Josef Kolomý

Užití Galerkinovy metody v úlohách o stabilitě proudění vazké tekutiny

Aplikace matematiky, Vol. 5 (1960), No. 1, 40–44

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102692`

UŽITÍ GALERKINOVY METODY V ÚLOHÁCH O STABILITĚ PROUDĚNÍ VAZKÉ TEKUTINY

JOSEF KOLOMÝ

(Došlo dne 26. října 1958)

V článku se dokazuje konvergence Galerkinovy metody pro úlohy o stabilitě proudění vazké tekutiny proudící mezi dvěma rotujícími válci.

Nejdříve uvedeme některé věty a definice. Ostatní definice zde nepodané jsou obsaženy v knize S. G. MICHLINA [1] v tom znění, v jakém jich budeme používat.

Označme symbolem Ω otevřenou a omezenou oblast m-rozměrného Eukleidova prostoru E_m, $\overline{\Omega}$ její uzávěr, H úplný separabilní Hilbertův prostor a D_k definiční obor operátoru K v prostoru H.

Věta 1. *Nechť je $l > 0$ celé číslo, $\overline{\Omega} \subset E_m$. Nechť V je množina funkcí l-krát spojitě diferencovatelných v $\overline{\Omega}$ a vyhovujících libovolným okrajovým homogenním podmínkám. Potom V je hustá v $L_2(\Omega)$* ([2], § 16).

Definice 1. *Nechť operátor A_0 je definován na lineálu M hustém v H. Řekneme, že operátor A_0 je kladně definitní na M, existuje-li konstanta $\gamma > 0$ tak, že pro každé $u \in M$ je*

$$(A_0 u, u) \geqq \gamma^2 \|u\|^2 .$$

Věta 2. *Nechť lineál M je hustý v H a nechť A_0 je kladně definitní na M. Potom A_0 lze rozšířit na samodružný (sám sobě adjungovaný) operátor.* ([1], § 19.)

Definice 2. *Buď A_0 samodružný kladně definitní operátor definovaný na lineálu M hustém v H. Zaveďme Hilbertův prostor tím, že na lineálu M definujeme skalární součin vztahem*

$$[u, v] = (A_0 u, v) .$$

V tomto prostoru je norma dána vzorcem

$$|v|^2 = (A_0 v, v) .$$

Takto získaný prostor nemusí být úplný. Doplníme-li jej obvyklým způsobem limitními prvky, je takto rozšířený prostor již úplný. Tento prostor označíme symbolem H_0.

Věta 3. *Nechť μ je parametrem rovnice*

$$A_0 v - \mu K v = 0 \tag{1}$$

a $M \subset D_k$. Dále, nechť jsou splněny tyto předpoklady:

I. *Operátor A_0 splňuje požadavky definice 2.*
II. *Operátor $T = A_0^{-1} K$ je totálně spojitý v H_0.*

Potom Galerkinova methoda pro výpočet charakteristických čísel μ rovnice (1) *konverguje v H_0.* ([1], § 52.)

V úlohách o stabilitě proudění vazké tekutiny se užívá Galerkinovy metody k nalezení charakteristického čísla lineárních okrajových úloh. Vyšetřování stability proudění vazké tekutiny proudící mezi dvěma nekonečnými rotujícími válci poloměrů a, b $(b > a)$ vede k úloze o charakteristických číslech rovnice

$$(D^2 - \alpha^2)^3 v(x) = S \alpha^2 \left(A + \frac{B}{x^2}\right) v(x) , \quad a \leqq x \leqq b , \tag{2}$$

s podmínkami

$$v = 0 , \quad (D^2 - \alpha^2) v = 0 , \quad D(D^2 - \alpha^2) v = 0 \tag{3}$$

pro $x = a, x = b$, přičemž $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$; A, B, α, a, b jsou konstanty různé od nuly. ([3], (2.6) a (2.7).)

