (a_0 - a_1) . \tag{7}$$

Finally, these results are illustrated by a numerical example.