

Aplikace matematiky

Andrzej Szaniawski

Certain relations existant entre les dérivées partielles des deux côtés de l'onde de choc

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 5, 341–351

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102721>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

CERTAINES RELATIONS EXISTANT ENTRE LES DÉRIVÉES PARTIELLES DES DEUX CÔTÉS DE L'ONDE DE CHOC

ANDRZEJ SZANIAWSKI

(Reçu le 6 novembre 1959.)

On trouve les équations pour les valeurs limites des dérivées partielles des paramètres du gaz des deux côtés de l'onde de choc, qui permettent de déterminer l'approximation linéaire du mouvement au voisinage de l'onde.

1. INTRODUCTION

Le passage de l'onde de choc provoque une discontinuité de la vitesse du gaz et de ses paramètres thermodynamiques. Considérons le passage de l'onde dans le gaz en mouvement unidimensionnel non-stationnaire (fig. 1). La vitesse u , la pression p et la densité ρ du gaz sont fonctions de la position x et du temps t . Si

$$(1,1) \quad x = \varphi(t)$$

est l'équation de la propagation de l'onde de choc, les fonctions $u(x, t)$, $p(x, t)$, $\rho(x, t)$ ont une discontinuité sur la courbe $x = \varphi(t)$: Nous donnerons les relations existant entre les valeurs limites de ces fonctions et de leurs dérivées partielles de deux côtés de la courbe $x = \varphi(t)$.

Considérons le moment t_0 où la position de l'onde de choc est déterminée par la coordonnée x_0 . Pour une fonction quelconque $f(x, t)$ nous désignerons par l'indice - (ou +) la valeur limite à gauche (à droite) de l'onde de choc

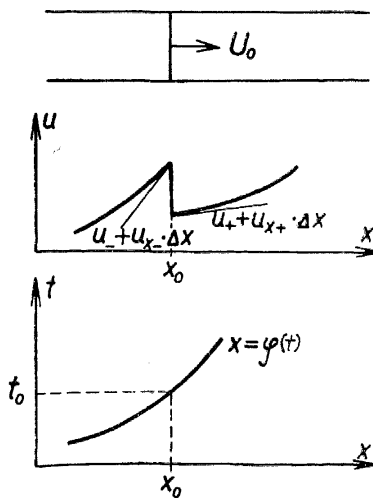


Fig. 1.

$$(1,2) \quad f_- = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < \varphi(t_0)}} f(x, t_0), \quad f_+ = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > \varphi(t_0)}} f(x, t_0), \\ f_{x-} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < \varphi(t_0)}} \frac{\partial f(x, t_0)}{\partial x}, \quad f_{x+} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > \varphi(t_0)}} \frac{\partial f(x, t_0)}{\partial x}.$$

Les équations d'Hugoniot-Rankine donnent trois relations entre sept valeurs $p_-, \rho_-, u_-, p_+, \rho_+, u_+, U_0 = U(t_0)$ où nous avons désigné par

$$(1,3) \quad U(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

la vitesse de propagation de l'onde de choc. Maintenant, nous trouverons encore trois relations qui existent entre les dérivées

$$p_{x-}, \rho_{x-}, u_{x-}, p_{x+}, \rho_{x+}, u_{x+}, U_0' = \frac{d^2 \varphi(t_0)}{dt^2}.$$

Ces nouvelles relations permettent de trouver, au voisinage de x_0, t_0 , l'approximation linéaire des fonctions $p(x, t), \rho(x, t), u(x, t)$ d'un côté de l'onde si nous connaissons cette approximation de l'autre côté et si les deux dérivées $U_0 = \frac{d\varphi(t_0)}{dt}, U_0' = \frac{d^2 \varphi(t_0)}{dt^2}$ sont connues. Nous trouverons aussi des équations approchées de la trajectoire et des lignes caractéristiques.

En vertu des suppositions qu'on va admettre, les résultats obtenus sont valables aussi pour les ondes de choc avec les réactions chimiques, ou les ondes de détonation.

2. SUPPOSITIONS

Nous allons considérer le gaz parfait (qui vérifie l'équation de Clapeyron), idéal (chaleur spécifique $c_v = \text{const.}$) et non-visqueux, qui ne conduit pas la chaleur, mais les molécules duquel peuvent avoir des deux côtés de l'onde:

- a) différentes masses m_- et m_+ ,
- b) différents nombres de degrés de liberté, donc différents rapports des chaleurs spécifiques $\gamma_- = \frac{c_{p-}}{c_{v-}}$ et $\gamma_+ = \frac{c_{p+}}{c_{v+}}$,
- c) différentes énergies chimiques.

