Josef Straka
Příspěvek k algebře isobarického spinu

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 1, 63–71

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102694

PŘÍSPĚVEK K ALGEBŘE ISOBARICKÉHO SPINU

JOSEF STRAKA

(Došlo dne 25. září 1958.)

Jsou nalezeny všechny irreducibilní representace maticové algebry, která sjednocuje algebry obvykle používané pro popis částic se spinem $\frac{1}{2}$, 1 a 0. Této maticové algebry bylo užito v práci [1] pro jednotný popis isobarických vlastností částic se silnou interakcí.

I. ÚVOD

Isobarický (i obyčejný) spin elementárních částic lze representovat hermitovskými operátory λ_j ($j = 1, 2, 3$), jež splňují relace

$$\lambda_j \lambda_k - \lambda_k \lambda_j = i\varepsilon_{jkl}\lambda_l \,, \tag{1}$$

kde ε_{jkl} je jednotkový antisymetrický tensor ($\varepsilon_{123} = 1$). Operátor $\vec{\lambda}^2 = \lambda_j^2$ pak komutuje se všemi třemi λ_j, a tedy v irreducibilní representaci matic λ_j jest násobkem jednotkového operátoru. Píšeme-li $\vec{\lambda}^2 = I(I + 1)$, pak pro $I = 0$, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, atd., dostaneme vždy jedno irreducibilní řešení, jež je řádu $N = 2I + 1$. Veličina I se označuje jako velikost spinu.

Z dosavadních experimentálních údajů o elementárních částicích však vyplývá, že se u nich vyskytují pouze (obyčejné i isobarické) spiny velikosti $I = 0$, $\frac{1}{2}$ a 1. VOTRUBA a LOKAJÍČEK [1] ukázali, že representace, odpovídající těmto třem hodnotám, lze sjednotit do jediné algebry, které lze použít pro jednotný popis isobarických vlastností částic, vykazujících silnou interakci (baryonů, mesonů).

Zavedeme-li totiž tři hermitovské matice ω_j relacemi

$$[\omega_j, \lambda_k] = i\varepsilon_{jkl}\omega_l \,, \tag{2}$$

tvoří pro $I = \frac{1}{2}$ též matice ω_j irreducibilní systém řádu 2. Spojíme-li pak matice λ_j, odpovídající celistvým hodnotám spinu $I = 1$ a $I = 0$, v jeden reducibilní systém, jest známo, že existují matice ω_j, splňující relace (2), jež tvoří irreducibilní systém řádu 4.

V obou uvedených případech splňují pak matice ω_j relace

$$\omega_j\omega_k\omega_l + \omega_l\omega_k\omega_j + \omega_k\omega_l\omega_j + \omega_j\omega_l\omega_k + \omega_l\omega_j\omega_k + \omega_k\omega_j\omega_l = \tag{3}$$
$$= 2(\delta_{jk}\omega_l + \delta_{kl}\omega_j + \delta_{lj}\omega_k) ,$$

$$\lambda_j\omega_k + \lambda_k\omega_j = \delta_{jk}U , \tag{4}$$

kde U je hermitovská matice, pro kterou z rovnice (4) plyne

$$U = \tfrac{2}{3}\lambda_j\omega_j . \tag{5}$$

Takové sjednocení může však míti skutečný význam jen tehdy, jestliže i obráceně rovnice (1), (2), (3) a (4) připouštějí pouze takové representace matic λ_j a ω_j, jež odpovídají uvedeným třem hodnotám velikosti spinu.

II. IRREDUCIBILNÍ HERMITOVSKÁ ŘEŠENÍ ROVNIC (1)—(4)

Pokusíme se nyní nalézti všechny irreducibilní hermitovské maticové representace algebry, definované základními prvky ω_j, λ_j a U, jež splňují relace (1)—(4). Přitom budeme postupovat způsobem, použitým v práci [2].