Důkaz konvergence Galerkinovy metody pro výpočet charakteristických čísel v uvedené úloze provedeme tím, že dokážeme konvergenci této metody pro rovnici

$$- (D^2 - \sigma)^3 v(x) + \mu\, p(x)\, v(x) = 0 \tag{4}$$

s podmínkami

$$(5) \left\{ \begin{array}{ll} (5_1) & v(a) = v(b) = 0 , \\ (5_2) & (D^2 - \sigma) v(a) = (D^2 - \sigma) v(b) = 0 , \\ & D(D^2 - \sigma) v(a) = D(D^2 - \sigma) v(b) = 0 , \end{array} \right.$$

kde $D = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $x \in \langle a, b \rangle$, funkce $p(x) \in L_2(a, b)$ a číslo $\sigma > 0$. K tomu stačí dokázat, že platí předpoklady I. a II. věty 3 pro rovnici (4) s podmínkami (5).

Platnost předpokladu I.

Nechť M je množina všech funkcí majících spojité derivace do řádu šestého včetně v $\langle a, b \rangle$ a vyhovujících okrajovým podmínkám (5). Budiž N množina všech funkcí majících spojité derivace až do řádu šestého v $\langle a, b \rangle$ a vyhovujících okrajovým podmínkám (5_1) a (5_2). Podle věty 1 M a N jsou husté v $L_2(a, b)$.

Položme

$$\varphi = - Lv , \quad \text{kde} \quad L = D^2 - \sigma , \quad A_0 v = - L^3 v , \quad Kv = pv .$$

Podmínka (5_2) má potom tvar

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0 \,, \tag{6}$$

přičemž pro $v(x)$ platí (5_1). Dokážeme nejdříve, že operátor A_0 je kladně definitní na N.

Především

$$v = - L^{-1}\varphi = - \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \,, \tag{7}$$

kde $G(x, \xi)$ je Greenova funkce pro úlohu danou rovnicí

$$Lv = 0$$

a okrajovými podmínkami (5_1). Operátor L^{-1} je tedy omezený a integrál (7) je Fredholmův operátor se symetrickým jádrem aplikovaný na funkce $\varphi(\xi) \in L_2(a, b)$. Je tedy samodružný (viz [4], § 30). Integrací per partes a podle (6) je

$$(A_0 v, v) = - (L^3 v, v) = - (L^2\varphi, L^{-1}\varphi) = - (L\varphi, \varphi) =$$
$$= - \int_a^b (\varphi''\varphi - \sigma\varphi^2)\, dx \geqq \sigma\|\varphi\|^2 \,.$$

Podle (5_1)

$$\|\varphi\|^2 = (Lv, Lv) = \int_a^b (v''^2 + 2\sigma v'^2 + \sigma^2 v^2)\, dx \geqq \sigma^2 \int_a^b v^2\, dx = \sigma^2\|v\|^2 \,.$$

Odtud a z předchozí nerovnosti dostaneme

$$(A_0 v, v) \geqq \gamma^2\|v\|^2 \,, \quad \gamma = \sigma\sqrt{\sigma} > 0 \,. \tag{8}$$

Operátor A_0 je tedy kladně definitní na N. Protože však $M \subset N$, je A_0 též kladně definitní na M, lze jej tedy podle věty 2 rozšířit na samodružný operátor.

Platnost předpokladu II.

Skalární součin

$$[u, v] = (A_0 u, v)$$

definuje na uzávěru M prostor H_0 s normou

$$|v|^2 = (A_0 v, v) = - \int_a^b (D^2 - \sigma)^3\, v \,.\, v\, dx \,.$$

Dokážeme, že operátor $Tv = A_0^{-1} pv$ je totálně spojitý v H_0.

Především je

$$Tv = \int_a^b G_1(x, \xi)\, p(\xi)\, v(\xi)\, d\xi \,,$$

kde $G_1(x, \xi)$ je Greenova funkce pro úlohu danou rovnicí

$$(D^2 - \sigma)^3\, v(x) = 0 \,, \quad a \leqq x \leqq b$$

a okrajovými podmínkami (5).

Označme znakem J dvojrozměrný interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle a, b\rangle$ a znakem $C\langle a, b\rangle$ množinu všech konečných spojitých reálných funkcí v $\langle a, b\rangle$. Nechť Q je omezená množina funkcí $v(x)$ v $L_2(a, b)$. Existuje tedy číslo $C_1 > 0$ tak, že $\|v\| < C_1$, když $v \in Q$. Nechť U je množina funkcí $u = Tv$, kde $v \in Q$. Předně $U \subset C\langle a, b\rangle$.