Les trois dernières suppositions signifient, que le passage de l'onde peut provoquer des réactions chimiques endothermiques ou exothermiques (détonations), qui changent la structure des molécules.

Pour le gaz parfait et idéal l'enthalpie h est fonction linéaire de la température

$$(2,1) \quad h = c_p T + C = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + C,$$

mais la valeur de la constante C dépend de l'énergie chimique des molécules (fig. 2). Nous désignerons la différence de ces constantes par

$$(2,2) \quad q = C_- - C_+.$$

Pour le moment t_0 les équations d'Hugoniot-Rankine se laissent écrire maintenant sous la forme suivante:

$$(2,3) \quad \begin{aligned} \rho_-(u_- - U_0) &= \rho_+(u_+ - U_0), \\ p_- + \rho_-(u_- - U_0)^2 &= p_+ + \rho_+(u_+ - U_0)^2, \\ C_- + \frac{\gamma_-}{\gamma_- - 1} \frac{p_-}{\rho_-} + \frac{(u_- - U_0)^2}{2} &= C_+ + \frac{\gamma_+}{\gamma_+ - 1} \frac{p_+}{\rho_+} + \frac{(u_+ - U_0)^2}{2}. \end{aligned}$$

Des deux côtés de l'onde de choc nous avons les équations connues du mouvement adiabatique du gaz parfait

$$(2,4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

où nous avons désigné par s l'entropie spécifique.

Au lieu de prendre l'équation d'état en forme de Clapeyron

$$(2,5) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{R}{m} T$$

(R -constante universelle), nous emploierons une équation équivalente

$$(2,6) \quad \frac{s - s_0}{c_v} = \ln \left[\frac{p}{p_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\gamma} \right],$$

où p_0 , ρ_0 , s_0 sont constantes.

En éliminant l'entropie s de (2,6), nous pouvons présenter les équations du mouvement (2,4) sous la forme

$$(2,7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \ln \frac{\rho}{\rho_0}}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \frac{\rho}{\rho_0}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\gamma} \frac{\partial \ln \frac{p}{p_0}}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \ln \frac{p}{p_0}}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \frac{p}{p_0}}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

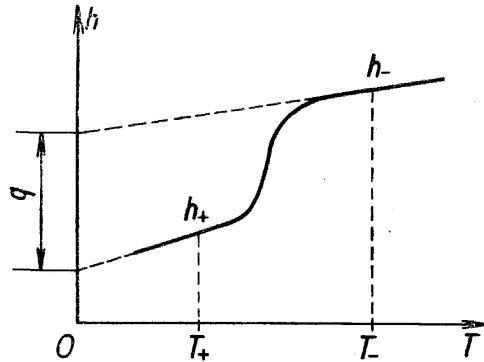


Fig. 2.

où

$$(2,8) \quad a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\varrho}}$$

est la vitesse du son. Pour les constantes p_0, ϱ_0 , nous choisirons de différentes valeurs des deux côtés de l'onde de choc. En remplaçant l'indice o alternativement par $-$ ou $+$, nous aurons deux groupes d'équations (2,7), valables pour l'un et l'autre côté de la courbe $x = \varphi(t)$.

Pour trouver les relations cherchées, nous servirons des équations d'Hugoniot (2,3) sur la courbe $x = \varphi(t)$ et des équations de mouvement (2,7) dans son voisinage.

3. CALCULS ET RÉSULTATS

Introduisons dans les équations (2,7) de nouvelles fonctions (sans dimensions) π, λ, μ déterminées par les formules

$$(3,1) \quad \pi = \frac{p - p_-}{p_-}, \quad \lambda = \frac{\varrho - \varrho_-}{\varrho_-}, \quad \mu = \frac{u - U(t)}{U(t)} \text{ pour } x < \varphi(t)$$

et

$$\pi = \frac{p - p_+}{p_+}, \quad \lambda = \frac{\varrho - \varrho_+}{\varrho_+}, \quad \mu = \frac{u - U(t)}{U(t)} \text{ pour } x > \varphi(t).$$

Pour le moment $t = t_0$ nous obtenons les relations suivantes existant entre les valeurs limites des dérivées partielles du côté gauche de l'onde de choc $x < \varphi(t)$

$$(3,2) \quad \begin{aligned} - \frac{\pi_{t-}}{U_0} &= (1 + \mu_-) \pi_{x-} + \gamma_- \mu_{x-}, \\ - \frac{\lambda_{t-}}{U_0} &= (1 + \mu_-) \lambda_{x-} + \mu_{x-}, \\ - \frac{\mu_{t-}}{U_0} &= (1 + \mu_-) \mu_{x-} + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{a}{U_0} \right)^2 \pi_{x-} + (1 + \mu_-) \frac{U'_0}{U_0^2} \end{aligned}$$

et, en remplaçant par $+$ l'indice $-$, les relations analogues pour les dérivées du côté droit $x > \varphi(t)$.

