Ludvík Prouza

К линейной теории автоматических подналадчиков

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 3, 196–201

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102705

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКИХ ПОДНАЛАДЧИКОВ

ЛЮДОВИК ПРОУЗА (Ludvík Prouza)

(Поступило в редакцию 22/VII 1959 г.)

Описывается синтез автоматических подналадчиков, оптимальных по Колмогорову-Винеру, и одной модификации их, важной для практических применений.

ВВЕДЕНИЕ

Автоматическим подналадчиком назовем устройство, автоматически изменяющее положение рабочего элемента (напр. режущего инструмента) по результату измерения одного или нескольких предыдущих изделий (деталей); см. напр. [1], Гл. II, Б.

Автоматические подналадчики применяют, если деталь нельзя измерять непосредственно при обработке. В автоматическом подналадчике существует всегда некоторое запаздывание. Процесс настройки можно рассматривать как регулирование с запаздыванием.

А. Шпачек высказал мнение, что линейная наладка, оптимальная по критерию минимальной среднеквадратичной ошибки, эквивалентна в некотором смысле оптимальной экстраполяции по Колмогорову-Винеру. Покажем, что это утверждение верно, и рассмотрим модификацию задачи, связанную с одной более ранней работой автора [3].

1. ЛИНЕЙНЫЙ АВТОМАТИЧЕСКИЙ ПОДНАЛАДЧИК, ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМАЛЬНОЙ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЙ ОШИБКИ

Рассмотрим блок- схему на рис. 1. Блок с передаточной функцией 1 описывает идеализированный станок, на котором в интервалах времени длиной 1 возникают детали с количественным признаком η (напр. размером). Блок с передаточной функцией z^{-m} (в дальнейшем для характеризации процессов и фильтров будет использован метод „z“-преобразования; см. [4], [5]) описывает запаздывание (m интервалов времени длины 1, $m \geqq 0$), необходимое для подачи детали к измерительному устройству и для измерения. Измеренный признак сравнивается с эталоном, величину которого без потери общности можно положить равной нулю. Эта операция описана дифференциалом вправо на рис. 1.

Результат сравнения доставляется с запаздыванием 1 на фильтр с передаточной функцией $F(z)$; сигнал с фильтра служит для изменения положения рабочего инструмента станка. Это изменение должно компенсировать случайные помехи (шум), которые на рис. 1 рассматриваются как стационарная случайная последовательность $\{\xi(l)\}$, $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Компенсацию рассмотрим символически как вычитание на дифференциале влево на рис. 1, имея в виду линейность целой схемы.

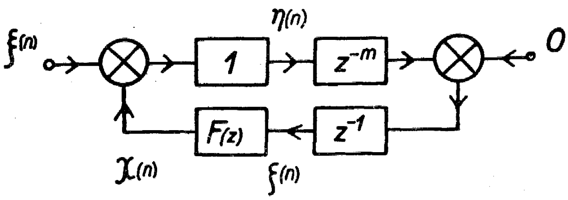

Рис. 1.

Из рис. 1 непосредственно видно, что для каждого натурального n

(1) $$\eta(n) = \xi(n) - \chi(n)\,,$$

(2) $$\zeta(n) = \eta(n - m - 1)\,,$$

(3) $$\chi(n) = f[\eta(n - m - 1),\quad \eta(n - m - 2), \ldots]$$

(где f — линейная комбинация над последовательностью в скобках).

Должно быть

(4) $$E[\eta^2(n)] = E[(\xi(n + m) - \chi(n + m))^2] = \min\,.$$

Здесь E означает математическое ожидание. Оба математических ожидания в (4) равны вследствие стационарности.

По (1) и (3) ясно, что для образования $\chi(n + m)$ из последовательности $\{\xi(l)\}$ можно использовать члены до $\xi(n - 1)$ включительно.

Отсюда ясна справедливость теоремы:

Теорема 1,1. *Если положить*

(5) $$\chi(n + m) = a_1\xi(n - 1) + a_2\xi(n - 2) + \ldots,$$

то условие (4) *совпадает с условием оптимальной линейной экстраполяции в смысле Колмогорова-Винера последовательности* $\{\xi(l)\}$ *на* $m + 1$ *шагов вперед.*

Методы определения „весовой" последовательности $\{a_l\}$ или передаточной функции („спектральной характеристики" в [2]) экстраполятора

(6) $$\Phi_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$$

полностью описаны в литературе (см. напр. [2], § 4).