Vypišme nejprve relace, v nichž se vyskytují pouze matice ω_1 a ω_2:

$$(\omega_1^2 - 1)\,\omega_1 = 0 , \tag{3_1}$$

$$\omega_1^2\omega_2 + \omega_1\omega_2\omega_1 + \omega_2\omega_1^2 = \omega_2 , \tag{3_2}$$

$$\omega_1\omega_2^2 + \omega_2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2\omega_1 = \omega_1 , \tag{3_3}$$

$$(\omega_2^2 - 1)\,\omega_2 = 0 . \tag{3_4}$$

Je vidět, že tyto relace jsou identické s relacemi v práci [2] pro případ $n = 2$. Všechny irreducibilní representace prvků ω_1, ω_2, splňujících relace (3_1)—(3_4), lze tedy psáti ve tvaru (viz [2])

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} & \pm i\sqrt{p} \\ \sqrt{p} & 0 & \sqrt{1-2p} \\ \mp i\sqrt{p} & \sqrt{1-2p} & 0 \end{pmatrix} , \tag{6}$$

kde $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, přičemž pro $p = \frac{1}{2}$ jsou obě representace s $\pm i$ navzájem ekvivalentní a pro $p = 0$ se representace rozpadá na representaci triviální a dvojřádkovou.

Připojíme nyní další nezávislé relace, v nichž se vyskytují ostatní prvky:

$$\omega_1^2\omega_3 + \omega_1\omega_3\omega_1 + \omega_3\omega_1^2 = \omega_3, \tag{3_5}$$

$$\omega_2^2\omega_3 + \omega_2\omega_3\omega_2 + \omega_3\omega_2^2 = \omega_3 , \tag{3_6}$$

$$\omega_1\omega_3^2 + \omega_3\omega_1\omega_3 + \omega_3^2\omega_1 = \omega_1 , \tag{3_7}$$

$$\omega_2\omega_3^2 + \omega_3\omega_2\omega_3 + \omega_3^2\omega_2 = \omega_2 , \tag{3_8}$$

$$\omega_1\omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_2\omega_1 + \omega_2\omega_3\omega_1 + \omega_1\omega_3\omega_2 + \omega_3\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_1\omega_3 = 0 , \tag{3_9}$$

$$(\omega_3^2 - 1)\,\omega_3 = 0 , \tag{3_{10}}$$

$$(1_{1,2,3}) \qquad \lambda_2\lambda_3 - \lambda_3\lambda_2 = i\lambda_1 \quad (\text{cykl. } 1, 2, 3)\,,$$
$$(2_{1,2,3}) \qquad \omega_2\lambda_3 - \lambda_3\omega_2 = i\omega_1 \quad (\text{cykl. } 1, 2, 3)\,,$$
$$(2'_{1,2,3}) \qquad \lambda_2\omega_3 - \omega_3\lambda_2 = i\omega_1 \quad (\text{cykl. } 1, 2, 3)\,,$$
$$(2''_{1,2,3}) \qquad \omega_1\lambda_1 - \lambda_1\omega_1 = 0 \quad (\text{cykl. } 1, 2, 3)\,,$$
$$(4_{1,2,3}) \qquad \lambda_2\omega_3 + \lambda_3\omega_2 = 0 \quad (\text{cykl. } 1, 2, 3)\,,$$
$$(4_4) \qquad \lambda_1\omega_1 = \lambda_2\omega_2 = \lambda_3\omega_3\,.$$

Abychom určili matice ω_3 a λ_j, jest vhodné psáti (obdobně jako v práci [2]) matice ω_1, ω_2 obecně ve tvaru

$$(7) \qquad \omega_1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \tau_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \omega & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \omega & \ldots \\ \ldots & & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 \\ 3N_s\,, \\ 3N_t \\ \vdots \end{array} \qquad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \eta_s & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \eta_t & \ldots \\ \ldots & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 \\ 3N_s\,, \\ 3N_t \\ \vdots \end{array}$$

kde

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} N_0 \\ N_0 \end{array}, \qquad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} N_0 \\ N_0 \end{array}$$

a ω je matice ω_1 z relací (6), jejíž elementy jsou nyní násobky jednotkových matic o N_s, N_t, ... řádcích. Rovněž elementy matic η_s, η_t, ... jsou násobky jednotkových matic o N_s, N_t, ... řádcích, přičemž

$$(8) \qquad \eta_s = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p_s} & \iota_s\sqrt{p_s} \\ \sqrt{p_s} & 0 & \sqrt{1-2p_s} \\ -\iota_s\sqrt{p_s} & \sqrt{1-2p_s} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} N_s \\ N_s\,, \\ N_s \end{array} \quad \text{atd.},$$