Si les fonctions-limites des fonctions π, λ, μ de chaque côté de la courbe $x = \varphi(t)$ sont analytiques, nous pouvons les développer en série de puissances de $\Delta t = t - t_0$. Nous avons par exemple

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \varphi(t)-0} \pi(x, t) &= \pi_- + \left[\pi_{x-} \frac{d\varphi(t_0)}{dt} + \pi_{t-} \right] \Delta t + \dots = \\ &= - (\mu_- \pi_{x-} + \gamma_- \mu_{x-}) U_0 \Delta t + \dots \end{aligned}$$

Dans la dernière transformation, nous avons utilisé la première des relations

(3,2). Ainsi, nous obtenons pour les valeurs limites à gauche sur la courbe $x = \varphi(t)$ les développements

$$(3,3) \quad \begin{aligned} \pi &= -(\mu_- \pi_{x_-} + \gamma_- \mu_{x_-}) U_0 \Delta t + \dots, \\ \lambda &= -(\mu_- \lambda_{x_-} + \mu_{x_-}) U_0 \Delta t + \dots, \\ \mu &= \mu_- - \left[\mu_- \mu_{x_-} + \frac{1}{\gamma_-} \left(\frac{a_-}{U_0} \right)^2 \pi_{x_-} + (1 + \mu_-) \frac{U'_0}{U_0^2} \right] U_0 \Delta t + \dots \end{aligned}$$

En remplaçant ici les indices $-$ par $+$, nous obtenons les développements analogues pour les valeurs limites à droite sur la courbe $x = \varphi(t)$.

Les relations d'Hugoniot-Rankine (2,3) étant valables pour chaque point de la courbe $x = \varphi(t)$, nous pouvons y introduire les développements (3,3). Pour $\Delta t \rightarrow 0$ nous recevons ainsi les relations

$$(3,4) \quad \begin{aligned} \mu_- \lambda_{x_-} + 2\mu_{x_-} + \frac{\mu_-}{\gamma_- M_-^2} \pi_{x_-} + \frac{\mu_- U'_0}{M_-^2 a_-^2} &= \mu_+ \lambda_{x_+} + 2\mu_{x_+} + \frac{\mu_+}{\gamma_+ M_+^2} \pi_{x_+} + \frac{\mu_+ U'_0}{M_+^2 a_+^2}, \\ a_-^2 \left[M_-^2 \lambda_{x_-} + (1 + 3M_-^2) \frac{\mu_{x_-}}{\mu_-} + \frac{3}{\gamma_-} \pi_{x_-} \right] &= \\ &= a_+^2 \left[M_+^2 \lambda_{x_+} + (1 + 3M_+^2) \frac{\mu_{x_+}}{\mu_+} + \frac{3}{\gamma_+} \pi_{x_+} \right], \\ a_-^2 \mu_- \left[-\frac{\lambda_{x_-}}{\gamma_- - 1} + (1 + M_-^2) \frac{\mu_{x_-}}{\mu_-} + \frac{2\gamma_- - 1}{\gamma_- (\gamma_- - 1)} \pi_{x_-} + \frac{U'_0}{a_-^2} \right] &= \\ &= a_+^2 \mu_+ \left[-\frac{\lambda_{x_+}}{\gamma_+ - 1} + (1 + M_+^2) \frac{\mu_{x_+}}{\mu_+} + \frac{2\gamma_+ - 1}{\gamma_+ (\gamma_+ - 1)} \pi_{x_+} + \frac{U'_0}{a_+^2} \right], \end{aligned}$$

où

$$(3,5) \quad M_{\mp} = \frac{u_{\mp} - U_0}{a_{\mp}} = \mu_{\mp} \frac{U_0}{a_{\mp}}.$$

