Ivo Babuška

Линейная теория внутреннего трения. II

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 5, 371–380

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102723

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška)

(Поступило в редакцию 21/XI 1959 г.)

А. ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Часть II.

Работа является продолжением первой части и занимается линейными операторами внутреннего трения, представимыми в комплексной форме.

КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

1. В работе [1] мы дали общее определение оператора внутреннего трения и изучали его свойства. В настоящей части будем заниматься специальным классом таких операторов. Все символы, с которыми в работе встретимся, имеют то же значение, как в работе [1].

Пусть задано $l > 0$. Во всей работе будем символом $K_l = E\left[z,\ |z| < \frac{l}{2\pi}\right]$ обозначать открытый круг в комплексной плоскости с радиусом $\frac{l}{2\pi}$. Границу круга K_l будем обозначать через $\dot{K}_l$. Следовательно, $\dot{K}_l = E\left[z,\ |z| = \frac{l}{2\pi}\right]$.

Определение 1. *Пусть $f \in C_l$.*[1]) *Тогда голоморфную функцию $\chi_f(z)$, определенную на K_l соотношением*

$$\chi_f(z) = \frac{1}{l}\int_0^l f(t)\,\frac{\left(\frac{l}{2\pi}\right)e^{i\frac{2\pi}{l}t} + z}{\left(\frac{l}{2\pi}\right)e^{i\frac{2\pi}{l}t} - z}\,\mathrm{d}t\,, \tag{1}$$

будем называть голоморфным распространением l-периодической функции f на K_l.

[1]) C_l есть пространство всех l-периодических непрерывных функций; см. [1], опр. 1.

Выражение (1) представляет собой известную формулу Пуассона[2]) в комплексной форме. Поэтому функция $u_f = \operatorname{Re}\chi_f(z)$ есть гармоническая функция, которую можно непрерывно распространить на $\dot{K}_l$, и

$$u\left(\frac{l}{2\pi}\, e^{i\frac{2\pi}{l}t}\right) = f(t)\,.$$

Функция $v_f = \operatorname{Im}\chi_f(z)$ является сопряженной к функции u_f и $v_f(0) = 0$. Если

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{l}\,nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi}{l}\,nt\,, \tag{2}$$

то

$$\chi_f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\left(\frac{2\pi}{l}\,z\right)^n. \tag{3}$$

Очевидно, что между функциями $f \in C_l$ и голоморфными функциями $\varphi(z)$ на K_l, действительную часть $\operatorname{Re}\varphi(z)$ которых можем непрерывно распространить на $\dot{K}_l$, причем еще $\operatorname{Im}\varphi(0) = 0$, имеется одно-однозначное соответствие. Теперь докажем еще одно соотношение, которое имеет место между функцией f и ее голоморфным распространением и которое нам в будущем понадобится.

Теорема 1. *Пусть $f \in C_l$ и $f'' \in C_l$. Тогда*

$$\chi_{f''} = -\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\chi_f'' z^2 + \chi_f' z)\,.$$

Доказательство. Пусть

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{l}\,nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi}{l}\,nt\,.$$

Тогда

$$\chi_{f''} = -\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n - ib_n)\left(\frac{2\pi}{l}\,z\right)^n.$$

Однако,

$$\chi_f = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\left(\frac{2\pi}{l}\,z\right)^n$$

и поэтому

$$(\chi_f'' z^2 + \chi_f' z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n - ib_n)\left(\frac{2\pi}{l}\,z\right)^n.$$

Теорема доказана.

[2]) Смотри, например, [2], стр. 444.

В работе [1] мы ввели оператор внутреннего трения (ср. опр. 2 в [1]). В дальнейшем мы будем изучать только определенный класс таких операторов, которые назовем голоморфно осуществимыми операторами.

Определение 2. *Оператор внутреннего трения* $(\mathbf{D}, \varphi)$[3]) *назовем голоморфно осуществимым оператором, если*

1. $\varphi = \frac{1}{l}\varphi_0$ (см. опр. 3 в [1]),

2. *существует голоморфная функция* ψ *на* K_l *такая, что*

$$-\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\chi''_{\mathbf{D}f} z^2 + \chi'_{\mathbf{D}f} z) = \psi(z)\chi_{\mathbf{V}^0 f}(z) . \tag{4}$$

Функцию $\psi(z)$ *назовем голоморфной реализацией оператора* $(\mathbf{D}, \varphi)$.