kde

$$p_s, p_t, \ldots \neq 0\,, \quad \iota_s, \iota_t, \ldots = \pm i\,.$$

Matice λ_1, λ_2 zvolíme pak ve tvaru

$$(9) \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \mu & \nu_s & \nu_t & \ldots \\ \mu^+ & \varrho & \gamma_s & \gamma_t & \ldots \\ \nu_s^+ & \gamma_s^+ & \beta_s & \vartheta_{st} & \ldots \\ \nu_t^+ & \gamma_t^+ & \vartheta_{st}^+ & \beta_t & \ldots \\ \ldots & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 \\ 3N_s \\ 3N_t \\ \vdots \end{array} \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} \alpha' & \mu' & \nu_s' & \nu_t' & \ldots \\ \mu'^+ & \varrho' & \gamma_s' & \gamma_t' & \ldots \\ \nu_s'^+ & \gamma_s'^+ & \beta_s' & \vartheta_{st}' & \ldots \\ \nu_t'^+ & \gamma_t'^+ & \vartheta_{st}'^+ & \beta_t' & \ldots \\ \ldots & & & & \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 \\ 3N_s \\ 3N_t \\ \vdots \end{array}$$

kde prvky každé z matic jsou opět matice. Tak pro matici λ_1 (a zcela obdobně pro λ_2) platí např.

$$\varrho = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{array}{l} N_0 \\ N_0 \end{array}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{array}{l} N \\ N\,, \\ N \end{array}$$

(kde u β, b_{jk}, N vynecháváme indexy $s, t, \ldots$). Mají-li být matice λ_1, λ_2 hermitovské, musí platit též $a_{jk} = a_{kj}^+$, $b_{jk} = b_{kj}^+$, ...

Matice μ, ν, γ, ... pišme pak ve tvaru

$$\mu = \overset{N_0 N_0}{(m_1 m_2)}\, M\,, \quad \nu = \overset{N\,N\,N}{(n_1 n_2 n_3)}\, M\,, \quad \gamma = \begin{array}{c} N\;N\;N \\ \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}c_{13} \\ c_{21}c_{22}c_{23} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ N_0 \\ N_0 \end{array},$$

(opět vynecháváme indexy s, t, ... u N, ν, n_k, γ, c_{jk}, ...). Podobně lze rozepsat i matice ϑ.

Potom z rovnic $(2''_{1,2})$ a (4_3) plyne

$$\begin{aligned}
&\mu = \mu' = 0\,, && \nu = (n_1 0 0)\,, && \nu' = (n'_1 n'_2 n'_3)\,, \\
&n'_1 = -\iota\sqrt{1-2p}\, n_1\,, && n'_2 = -\sqrt{p}\, n_1\,, && n'_3 = \iota\sqrt{p}\, n_1\,, \\
&\beta = \beta' = 0\,, && \gamma = \gamma' = 0\,, && \vartheta = \vartheta' = 0\,,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$a_{12} = a_{21} = a'_{11} = a'_{22} = 0\,,$$
$$a_{11} = -\,a_{22} = a'_{12} = a'_{21} = \tfrac{1}{2}a\,,$$

kde v posledním řádku místo matice a_{11} byl zaveden nový symbol $\frac{1}{2}a$. Matici n_1, pomocí které jsme vyjádřili matice n'_k, budeme v dalším označovat prostě n. Jsou tedy v maticích (9) matice ϱ a ϱ' rovny

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{array}{l} N_0 \\ N_0 \end{array}, \quad \varrho' = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N_0 \\ N_0 \end{array}.$$

Užijeme-li nyní vztahů (10), obdržíme z rovnic (2_3), resp. $(2'_3)$ matici ω_3 ve tvaru

$$\omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_s & \sigma_t & \ldots \\ 0 & \tau_3 & 0 & 0 & \ldots \\ \sigma_s^+ & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \sigma_t^+ & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 \\ 3N_s\,, \\ 3N_t \\ \vdots \end{array}$$

kde

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -ia \\ ia & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N_0 \\ N_0 \end{array}, \quad \sigma_s = (0 \;\; -i\sqrt{p_s}n_s \;\; -i\iota_s\sqrt{p_s}n_s)\, M\,, \quad \text{atd.}$$