En éliminant les fonctions sans dimensions, nous pouvons présenter les mêmes relations sous une autre forme

$$(3,6) \quad \begin{aligned} \frac{p_{x_-}}{M_- a_- \varrho_-} + M_- a_- \frac{\varrho_{x_-}}{\varrho_-} + 2u_{x_-} + \frac{U'_0}{M_- a_-} &= \frac{p_{x_+}}{M_+ a_+ \varrho_+} + M_+ a_+ \frac{\varrho_{x_+}}{\varrho_+} + 2u_{x_+} + \frac{U'_0}{M_+ a_+}, \\ \gamma_- p_- M_-^2 \left[3 \frac{p_{x_-}}{M_- a_- \varrho_-} + M_- a_- \frac{\varrho_{x_-}}{\varrho_-} + \left(3 + \frac{1}{M_-^2} \right) u_{x_-} \right] &= \\ &= \gamma_+ p_+ M_+^2 \left[3 \frac{p_{x_+}}{M_+ a_+ \varrho_+} + M_+ a_+ \frac{\varrho_{x_+}}{\varrho_+} + \left(3 + \frac{1}{M_+^2} \right) u_{x_+} \right], \\ a_-^2 M_-^2 \left[\frac{2\gamma_- - 1}{\gamma_- - 1} \frac{p_{x_-}}{M_- a_- \varrho_-} - \frac{a_-}{M_- (\gamma_- - 1)} \frac{\varrho_{x_-}}{\varrho_-} + \left(1 + \frac{1}{M_-^2} \right) u_{x_-} + \frac{U'_0}{M_- a_-} \right] &= \\ &= a_+^2 M_+^2 \left[\frac{2\gamma_+ - 1}{\gamma_+ - 1} \frac{p_{x_+}}{M_+ a_+ \varrho_+} - \frac{a_+}{M_+ (\gamma_+ - 1)} \frac{\varrho_{x_+}}{\varrho_+} + \left(1 + \frac{1}{M_+^2} \right) u_{x_+} + \frac{U'_0}{M_+ a_+} \right] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad & p_{x-} + M^2 a^2 \varrho_{x-} + 2\varrho_-(u_- - U_0)u_{x-} + \varrho_- U'_0 = \\
 & = p_{x+} + M^2 a^2 \varrho_{x+} + 2\varrho_+(u_+ - U_0)u_{x+} + \varrho_+ U'_0, \\
 & \frac{3}{\varrho_-} p_{x-} + \frac{M^2 a^2}{\varrho_-} \varrho_{x-} + \left(3 + \frac{1}{M^2}\right) (u_- - U_0)u_{x-} = \\
 & = \frac{3}{\varrho_+} p_{x+} + \frac{M^2 a^2}{\varrho_+} \varrho_{x+} + \left(3 + \frac{1}{M^2}\right) (u_+ - U_0)u_{x+}, \\
 & \frac{2\gamma_- - 1}{(\gamma_- - 1)\varrho_-^2} p_{x-} - \frac{a^2}{(\gamma_- - 1)\varrho_-^2} \varrho_{x-} + \left(1 + \frac{1}{M^2}\right) \frac{u_- - U_0}{\varrho_-} u_{x-} + \frac{U'_0}{\varrho_-} = \\
 & = \frac{2\gamma_+ - 1}{(\gamma_+ - 1)\varrho_+^2} p_{x+} - \frac{a^2}{(\gamma_+ - 1)\varrho_+^2} \varrho_{x+} + \left(1 + \frac{1}{M^2}\right) \frac{u_+ - U_0}{\varrho_+} u_{x+} + \frac{U'_0}{\varrho_+}.
 \end{aligned}$$

Ainsi nous avons trouvé les trois relations cherchées existant entre les dérivées partielles des deux côtés de l'onde de choc.

Ayant les valeurs limites des fonctions et de leurs dérivées, nous pouvons trouver les équations approchées des trajectoires et des lignes caractéristiques au voisinage de x_0, t_0 .

Les équations différentielles de ces lignes peuvent être présentées sous forme de

$$(3.7) \quad \frac{dx}{dt} = u + \Theta a, \quad \text{où} \quad \Theta = \begin{cases} 0 & \dots \text{ pour trajectoire} \\ -1 \\ +1 \end{cases} \dots \text{ pour caractéristiques.}$$

Nous pouvons développer les fonctions $u(x, t)$ et $a(x, t)$ en séries de puissances $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta t = t - t_0$ et les introduire dans l'équation (3.7). Nous chercherons la résolution de l'équation ainsi transformée