Теперь покажем, что существует голоморфно осуществимый оператор внутреннего трения.

Теорема 2. *Оператор внутреннего трения, выражающий гипотезу Сорокина (см.* [1]*) является голоморфно осуществимым оператором внутреннего трения. Реализацией этого оператора является функция* $\psi(z) = (1 + i\beta)$.[4])

Доказательство. Пусть $f(t) \in C_l$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{l} nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi}{l} nt .$$

Тогда оператор внутреннего трения $(\mathbf{D}, \varphi)$, выражающий гипотезу Сорокина, имеет вид

$$Df = V^{-2}f + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 Bf \,,^{5)}$$

где

$$Bf = \beta\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a_n \sin \frac{2\pi}{l} nt - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} b_n \cos \frac{2\pi}{l} nt\right)$$

и

$$\varphi(f) = \frac{1}{l}\varphi_0(f) .$$

---

[3]) Об операторе $\mathbf{D}$ предполагаем, что $\int_0^l (\mathbf{D}f)\,\mathrm{d}t = 0$ для каждого $f \in C_l$. Значение символа $\mathbf{V}^0 f$ см. в [1], стр. 183, опр. 3.

[4]) α означает здесь то же самое, что в [1], стр. 180 в случае гипотезы Сорокина обозначено через ψ.

[5]) Значение символа $\mathbf{V}^{-2}f$ см. в [1], стр. 183, опр. 3.

Следовательно,

$$\chi_{\mathbf{D}f} = -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \left(\frac{2\pi}{l} z\right)^n \frac{1}{n^2}$$

$$-\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \beta \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + ia_n) \frac{1}{n^2} \left(\frac{2\pi}{l} z\right)^n$$

и затем

$$\chi_{\mathbf{V}^{\circ}f} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \left(\frac{2\pi}{l} z\right)^n .$$

Поэтому

$$-\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\chi''_{\mathbf{D}f} z^2 + \chi'_{\mathbf{D}f} z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \left(\frac{2\pi}{l} z\right)^n +$$

$$+ \beta \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + ia_n) \left(\frac{2\pi}{l} z\right)^n =$$

$$= (1 + i\beta) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \left(\frac{2\pi}{l} z\right)^n = (1 + i\beta)\, \chi_{\mathbf{V}^{\circ}f} .$$

Итак, мы показали, что действительно существуют голоморфно осуществимые операторы внутреннего трения.

Теперь покажем, что в основном каждый голоморфно осуществимый оператор внутреннего трения должен содержать оператор Сорокина в следующем случае: если $\psi(z)$ есть реализация оператора, то $\operatorname{Im} \psi(0) > 0$. Справедлива, то есть, следующая теорема.

Теорема 3. *Необходимым условием для того, чтобы голоморфная функция $\psi(z)$ на K_l была голоморфной реализацией оператора внутреннего трения, является выполнением неравенства* $\operatorname{Im} \psi(0) > 0$.

Доказательство. Функция $\psi(z)$ является по предположению голоморфной на K_l. Следовательно, можно писать

$$\psi(z) = \alpha_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n .$$

Положим

$$f(t) = \frac{2\pi}{l} \cos \frac{2\pi}{l} t .$$

Так как $\psi(z)$ является голоморфной реализацией оператора $(\mathbf{D}, \varphi)$, то $\mathbf{D}f \in C_l$ и $\varphi_0 (\mathbf{D}f) = 0$.

Поэтому

$$\mathbf{D}f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{l} nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi}{l} nt .$$

Следовательно,

$$-\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\chi''_{\mathbf{D}f} z^2 + \chi' z) = -\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \left(\frac{2\pi}{l} z\right)^n n^2$$

и

$$-\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\chi''_{\mathbf{D}f} z^2 + \chi'_{\mathbf{D}f} z) = \psi(z)\, \chi_{\mathbf{V}^\circ f}(z)\,.$$

Однако,

$$\chi_{\mathbf{V}^\circ f} = \frac{2\pi}{l} z\,.$$

Поэтому

$$-\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) \left(\frac{2\pi}{l} z\right)^n n^2 = \frac{2\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n-1} z^n$$

и поэтому

$$-(a_n - ib_n) \left(\frac{2\pi}{l}\right)^{n+1} n^2 = \alpha_{n-1}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

По ввиду того, что $\mathbf{D}f$ есть оператор внутреннего трения, будет

$$\int_0^l (f_h)' \, (\mathbf{D}f)'_h \, \mathrm{d}f > 0$$

(сп. опр. 2 [1]).