Dále

$$|u|^2 \leqq \int_a^b |v|^2 \,\mathrm{d}\xi \,.\, \int_a^b |G_1(x, \xi)\, p(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < C_1^2 M_1^2 X^2 \,,$$

kde

$$M_1 = \max_{[x, \xi] \in J} |G_1(x, \xi)| \,, \qquad \int_a^b |p(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi < X^2 \,.$$

Funkce z U jsou tedy stejně omezené. Dokážeme, že jsou též stejně spojité.

Funkce $G_1(x, \xi)$ je stejnoměrně spojitá v J. K libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta(\varepsilon) > 0$ tak, že

$$(x_1 \in \langle a, b\rangle,\ x_2 \in \langle a, b\rangle,\ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |G_1(x_1, \xi) - G_1(x_2, \xi)| < \varepsilon \,.$$

Potom po každé $u \in U$ platí

$$(x_1 \in \langle a, b\rangle,\ x_2 \in \langle a, b\rangle,\ |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon)) \Rightarrow |u(x_1) - u(x_2)|^2 < \varepsilon^2 C_1^2 X^2 \,.$$

Podle Arzelovy věty množina U je normální. (JARNÍK, Diferenciální počet, kap. VI, § 17.) Operátor T je tedy totálně spojitý ve smyslu stejnoměrné konvergence a tedy tím spíše je totálně spojitý ve smyslu konvergence v průměru v $L_2(a, b)$.

Budiž F omezená množina funkcí $v(x)$ v H_0. Existuje tedy číslo $B_0 > 0$ tak, že

$$|v| < B_0 \,, \quad \text{když} \quad v \in F \,.$$

Podle (8)

$$\|v\| < \frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}} |v|$$

a tudíž

(9) $$\|v\| < \frac{1}{\sigma\sqrt{\sigma}} B_0 \,, \quad \text{když} \ v \in F \,.$$

Operátor T je totálně spojitý v $L_2(a, b)$, lze tedy vybrat posloupnost $v_n(x) \in F$ tak, že

(10) $$\|Tv_n - Tv_m\| \underset{n, m \to \infty}{\to} 0 \,.$$

Odhadneme

$$|Tv_n - Tv_m| \,.$$

Podle definice normy v H_0

$$|Tv_n - Tv_m|^2 = (A_0\, T(v_n - v_m), T(v_n - v_m)) =$$
$$= (p(v_n - v_m), T(v_n - v_m)) \,.$$

Odtud a podle (9) a (10)

$$\left|Tv_n - Tv_m\right|^2 \leqq \|p\| \cdot \|v_n - v_m\| \cdot \|Tv_n - Tv_m\| \leqq$$
$$\leqq \frac{2B_0}{\sigma\sqrt{\sigma}} \|p\| \cdot \|Tv_n - Tv_m\| \underset{n, m \to \infty}{\rightarrow} 0 .$$

Operátor T je tedy totálně spojitý v H_0, čímž je dokázáno, že podmínka II. věty 3 je splněna. Tedy Galerkinova metoda pro výpočet charakteristických čísel rovnice (4) s podmínkami (5) konverguje v H_0.

Literatura

[1] *С. Г. Михлин:* Прямые методы в математической физике.

[2] *С. Г. Михлин:* Проблема минимума квадратичного функционала.

[3] *R. C. di Prima*: Application of Galerkin Method to Hydrodynamic Stability. Quaterly of Applied Mathematics, 1955, 13.

[4] *Люстерник, Соболев:* Элементы функционального анализа.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА В ЗАДАЧАХ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ИОСЕФ КОЛОМЫ (Josef Kolomý)

В этой статье доказывается сходимость метода Галеркина в применении к задаче отыскания собственных значений в задачах об устойчивости течений вязкой жидкости между двумья бесконечными цылиндрами радиусов a, b ($b > a$), вращающимся в одном и том же и в противоположных направлениях.

Summary

AN APPLICATION OF GALERKIN'S METHOD TO STABILITY PROBLEMS OF A STREAM LINE VISCOUS FLOW

Josef Kolomý

This paper contains a proof of convergence of Galerkin's method for the calculation of eigenvalues in stability problems of a stream line viscous flow between two coaxial infinite cylinders rotating in the same or opposite directions.