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad \frac{dx}{dt} = & u_{\mp} + \Theta a_{\mp} + \left(U_0 \mu_{x\mp} + a_{\mp} \Theta \frac{\pi_{x\mp} - \lambda_{x\mp}}{2} \right) \Delta x - \left[U_0 u_{\mp} \mu_{x\mp} + \right. \\
 & \left. + \frac{a_{\mp}^2}{\gamma_{\mp}} \pi_{x\mp} + U_0 a_{\mp} \Theta \frac{(1 + \mu_{\mp})(\pi_{x\mp} - \lambda_{x\mp}) + (\gamma_{\mp} - 1) \mu_{x\mp}}{2} \right] \Delta t + \dots
 \end{aligned}$$

(les dérivées par rapport au temps sont éliminées au moyen de (3,2)) aussi sous forme d'un développement en série

$$\Delta x = \alpha + \alpha_1 \Delta t + \frac{1}{2} \alpha_2 \Delta t^2 + \dots,$$

dont les coefficients peuvent être aisément trouvés, et en résultat nous obtenons

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \Delta x = & (u_{\mp} + \Theta a_{\mp}) \Delta t + \frac{1}{2} \left(-a_{\mp}^2 \frac{\pi_{x\mp}}{\gamma_{\mp}} + \Theta \frac{3 - \gamma_{\mp}}{2} U_0 a_{\mp} \mu_{x\mp} + \right. \\
 & \left. + \Theta^2 a_{\mp}^2 \frac{\pi_{x\mp} - \lambda_{x\mp}}{2} \right) \Delta t^2 + \dots + \alpha \left[1 + \left(U_0 \mu_{x\mp} + \Theta a_{\mp} \frac{\pi_{x\mp} - \lambda_{x\mp}}{2} \right) \Delta t + \dots \right] =
 \end{aligned}$$

$$= (u_{\mp} + \Theta a_{\mp}) \Delta t + \frac{1}{2} \left[-\frac{p_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} + \Theta \frac{3 - \gamma_{\mp}}{2} a_{\mp} u_{x\mp} + \Theta^2 \frac{a_{\mp}^2}{2} \left(\frac{p_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} - \frac{\varrho_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} \right) \right] \Delta t^2 + \\ + \dots + \alpha \left\{ 1 + \left[u_{x\mp} + \frac{1}{2} \Theta a_{\mp} \left(\frac{p_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} - \frac{\varrho_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} \right) \right] \Delta t + \dots \right\},$$

où α est une constante de l'ordre de Δx .

Pour $\Theta = 0$ nous trouvons l'équation approchée des trajectoires

(3,10)

$$x = x_0 + \alpha [1 + u_{x\mp}(t - t_0) + \dots] + u_{\mp}(t - t_0) - \frac{1}{2} \frac{p_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} (t - t_0)^2 + \dots$$

et pour $\Theta = \pm 1$ les équations des lignes caractéristiques

(3,11)

$$x = x_0 + \alpha \left\{ 1 + \left[u_{x\mp} \pm \frac{a_{\mp}}{2} \left(\frac{p_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} - \frac{\varrho_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} \right) \right] \Delta t + \dots \right\} + (u_{\mp} \pm a_{\mp}) \Delta t + \\ + \frac{1}{2} \left(-\frac{2 - \gamma_{\mp}}{2} \frac{p_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} - \frac{a_{\mp}^2}{2} \frac{\varrho_{x\mp}}{\varrho_{\mp}} \pm \frac{3 - \gamma_{\mp}}{2} a_{\mp} u_{x\mp} \right) \Delta t^2 + \dots, \quad x < \varphi(t).$$

4. CAS PARTICULIER

Considérons maintenant le cas particulier de la propagation hypersonique de l'onde de choc (ou de détonation) dans le gaz en repos. Pour ce cas nous avons $u_{\pm} = u_{x\pm} = p_{x\pm} = \varrho_{x\pm} = 0$ et après les transformations des formules (2,3) nous recevons