Регулирование должно быть реализировано с помощью обратной связи. По рис. 1 и (4) видно, что должно быть (затем формально)

$$1 - z^{-m}\Phi_m(z) = \frac{1}{1 + z^{-m-1}F(z)}. \tag{7}$$

Ясно, что $a_1 \neq 0$, иначе экстраполяция не была бы на $m + 1$ шагов вперед.

Если экстраполятор устойчив (только этот случай имеет практический смысл), то ряд влево в (7) сходится вне круга с единичным радиусом, имеет смысл

$$1 + z^{-m-1}F(z) = \frac{1}{1 - z^{-m}\Phi_m(z)} \tag{8}$$

и, очевидно,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} \tag{9}$$

и $b_0 \neq 0$. Из (8) видно, что если $\Phi_m(z)$ рационально, $F(z)$ тоже рационально. Ясно также, что фильтр с передаточной функцией $F(z)$ может и не быть устойчив, только замкнутая схема должна быть устойчивой. Существенно, что $F(z)$ из $\Phi_m(z)$ по (8) определена однозначно и может быть легко вычислена.

2. МОДИФИКАЦИЯ ПОДНАЛАДЧИКА

Проблему предыдущего раздела можно на основе дополнительных условий различным способом модифицировать.

Пусть имеется частный случай $m = 0$, пусть $\{\xi(l)\}$ есть „белая" последовательность (см. [3], определение 2,2). В этом случае $\Phi_m(z) \equiv 0$ (см. [2], стр. 94) и по (8) $F(z) \equiv 0$, то есть наиболее выгодно нерегулировать. Это, конечно, верно только тогда, если не существуют другие возмущения.

Рассмотрим как модификацию, что с белым шумом складывается еще возмущение вида „единичного скачка" J (где J вещественно и отлично от 0).

Такое возмущение может быть вызвано, напр., малым изменением свойств обрабатываемого материала.

Пусть регулятор (подналадчик) кроме оптимальной регуляции белой последовательности устраняет влияние скачка J в течение N шагов ($N \geq 1$), независимо от того, при котором n скачок появится, т. е. если обозначить

$$\begin{aligned} \varphi(l) &= \xi(l) && \text{для} \quad l < n\,, \\ \varphi(l) &= \xi(l) + J && \text{для} \quad l \geq n \end{aligned} \tag{10}$$

(где n произвольно), должно быть

$$E[\eta_\varphi(l)] = E[\eta_\xi(l)] = 0 \quad \text{для} \quad l \geqq n + N \tag{11}$$

(где через $\{\eta_\xi(l)\}$, $\{\eta_\varphi(l)\}$ обозначены регулированные последовательности при входных возмущениях $\{\xi(l)\}$, $\{\varphi(l)\}$).

Нетрудно убедиться в том, что из (10), (11) следует

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = 1, \quad a_k = 0 \quad \text{для} \quad k > N\,. \tag{12}$$

Если теперь искать минимум (4) при дополнительном условии (12), легко доказывается следующая теорема:

Теорема 2,1. *Для того, чтобы выражение* (4) *было минимально при условии* (12) *и белом шуме на входе, необходимо и достаточно, чтобы*

$$a_k = \frac{1}{N} \quad \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{13}$$

Фильтр с весовой последовательностью

$$1, \underbrace{-\frac{1}{N}, -\frac{1}{N}, \ldots, -\frac{1}{N}}_{N \text{ членов}}, 0, 0, \ldots \tag{14}$$

(что соответствует формуле (7) влево) был рассмотрен, частично в связи с регулированием производственного процесса, в [3], раздел 3.

По теореме 3,6 в [3]

$$E[\eta^2(l)] = \left(1 + \frac{1}{N}\right) E[\xi^2(l)]\,. \tag{15}$$

Ясно, что N не должно быть слишком малым, если среднеквадратичная ошибка может регулированием лишь немного увеличиться (конечно, ошибка увеличивается максимально в два раза для $N = 1$ по (15)).

Рассмотрим еще структуру фильтра с передаточной функцией $F(z)$ для нашего подналадчика.

По (8) легко вычислить

$$F(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-N+1}}{N - z^{-1} - z^{-2} - \ldots - z^{-N}}\,. \tag{16}$$

Полюсы $F(z)$ совпадают с нулями знаменателя. Справедлива теорема:

Теорема 2,2. *Передаточная функция $F(z)$ имеет простой полюс $z = 1$, и все остальные ее полюсы лежат внутри единичного круга.*

Доказательство: Положим $u = z^{-1}$. Надо доказать, что уравнение

$$u^N + u^{N-1} + \ldots + u - N = 0 \tag{17}$$

имеет на единичной окружности простой корень $u = 1$ и внутри единичного круга не имеет корней. Для $u = e^{i\lambda}$ получим для вещественной части (17) уравнение

$$\cos N\lambda + \cos (N-1)\lambda + \ldots + \cos \lambda = N \,, \tag{18}$$

из которого непосредственно вытекает (λ берем в интервале $(-\pi, \pi>)$ $\lambda = 0$ как единственное решение. Притом мнимая часть уравнения (17) равна 0; следовательно, $u = 1$ есть единственный корень уравнения (17) на единичной окружности. Так как он не анулирует производной левой части (17), он простой.