Однако,

$$\int_0^l (f_h)'(\mathbf{D}f)''_h \, \mathrm{d}t = b_1 \frac{l}{2} \left(\frac{2\pi}{l}\right)^3 C_h^2(1) > 0\,.^{6)}$$

Следовательно, $b_1 > 0$, но $b_1 = \operatorname{Im} \alpha_0 \left(\frac{l}{2\pi}\right)$. Итак, $\operatorname{Im} \alpha_0 > 0$, ч. т. д.

Выражаясь физически, при гипотезе Сорокина коэффициент внутреннего трения не зависит от частоты, а зависит только от амплитуды. Значит, каждый голоморфно осуществимый оператор содержит компоненту внутреннего трения, не зависящую от частоты.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ОДНОЙ СТЕПЕЛЬЮ СВОБОДЫ

2. В данном отделе произведен анализ дифференциального уравнения колебаний с одной степенью свободы при наличии внутреннего трения, определенного голоморфно осуществимым оператором.

---

6) Ср. стр. 186 [1].

Определением 4 в [1] была сформулирована задача о вынужденных колебаниях при помощи уравнения

$$(5) \qquad my''(t) + k((\mathbf{D}y(t))'' + \varphi(y(t))) = f''(t) + C\,.$$

Так как для каждого голоморфно осуществимого оператора $(\mathbf{D}, \varphi)$, $D\,1 = 0$,[7] можем вместо уравнения (5) изучать уравнение

$$(6) \qquad my''(t) + k(\mathbf{D}y(t))'' = f''(t)$$

и предполагать, что $\mathbf{V}^0 y = y$. Действительно, можем писать $y = y_1 + \dfrac{C}{k}$, причем y_1 удовлетворяет уравнению

$$(5') \qquad my_1'' + k((\mathbf{D}y_1)'' + \varphi(y_1)) = f''\,.$$

Согласно [1], решение — и только одно решение — существует. Проинтегрировав уравнение (5') в интервале $(0, l)$ заключаем, что $\varphi(y_1) = 0$. Поэтому достаточно ограничиться изучением уравнения (6). Согласно [1], уравнение (6) имеет место в том смысле, что для всех достаточно малых

$$(7) \qquad my_h''(t) + k((\mathbf{D}y)_h)'' = (f_h)''\,.$$

Так как между функциями $f \in C_l$ и их голоморфным распространением имеется одно-однозначное соответствие и так как существует только одно решение уравнения (7), будет также

$$m\chi_{y''h} + k\chi_{(\mathbf{D}y)''h} = \chi_{f_h''}$$

и поэтому, с учетом теоремы 1, получим

$$-m\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\chi_{y_h}''z^2 + \chi_{y_h}'z) - k\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\chi_{(\mathbf{D}f)_h}''z^2 + \chi_{(\mathbf{D}f)_h}'z) = \chi_{f_h''}\,.$$

Но используя предположение о голоморфной реализации оператора, получим

$$-m\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 (\chi_{y_h}''z^2 + \chi_{y_h}'z) + k\psi(z)\,\chi_{y_h}(z) = \chi_{f_h''}\,;$$

итак, мы приходим к заключению, что функция χ_{y_h} удовлетворяет на K_l дифференциальному уравнению

$$\chi_{y_h}''z^2 + \chi_{y_h}'z - \frac{k}{m}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \psi(z)\,\chi_{y_h} = -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{m}\,\chi_{f_h''}\,.$$

Очевидно, что на K_l будет $\lim\limits_{h\to 0} \chi_{y_h} = \chi_y$. Таким образом мы пришли к заключению, которое выскажем в теореме.