$$(4,1) \quad \frac{\gamma_{-} + 1}{\gamma_{-} - 1} \left(\frac{1}{\gamma_{-} M_{-}^2} + 1 \right)^{-2} - 2 \frac{\gamma_{-}}{\gamma_{-} - 1} \left(\frac{1}{\gamma_{-} M_{-}^2} + 1 \right)^{-1} = \\ = \frac{\gamma_{+} + 1}{\gamma_{+} - 1} \left(\frac{1}{\gamma_{+} M_{+}^2} + 1 \right)^{-2} - 2 \frac{\gamma_{+}}{\gamma_{+} - 1} \left(\frac{1}{\gamma_{+} M_{+}^2} + 1 \right)^{-1} + A, \\ - \frac{1}{\mu_{-}} = \frac{\varrho_{-}}{\varrho_{+}} = \frac{1 + (\gamma_{-} M_{-}^2)^{-1}}{1 + (\gamma_{+} M_{+}^2)^{-1}}, \quad \mu_{+} = -1, \\ \frac{p_{-}}{p_{+}} = -\frac{\gamma_{+} M_{+}^2}{\gamma_{-} M_{-}^2} \mu_{-}, \quad \frac{T_{-}}{T_{+}} = \frac{\gamma_{+} m_{-} M_{+}^2}{\gamma_{-} m_{+} M_{-}^2} \mu_{-}^2, \quad \frac{a_{-}}{a_{+}} = -\frac{M_{+}}{M_{-}} \mu_{-},$$

où

$$(4,2) \quad A = \frac{2q}{M_{+}^2 a_{+}^2} = \frac{2q}{U_0^2}.$$

Les trois relations (3,4) peuvent être présentées maintenant en forme

$$(4,3) \quad \mu_{-} \lambda_{x-} + 2\mu_{x-} + \frac{\mu_{-}}{\gamma_{-} M_{-}^2} \pi_{x-} + \frac{\mu_{-} U_0'}{M_{-}^2 a_{-}^2} = \frac{\mu_{+} U_0'}{M_{+}^2 a_{+}^2}, \\ M_{-}^2 \lambda_{x-} + (1 + 3M_{-}^2) \frac{\mu_{x-}}{\mu_{-}} + \frac{3}{\gamma_{-}} \pi_{x-} = 0,$$

$$a^2 \mu_- \left[-\frac{\lambda_{x-}}{\gamma_- - 1} + (1 + M_-^2) \frac{\mu_{x-}}{\mu_-} + \frac{2\gamma_- - 1}{\gamma_-(\gamma_- - 1)} \pi_{x-} + \frac{U'_0}{a_-^2} \right] = \mu_+ U'_0$$

ou

$$(4.3) \quad \lambda_{x-} + 2 \frac{\mu_{x-}}{\mu_-} + \frac{1}{\gamma_- M_-^2} \pi_{x-} = -\frac{1 + \mu_-}{\mu_-^2} \frac{U'_0}{U_0^2},$$

$$M_-^2 \lambda_x + (1 + 3M_-^2) \frac{\mu_{x-}}{\mu_-} + \frac{3}{\gamma_-} \pi_{x-} = 0,$$

$$-\frac{\lambda_{x-}}{\gamma_- - 1} + (1 + M_-^2) \frac{\mu_{x-}}{\mu_-} + \frac{2\gamma_- - 1}{\gamma_-(\gamma_- - 1)} \pi_{x-} = \frac{1 + \mu_-}{\mu_-^3} M_-^2 \frac{U'_0}{U_0^2}.$$

A cause de l'écoulement hypersonique, nous avons

$$(4.4) \quad \frac{1}{\gamma_+ M_+^2} \ll 1$$

et en négligeant ce terme dans (4,1) nous obtenons

$$(4.5) \quad M_-^2 = \frac{1}{\gamma_-} \frac{\gamma_- - \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}}{1 + \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}},$$

$$\frac{\rho_-}{\rho_+} = \frac{\gamma_- + 1}{\gamma_- - \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}},$$

$$\frac{p_-}{p_+} = \frac{\gamma_+}{\gamma_- + 1} [1 + \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}] M_+^2,$$

$$\frac{T_-}{T_+} = \frac{m_- \gamma_+}{m_+ (\gamma_- + 1)^2} [\gamma_- - \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}] [1 + \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}] M_+^2,$$

$$\frac{a_-}{a_+} = \frac{\sqrt{\gamma_-}}{\gamma_- + 1} \sqrt{[\gamma_- - \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}] [1 + \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}]} |M_+|.$$

Pour les équations (4,3) les calculs donnent les solutions suivantes:

$$(4.6) \quad \mu_{x-} = \frac{u_{x-}}{U_0} = -\frac{3}{\gamma_- + 1} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A} + \frac{1}{3} (\gamma_-^2 - 1) A}{1 + (\gamma_-^2 - 1) A} \cdot \frac{U'_0}{U_0^2},$$

$$\pi_{x-} = \frac{p_{x-}}{p_-} = -\frac{(2\gamma_- - 1)[1 + \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}] - (\gamma_-^2 - 1) A}{[1 + (\gamma_-^2 - 1) A] [\gamma_- - \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}]} \cdot \frac{U'_0}{U_0^2},$$

$$\lambda_{x-} = \frac{\rho_{x-}}{\rho_-} =$$

$$= -3 \frac{\left[\gamma_- - \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A} + \frac{\gamma_-}{3} (\gamma_-^2 - 1) A \right] [1 + \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}]}{[1 + (\gamma_-^2 - 1) A] [\gamma_- - \sqrt{1 + (\gamma_-^2 - 1) A}]^2} \cdot \frac{U'_0}{U_0^2}.$$

En introduisant ces résultats dans (3,10) et (3,11), nous pouvons trouver sans difficulté les équations approchées des trajectoires et des lignes caractéristiques.