Z rovnic (2_2), $(2'_1)$ vycházejí potom další podmínky:

$$\begin{gathered}
a^2 = 1\,, \quad n_s^+ n_t = \delta_{st}\,, \\
\alpha n_s = \alpha n_t = \ldots = 0\,, \quad \alpha' n_s = \alpha' n_t = \ldots = 0\,, \\
\sqrt{1-2p_s} = \sqrt{1-2p_t} = \ldots = 0\,, \\
n_s^+ n_s = \frac{1}{2p_s}\,, \quad n_t^+ n_t = \frac{1}{2p_t}\,, \quad \ldots
\end{gathered} \tag{11}$$

Je patrno, že všechny tyto rovnice mohou být splněny pouze pro

$$p_s = p_t = \ldots = \tfrac{1}{2}\,.$$

Pak ovšem z druhého řádku v relacích (10) plyne

$$n_1' = 0 .$$

Protože v případě $p = \frac{1}{2}$ jsou obě representace, lišící se znaménkem u i, ekvivalentní, můžeme v ω_j, λ_j všude klást

$$\begin{array}{lll} p_s = p_t = \ldots = \frac{1}{2} , & N_s = N_t = \ldots = N , & \eta_s = \eta_t = \ldots = \eta , \\ \iota_s = \iota_t = \ldots = + i , & \nu_s = \nu_t = \ldots = \nu , & n_s = n_t = \ldots = n , \\ \sigma_s = \sigma_t = \ldots = \sigma , & & \end{array}$$

a tak lze matice ω_j, λ_j psát ve tvaru

$$(12) \quad \omega_1 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 , \\ 3N \end{array} \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 , \\ 3N \end{array} \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \tau_3 & 0 \\ \sigma^+ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 , \\ 3N \end{array}$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \nu \\ 0 & \varrho & 0 \\ \nu^+ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 , \\ 3N \end{array} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & \nu' \\ 0 & \varrho' & 0 \\ \nu'^+ & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 . \\ 3N \end{array}$$

Z rovnice (1_3) můžeme pak určit ještě matici λ_3. Užijeme-li ihned vztahů

$$(11a) \qquad a^2 = 1 , \quad n^+n = 1 , \quad \alpha n = 0 , \quad \alpha' n = 0 ,$$

dostaneme

$$(12a) \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} \alpha'' & 0 & 0 \\ 0 & \varrho'' & 0 \\ 0 & 0 & \beta'' \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 , \\ 3N \end{array}$$

kde

$$\alpha'' = - i(\alpha\alpha' - \alpha'\alpha) , \quad \varrho'' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} N_0 \\ N_0 \end{array} , \quad \beta'' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} N \\ N . \\ N \end{array}$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že matice ω_j, λ_j, určené vztahy (12), (12a), vyhovují všem relacím (1)—(4), splňují-li matice a, α, α', n relace (11a) a jsou-li splněny též relace

$$\alpha = - i(\alpha'\alpha'' - \alpha''\alpha') , \quad \alpha' = - i(\alpha''\alpha - \alpha\alpha'') .$$

Z $n^+n = 1$ plyne, že hermitovská matice nn^+ má za charakteristické hodnoty jen 0 a 1, a tedy unitární transformací $u\omega_j u^+$, kde

$$u = \begin{pmatrix} \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} M \\ 2N_0 , \\ 3N \end{array}$$

lze nn^+ uvést na tvar

$$nn^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} M' \\ M'' \end{matrix}, \quad (M' + M'' = M) . \tag{13}$$

Z rovnice (13) pak plyne, že novou matici n lze psáti ve tvaru

$$n = \begin{array}{c} N \\ \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} M' \\ M'' \end{matrix} .$$

Z rovnice (13) je dále patrno, že $QQ^+ = 1$, avšak z podmínky $n^+n = 1$ plyne, že také $Q^+Q = 1$; tedy Q je unitární a $M'' = N$. Hermitovskou matici α lze nyní psát ve tvaru

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\alpha}_1^+ & \overline{\overline{\alpha}}_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} M' \\ N \end{matrix} .$$