Далее, для $|u| < 1$ очевидно

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{u^N + u^{N-1} + \ldots + u\} &\leqq |u^N + u^{N-1} + \ldots + u| \leqq \\ &\leqq |u|^N + |u|^{N-1} + \ldots + |u| < N \,, \end{aligned} \tag{19}$$

так что не существуют корни (17) внутри единичного круга.

Видно, что $F(z)$ обладает на границе устойчивости единственным простым полюсом $z = 1$.

Решение уравнения в конечных разностях, принадлежащего к (16), не представляет затруднений. Рекуррентные формулы для весовой последовательности фильтра с передаточной функцией $z^{-1}F(z)$ приведены в [3], формулы (3,8).

3. ЗАМЕЧАНИЕ К РЕАЛИЗАЦИИ РЕГУЛЯТОРА ИЗ РАЗДЕЛА 2

Реализация фильтра с передаточной функцией $F(z)$ из раздела 2 с помощью цифрового вычислительного устройства очень проста.

Схема, основанная на общем методе, описанном в [5], стр. 75—77, показана на рис. 2.

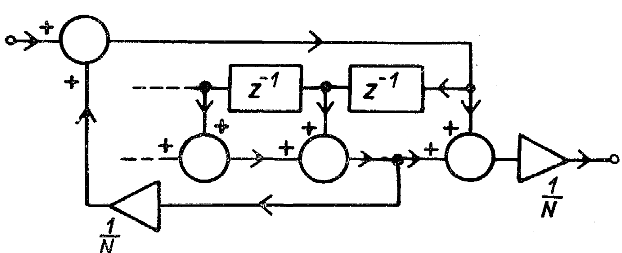

Рис. 2.

Ясно, что при выражении чисел в двоичной системе выгодно брать степени 2 как N. По (15) видно, что для практического регулирования достаточно взять $N = 4$ или $N = 8$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье показан способ вычисления и некоторые свойства оптимальных линейных автоматических подналадчиков. Линеаризированные подналадчики, описанные в [1], которые используют результат измерения одной детали, являются их частным случаем. Кратко описан способ технической реализации оптимального фильтра в обратной связи с помощью цифровой вычислительной схемы.

Литература

[1] *Кондашевский В. В.:* Автоматический контроль размеров деталей в процессе обработки. Оборонгиз, Москва 1951.

[2] *Яглом А. М.:* Введение в теорию стационарных случайных функций. Усп. мат. наук, том VII, вып. 5, 1952, стр. 3—168.

[3] *Prouza L.:* Některé vlastnosti dvou jednoduchých diskrétních filtrů. Stroje na zprac. inf., Sborník VI, 1958, s. 71—82.

[4] *Цыпкин Я. З.:* Теория импульсных систем. Физматгиз, Москва 1958.

[5] *Ragazzini J. R., Franklin G. F.:* Sampled- Data Control Systems. Mc Graw-Hill, N. York 1958.

Souhrn

PŘÍSPĚVEK K LINEÁRNÍ TEORII SAMOČINNÝCH SEŘIZOVAČŮ

Ludvík Prouza

V článku se ukazuje způsob výpočtu a některé vlastnosti optimálních lineárních automatických seřizovačů. Linearizované seřizovače, popisované v [1], jež využívají výsledku měření na jediném výrobku, jsou jejich zvláštním případem. Krátce se popisuje způsob technické realizace optimálního filtru ve zpětné vazbě digitálním počítacím schematem.

Zusammenfassung

ZUR LINEAREN THEORIE AUTOMATISCHER EINSTELLVORRICHTUNGEN

Ludvík Prouza

Im vorliegenden Artikel wird eine Methode zur Berechnung optimaler linearer automatischer Einstellvorrichtungen beschrieben und es werden einige Eigenschaften solcher Vorrichtungen angegeben. Linearisierte Einstellvorrichtungen, die in [1] beschrieben wurden und bei denen das Messresultat von einem einzigen Arbeitsstück benutzt wird, sind ein Spezialfall der ersteren. Es wird kurz die technische Realisierung des optimalen Filters in Rückkopplungsanordnung mittels eines Digitalrechenschemas beschrieben.