5. EXEMPLE

Considérons la propagation de l'onde de choc dans l'azote aux conditions suivantes¹): pression $p_+ = 0,1 \text{ mm Hg} = 133 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}$, température $T_+ = 300^\circ\text{K}$, nombre de Mach $|M_+| = 25$, $U'_0 = -238 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$. Si nous supposons la dissociation complète après le passage de l'onde, nous aurons $m_+ = 28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $m_- = 14 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, $\gamma_+ = \frac{7}{5}$, $\gamma_- = \frac{5}{3}$. L'énergie de dissociation est égale approximativement à q , nous prenons donc $q = 25 \cdot 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}$. La constante universelle des gaz $R = 8,31 \cdot 10^7 \frac{\text{erg}}{\text{grad. mol.}}$.

Avec ces données nous obtenons les résultats suivants: formules (2,5) et (2,8) $a_+ = 353 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $\varrho_+ = 0,15 \cdot 10^{-6} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $U_0 = |M_+| a_+ = 8825 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; formule (4,2) $A = 0,645$; formules (4,5) $M_-^2 = 0,050$, $-\frac{1}{\mu_-} = \frac{\varrho_-}{\varrho_+} = 13$, $\frac{p_-}{p_+} = 808$, $\frac{T_-}{T_+} = 31$, $\frac{a_-}{a_+} = 8,6$; $|M_-| = 0,23$, $u_- = 8100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, $p_- = 80,8 \text{ mm Hg}$, $T_- = 9\,300^\circ\text{K}$, $a_- = 3000 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Nous pouvons maintenant vérifier ([1], page 728), que pour $p_- = 81 \text{ mm Hg}$ et $T_- = 9\,300^\circ\text{K}$ le gaz est presque complètement dissocié, comme nous l'avons supposé. En appliquant encore les formules (4,6) nous obtenons les valeurs des dérivées

$$u_{x-} = 40\,000 \text{ sec}^{-1}, \quad \frac{p_{x-}}{p_-} = 0,3 \text{ cm}^{-1}, \quad \frac{\varrho_{x-}}{\varrho_-} = 2 \text{ cm}^{-1}.$$

L'équation approchée de l'onde de choc peut être présentée en forme suivante

$$(5,1) \quad \Delta x = 2,9(a_- \Delta t) - 0,13 \text{ cm}^{-1}(a_- \Delta t)^2 + \dots$$

Les équations des trajectoires d'après (3,10) sont

$$(5,2) \quad \Delta x = \alpha[1 + 0,13 \text{ cm}^{-1}(a_- \Delta t) + \dots] + 2,7(a_- \Delta t) - 0,09 \text{ cm}^{-1}(a_- \Delta t)^2 + \dots, \quad x < \varphi(t),$$

$$\Delta x = \alpha, \quad x > \varphi(t).$$

¹) Ces conditions correspondent à une des expériences faite avec l'air dans le tube de choc à décharge électrique par M. CLOUPEAU au Laboratoire Curie à Paris.

et les équations des lignes caractéristiques d'après (3,11) sont

$$(5,3) \quad \left. \begin{aligned} \Delta x &= \alpha [1 - 0,7 \text{ cm}^{-1}(a_- \Delta t) + \dots] + 3,7(a_- \Delta t) - \\ &\quad - 0,47 \text{ cm}^{-1}(a_- \Delta t)^2 + \dots \\ \Delta x &= \alpha [1 + 1,0 \text{ cm}^{-1}(a_- \Delta t) + \dots] + 1,7(a_- \Delta t) - \\ &\quad - 0,56 \text{ cm}^{-1}(a_- \Delta t)^2 + \dots \end{aligned} \right\} x < \varphi(t),$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \alpha + 0,12(a_- \Delta t) \\ \Delta x &= \alpha - 0,12(a_- \Delta t) \end{aligned} \right\} x > \varphi(t).$$