Теорема 4. *Пусть $(\mathbf{D}, \varphi)$ — голоморфно осуществимый оператор внутреннего трения. Пусть $\psi(z)$ — его реализация. Пусть, далее, $f(t) \in C_l$; пусть*

[7]) $\mathbf{D}1 = \mathbf{D}y_0$, $\quad y_0(t) = 1$.

$y(t) \in C_l$ — решение задачи о вынужденных колебаниях в смысле определения 4 из работы [1] и, наконец, $C = 0$. Тогда голоморфное распространение χ_y функции $y(t)$ удовлетворяет на K_l дифференциальному уравнению (в смысле аналитической теории дифференциальных уравнений)

$$(8)\qquad \chi_y'' z^2 + \chi_y' - \frac{k}{m}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \psi(z)\,\chi_y = -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{m}\,\chi_{f'}\,.$$

Теперь докажем, что существует самое больше одно решение уравнения (8), голоморфное на всем K_l. Справедлива, то есть, следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $f \in C_l$; тогда существует самое больше одно решение (голоморфное на K_l) уравнения* (8).

Доказательство. Если существуют два решения, то их разность, обозначим ее через χ_0, удовлетворяет, очевидно, уравнению

$$(9)\qquad \chi_0'' z^2 + \chi_0' z - \frac{k}{m}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \psi(z)\,\chi_0 = 0\,.$$

Уравнение (9) является линейным дифференциальным уравнением в комплексной области. Опираясь на результаты аналитической теории дифференциальных уравнений, можем решение представить в виде

$$\chi_0 = z^r(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)\,,$$ [8]

где показатель r является решением уравнения

$$r(r-1) + r - \frac{k}{m}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \psi(0) = 0\,,$$

и ряд сходится в некоторой окрестности точки $z = 0$.

Следовательно,

$$r = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}\left(\frac{l}{2\pi}\right)\sqrt{\psi(0)}\,.$$

Но по теореме 3 $\operatorname{Im}\psi(0) \neq 0$ значит, $\operatorname{Im} r \neq 0$. Но в таком случае χ_0 может быть голоморфной в точке $z = 0$ только тогда, если $\chi_0 = 0$. Утверждение доказано.

РЕЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ ГОЛОМОРФНО ОСУЩЕСТВИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

3. Результаты, полученные в предыдущих отделах, позволяют нам решить задачу вынужденных колебаний для голоморфно осуществимых операторов. Итак, будем решать задачу вынужденных колебаний в смысле определения 4 из [1] при условии, что оператор внутреннего трения $(\mathbf{D}, \varphi)$ является

[7]) Ср. [3], стр. 214—221.

голоморфно осуществимым оператором. В смысле определения 4 из [1] дело касается решения уравнения

$$my''(t) + k((\mathbf{D}y(t))'' + \varphi(y(t)) = f''(t) + C\,.$$

Ввиду нашего предположения $\varphi = \frac{1}{l}\varphi_0$ (см. опр. 3 из [1]). Положим $y(t) = y_1(t) + \frac{C}{k}$. Тогда функция $y_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$my_1(t) + k((\mathbf{D}y_1(t))'' = f''(t)\,, \tag{10}$$

и решение уравнения (10) существует только одно. Значит, по теореме 4 голоморфное распространение удовлетворяет уравнению

$$\chi''_{y_1}z^2 + \chi'_{y_1}z - \frac{k}{m}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \psi(z)\,\chi_{y_1} = -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{m}\,\chi_{f''}\,.$$

Согласно теореме 5 существует одно единственное решение χ уравнения

$$\chi''z^2 + \chi'z - \frac{k}{m}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \psi(z)\,\chi = -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \frac{1}{m}\,\chi_{f''} \tag{11}$$

и поэтому $\chi = \chi_{y_1}$. Следовательно, будет

$$y_1(t) = \operatorname{Re}\chi\left(\frac{l}{2\pi}\,e^{i\frac{2\pi}{l}t}\right),$$

причем $\operatorname{Re}\chi$ можно непрерывно распространить на границу круга K_l.