Z rovnice $\alpha n = 0$ obdržíme $\overline{\alpha}_1 Q = 0$, $\overline{\overline{\alpha}}_1 Q = 0$, a protože Q je unitární, jest

$$\overline{\alpha}_1 = \overline{\overline{\alpha}}_1 = 0 .$$

Obdobné výsledky vyjdou také pro α', α'', takže můžeme psáti:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} M' \\ N \end{matrix}, \quad \alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} M' \\ N \end{matrix}, \quad \alpha'' = \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} M' \\ N \end{matrix},$$

kde

$$\alpha_3 = -i(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1) \quad \text{(cykl. 1, 2, 3)} .$$

Jest ihned patrno, že matice ω_j a λ_j jsou reducibilní. Existují tedy tři různá řešení:

1) Řešení

$$\omega_j \equiv 0 , \quad \lambda_j \equiv \alpha_j ,$$

kde α_j splňují relace

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_1 = i\alpha_3 \quad \text{(cykl. 1, 2, 3)} ;$$

matice α_j mají tedy nekonečný počet irreducibilních řešení pro velikosti spinu $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$, atd.

2) Řešení

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_0 \end{matrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_0 \end{matrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & -ia \\ ia & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_0 \end{matrix}, \tag{14}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_0 \end{matrix}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_0 \end{matrix}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_0 \end{matrix} .$$

Lze se snadno přesvědčit, že matice ω_j splňují v tomto případě též jednodušší relace

$$\omega_j\omega_k + \omega_k\omega_j = 2\delta_{jk} .$$

Zvolíme nyní unitární matici $u = \begin{pmatrix} \psi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \begin{matrix} N_0 \\ N_0 \end{matrix}$. Unitární transformace, vytvořená touto maticí, ponechává tvar matic (14) beze změny, nahradíme-li matici a maticí $a' = \psi a \psi^+$. Je zřejmé, že lze zvolit ψ tak, aby hermitovská matice a' byla diagonální. Protože matice a má charakteristické hodnoty ± 1, lze psát

$$a' = \begin{array}{l}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} N_0' \\ N_0'' \end{array}, \quad N_0' + N_0'' = N_0 .$$

Lze se snadno přesvědčit, že matice (14) představují dvě různá irreducibilní řešení pouze v případech

a) $N_0' = 1$, $N_0'' = 0$,

b) $N_0' = 0$, $N_0'' = 1$.

Tato řešení jsou navzájem neekvivalentní. Platí pak $\lambda_j^2 = I(I + 1)$, kde $I = \frac{1}{2}$, takže obě representace odpovídají spinu $\frac{1}{2}$.

Jest splněna též relace

$$\lambda_j = \pm \tfrac{1}{2}\omega_j ,$$

přičemž horní znaménko platí v případě a) a dolní v případě b).

3) Řešení

(15)

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N \\ N \\ N \\ N \end{array}, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N \\ N \\ N \\ N \end{array}, \quad \omega_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -iQ & Q \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ iQ^+ & 0 & 0 & 0 \\ Q^+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N \\ N \\ N \\ N \end{array},$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & Q & 0 & 0 \\ Q^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N \\ N \\ N \\ N \end{array}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q & iQ \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q^+ & 0 & 0 & 0 \\ -iQ^+ & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N \\ N \\ N \\ N \end{array}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N \\ N \\ N \\ N \end{array}.$$

V tomto případě splňují matice ω_j jednodušší rovnice

$$\omega_j\omega_k\omega_l + \omega_l\omega_k\omega_j = \delta_{jk}\omega_l + \delta_{kl}\omega_j . \tag{16}$$

Unitární transformací, vytvořenou maticí

$$u = \begin{pmatrix} Q^+ & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} N \\ 3N \end{array},$$

lze matice (15) převést na tvar, kde matice Q jest nahrazena maticí jednotkovou.

Irreducibilní řešení dostaneme zase pouze pro $N = 1$, což jest známá čtyřřádková representace rovnic (16).