L'approximation obtenue de ces lignes et des fonctions $\frac{u}{u_-}$, $\frac{p}{p_-}$, $\frac{\rho}{\rho_-}$ est donnée

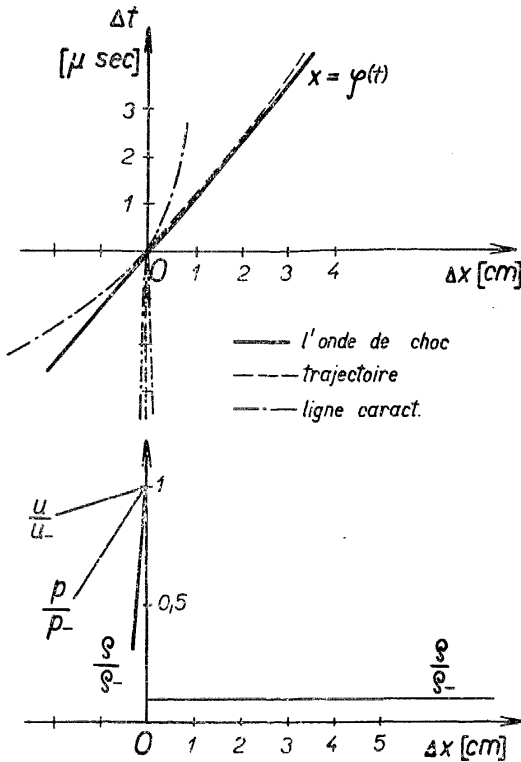


Fig. 3.

sur les diagrammes (fig. 3).

A cause du changement de la vitesse de propagation de l'onde de choc $|U' \neq 0|$, l'écoulement derrière l'onde devient non-homogène. Surtout le gradient de la densité devient considérable. Ce résultat est qualitativement en accord avec la théorie de SEDOFF pour les ondes de choc fortes sans dissociation [2]. ZELDOVITCH, RAIZER [3] et LOUNKINE [4] ont déjà calculé l'influence de la dissociation sur les valeurs des paramètres derrière l'onde de choc. Nos résultats montrent que la dissociation peut encore faire augmenter l'influence de l'atténuation de l'onde (U') sur l'inhomogénéité de l'écoulement derrière l'onde (ρ_{x-} , p_{x-} , u_{x-}).

Bibliographie

- [1] Н. А. Канцов: Электрические явления в газах и вакууме, Москва-Ленинград 1950.
- [2] Л. И. Седов: Методы подобия и размерности в механике, Москва 1954.
- [3] И. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер: Ударные волны большой амплитуды в газах, Усп. физ. наук, Т. LXIII, вып. 3.
- [4] Ю. И. Луныкин: Параметры газа за ударной волной, Журн. техн. физ., Т. XXIX, вып. 2.

Výtah

JISTÉ VZTAHY MEZI PARCIÁLNÍMI DERIVACEMI NA OBOU STRANÁCH RÁZOVÉ VLNY

ANDRZEJ SZANIAWSKI

Studuje se jednorozměrný pohyb plynu s rázovou vlnou, která působí nespojitost rychlosti a thermodynamických parametrů plynu. Jsou nalezeny rovnice pro lineární hodnoty parciálních derivací těchto funkcí po obou stranách rázové vlny. Tyto rovnice spolu s rovnicemi Hugoniot-Rankinovými dovolují nalézt pro daný okamžik lineární přiblížení pohybu po jedné straně vlny, je-li známa lineární aproximace po druhé straně vlny, rychlost a zrychlení šíření vlny.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПО ОБЕИМ СТОРОНАМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

АНДРЗЕЙ ШАНИЯВСКИ (Andrzej Szaniawski)

Если в движущемся вдоль оси x газе распространяется ударная или детонационная волна (с уравнением движения $x = \varphi(t)$), то скорость и термодинамические параметры в газе, как функции от x и t , терпят разрыв на линии $x = \varphi(t)$. Используя условия Ранкина-Гюгоньо (Rankine-Hugoniot) (2.3) и уравнения движения (2.4) и разлагая соответствующие функции в степенные ряды, можно найти условия (3.6) для соотношений между значениями частных производных по обеим сторонам ударной волны.

В частном случае распространения ударной волны в покоящемся газе эти соотношения дают возможность найти частные производные за ударной волной и затем определить линейные приближения искомых функций непосредственно за ударной волной, а также вторые приближения для траектории частиц и для характеристик.

В работе содержится численный пример.