Приведем пример. Рассмотрим оператор Сорокина внутреннего трения, реализацией которого является функция $\psi(z) = (1 + i\beta)$ (ср. теорему 2), и положим $l = 2\pi$, $k = 1$, $m = 1$. Уравнение (11) будет иметь вид

$$\chi''z^2 + \chi'z - (1 + i\beta)\,\chi = -\chi_{f''}\,. \tag{12}$$

Уравнение (12) — это уравнение Эйлера. Решение однородного уравнения имеет вид

$$C_1 z^{\alpha_1} + C_2 z^{\alpha_2}\,,$$

где α_1, α_2 — корни уравнения

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - (1 + i\beta) = 0\,.$$

Поэтому

$$\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{1 + i\beta} = \pm\,\alpha\,.$$

Функцию f выберем теперь так, чтобы она выражала единичный импульс. Положим

$$\chi_{f''} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{z-1} + 1\right) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{z}{z-1}\,.$$

Методом вариации постоянных получаем решение

$$\chi = \frac{1}{2\pi} [C_1(z) z^\alpha + C_2(z) z^{-\alpha}] ,$$

где

$$C_1' = \frac{1}{2\alpha} \frac{z^2}{z - 1} z^{-\alpha} , \quad C_2 = - \frac{1}{2\alpha} \frac{z^2}{z - 1} z^\alpha$$

и, следовательно, из условия голоморфности в точке $z = 0$ получим решение

$$\chi(e^{it}) = e^{it} \frac{e^{\alpha it}}{4\pi\alpha} \int_0^1 \frac{e^{2it} e^{-\alpha ti} \xi^{2-\alpha}}{e^{it} \xi - 1} d\xi -$$

$$- \frac{1}{4\pi\alpha} e^{it} e^{-\alpha it} \int_0^1 \frac{e^{2it} e^{\alpha ti} \xi^{2+\alpha}}{e^{it} \xi - 1} d\xi = e^{3it} \frac{1}{4\pi\alpha} \int_0^1 \frac{\xi^{2+\alpha} - \xi^{2-\alpha}}{e^{it} \xi - 1} d\xi$$

и, следовательно,

$$y_1(t) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{3it}}{4\pi\alpha} \int_0^1 \frac{\xi^{2+\alpha} - \xi^{2-\alpha}}{e^{it}\xi - 1} d\xi \right] .$$

Литература

[1] *Иво Бабушка:* Линейная теория внутреннего трения. Apl. mat. 4 (1959), 177—202.
[2] *А. И. Маркушевич:* Теорема аналитических функций, 1950.
[3] *В. В. Голубев:* Лекции по аналитической теории дифференциальных Чравнений, 1950.

Souhrn

LINEÁRNÍ TEORIE VNITŘNÍHO TŘENÍ

IVO BABUŠKA

A. TEORIE PERIODICKÝCH KMITŮ SOUSTAV S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

Část II.

Práce je pokračováním [1]; navazuje na tuto práci a rozšiřuje zde dosažené výsledky. Je zaveden pojem holomorfně realisovatelného operátoru vnitřního tření a ukazuje se, že tyto operátory se užívají v praxi.

V [1] jsou studovány lineární operátory vnitřního tření a problémy vynucených kmitů soustav s jedním stupněm volnosti při vnitřním tření. V této práci studuje se podrobně problém vynucených kmitů, je-li operátor vnitřního tření holomorfně realisovatelným operátorem. Je ukázáno, že tento problém vede na otázky souvisící s analytickou teorií diferenciálních rovnic v komplexní rovině.

Zusammenfassung

LINEARE THEORIE DER INNEREN REIBUNG

IVO BABUŠKA

A. DIE THEORIE PERIODISCH SCHWINGENDER SYSTEME MIT EINEM FREIHEITSGRAD

II. Teil

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit [1] und knüpft direkt an diese an.

Es wird der Begriff „holomorpher realisierbarer Operator der inneren Reibung" eingeführt und gezeigt, dass diese Operatoren in der Praxis geäufig sind.

In der Arbeit [1] wurden allgemeine lineare Operatoren der inneren Reibung studiert und das Problem der erzwungenen Schwingungen der inneren Reibung, welche durch diesen Operator ausgedrückt wird, gelöst.

In der vorliegenden Arbeit werden die grundlegenden Eigenschaften der realisierbaren holomorphen Operatoren bewiesen. Es wird weiter gezeigt, dass das Problem der erzwungenen Schwingungen mit Hilfe der analytischen Theorie der Differentialgleichungen in der komplexen Ebene innerhalb des Einheitskreises gelöst werden kann.