Matice λ_j jsou reducibilní. Rozpadají se na dvě irreducibilní části, jimž odpovídá $I = 1$ a $I = 0$. Jest splněna též relace

$$\lambda_j = - i\varepsilon_{jkl}\omega_k\omega_l .$$

III. ZÁVĚR

Bylo ukázáno, že pro $\omega_j \neq 0$ odpovídají řešení rovnic (1)—(4) skutečně spinu 0, $\frac{1}{2}$ a 1. Tento výsledek je však nepříznivě ovlivněn skutečností, že vedle těchto representací jest v algebře obsažen nekonečný počet representací s $\omega_j = 0$, jimž mohou odpovídat všechny možné velikosti spinu. V práci [1] a [3] se representací s $\omega_j \neq 0$ používá k popisu baryonů a mesonů v isobarickém prostoru. Jest pak pravděpodobné, že alespoň některých irreducibilních representací s $\omega_j = 0$ bude možno použít pro popis ostatních elementárních částic. Tato otázka bude však vyžadovat ještě podrobnějšího rozboru.

Prof. dr. V. Votrubovi a dr. M. Lokajíčkovi děkuji za četné rady v průběhu této práce a při jejím sepisování.

Literatura

[1] *Votruba V., Lokajíček M.:* An Algebraic System of Fundamental Particles. Publikace Spojeného ústavu jaderných výzkumů, Dubna 1958.

[2] *Christov Ch. J., Votruba V.:* Čs. čas. fys. 4 (1954), 383.

[3] *Lokajíček M.:* Universální pole pro částice se silnou interakcí (bude publikováno).

Резюме

ВКЛАД В АЛЬГЕБРУ ИЗОБАРИЧЕСКОГО СПИНА

ИОСЕФ СТРАКА (Josef Straka)

Вотруба и Локайчек [1] показали, что представления, соответствующие значениям спина $I = 0, \frac{1}{2}$ и 1, можно соединить в единую алгебру, которую можно использовать для единого описания изобарических свойств частиц, между которыми имеется сильное взаимодействие. Эта алгебра выполняет уравнения (1)—(4).

Такое соединение имеет смысл, если также наоборот уравнения (1)—(4) допускают только такие представления матриц λ_j и ω_j, которые соответствуют выше указанным значениям спина.

В предлагаемой статье с помощью метода, использованного в работе [2], показано, что неприводимые представления уравнений (1)—(4) можно разделить на две группы. Одну из них образуют представления, для которых $\omega_j \neq 0$. Эти представления действительно соответствуют значениям спина 0, $\frac{1}{2}$ и 1. Помимо этой группы существует бесконечное число дальнейших неприводимых представлений, для которых $\omega_j = 0$. В этом случае уравнения (2)—(4) выполнены тождественно; матрицы λ_j определяются только уравнениями (1) и могут им отвечать всевозможные значения спина.

Zusammenfassung

BEITRAG ZUR ALGEBRA DES ISOBARISCHEN SPINS

JOSEF STRAKA

VOTRUBA und LOKAJÍČEK [1] haben gezeigt, dass man die Repräsentationen, die der Grösse des Spins $I = 0, \frac{1}{2}$ und 1 entsprechen, in eine Algebra vereinigen kann, welche man für eine einheitliche Beschreibung der isobarischen Eigenschaften der Partikeln mit starker Interaktion benützen kann. Diese Algebra erfüllt die Relationen (1)—(4).

So eine Vereinigung hat einen Sinn, wenn die Relationen (1)—(4) auch umgekehrt nur solche Repräsentationen der Matrizen λ_j und ω_j gestatten, welche den Werten des Spins 0, $\frac{1}{2}$ und 1 entsprechen.

In dieser Arbeit (mit Hilfe der in der Arbeit [2] benutzten Methode) wurde gezeigt, dass man die irreduziblen Repräsentationen der Relationen (1)—(4) in zwei Gruppen verteilen kann. Die eine besteht aus Repräsentationen, für welche $\omega_j \neq 0$. Diese Repräsentationen entsprechen wirklich den Werten 0, $\frac{1}{2}$ und 1 des Spins. Ausser dieser Gruppe der Repräsentationen existiert noch eine unendliche Anzahl weiterer irreduziblen Repräsentationen, für welche $\omega_j = 0$ ist. In diesem Falle sind die Relationen (2)—(4) identisch erfüllt; die Matrizen λ_j werden dann nur durch die Gleichungen (1) bestimmt und alle möglichen Werte des Spins können ihnen entsprechen.