Ivo Babuška

Náhodové diferenciální rovnice

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 3, 227–232

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102664`

NÁHODOVÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Diskusní příspěvek

Ivo Babuška

Značná část problémů fysiky a techniky je úzce spjata s diferenciálními a integrálními rovnicemi matematické fysiky. Důležitou roli zde hraje zvláště teorie fenomenologická. Okrajové nebo počáteční podmínky vystihují přitom jisté fysikální vztahy a veličiny; v rovnicích vystupující koeficienty mají také jasný fysikálně fenomenologický smysl a význam.

Uveďme jako příklad nestacionární problém vedení tepla. Pro jednoduchost mějme na mysli jednodimensionální problém, který si představme tak, že vznikl při studiu průteplivosti zdi. (Viz obr. 1.) Na straněA mějme jako okrajovou podmínku předepsán průběh teploty $T_0(t)$, na straně B průběh $T_1(t)$. Označíme-li nyní λ koeficient vodivosti, c specifické teplo, γ specifickou hmotu, dostaneme na základě Fourierovy fenomenologické teorie diferenciální rovnici

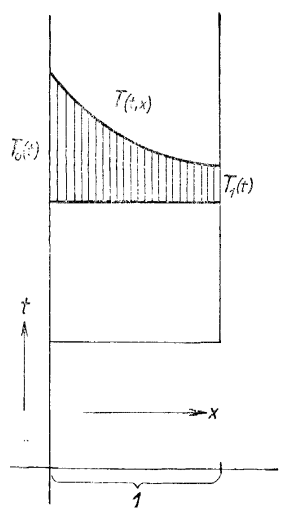
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) = c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

s okrajovými podmínkami

$$T(0, t) = T_0(t)\,, \quad T(1, t) = T_1(t)$$

a počáteční podmínkou

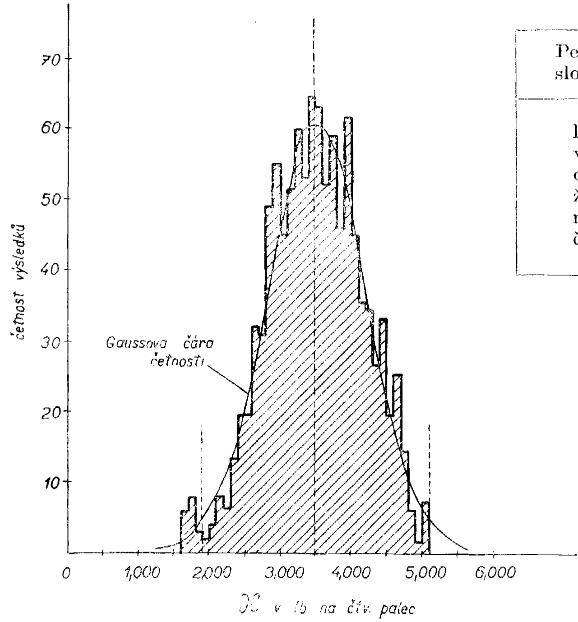
$$T(x, 0) = 0\,.$$



Obr. 1.

Studujme nyní blíže odvozenou rovnici, její okrajové a počáteční podmínky. Koeficient vodivosti λ je fysikální fenomenologický koeficient (rozměr cal/°C cm sec). Jeho hodnoty jsou uvedeny ve všech tabulkách.

Položme si nyní otázku, co vyjadřuje tento koeficient udávaný v tabulkách. Při každém měření dochází přece k rozptylu výsledků. Tento rozptyl pak není způsoben jen měřícími chybami, ale i vlastnostmi materiálu. Hodnota udávaná v tabulkách je tedy asi střední hodnotou. Považuji za základní nedostatek, že v tabulkách není současně uváděn i rozptyl. Jako ilustraci uvedu histogram četností pevnosti betonu při stavbě ocelárny v Port Talbot. (Obr. 2.)[1]



Obr. 2. Histogram pevností v tlaku betonu 1 : 6 míšeného objemu v míchačkách s nepřetržitým chodem. Počet zkoušek $n = 1048$. (Stavba oceláren v Port Talbot — J. ICE 1950.)

Tabulka[2] [3])

Petrografické složení štěrku	Teplotní vodivost betonu m/hod.
křemen	0,00539
vápenec	0,00474
dolomit	0,00465
žula	0,00400
ryolit	0,00325
čedič	0,00297

Pevnost má sice jiný význam než koeficient vodivosti, ale principiálně jde o stejné měření fenomenologické fysikální veličiny. O rozptylu hodnot koeficientu tepelné vodivosti si můžeme učinit obrázek z údajů o mezích, ve kterých se nalézá. Uvedu tabulku. Podobný význam a smysl má i koeficient specifického tepla a specifické hmoty.

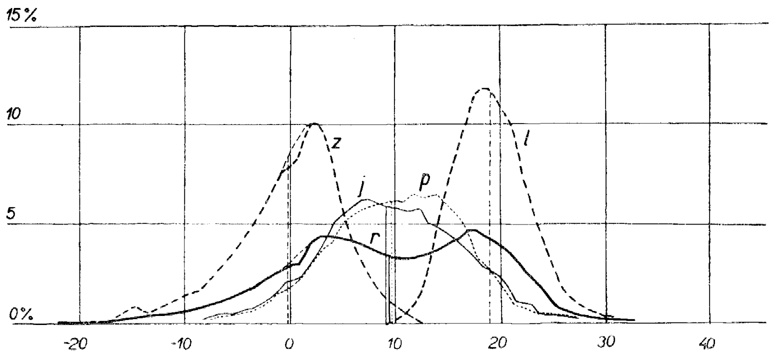
Koeficienty můžeme často velmi dobře považovat za náhodné veličiny. Přitom tyto koeficienty budou náhodnými funkcemi v závislosti na argumentu. Jde tedy o stochastický proces. Poznamenejme ještě, že stochastický charakter zahrnuje každá fenomenologická teorie ještě v jiném smyslu. Je to patrno nejlépe v našem případě ze známé statické teorie. Připomeňme si ještě, že stejný tvar jako rovnice (1) má i rovnice Kolmogorova. Je patrno, že i když se v rovnici (1) užívá diferenciálního tvaru Fourierova zákona, je třeba ji prakticky chápat vlastně diferenčně. Nelze jíti do příliš malých rozměrů.

[1]) Počet zkoušek 1049. Journal of the Institution of civil Engineers London, (1950).

[2]) Teplotní vodivostí nazýváme součinitel $h^2 = \frac{\lambda}{c\gamma}$.

[3]) Podle J. Stroka *Technológia betonu*, Bratislava 1954.

Zatím jsme se zabývali pouze rovnicí a jejími koeficienty. Všimněme si nyní okrajových podmínek. Z fysikálních důvodů často plyne, že jsou i funkce $T_0(t)$ a $T_1(t)$ náhodnými funkcemi. Pro určitost si představme, že $T_1(t)$ je vnější teplota ovzduší (počasí). Na obr. 3 je vyznačena křivka četností průměrných denních teplot za 200 let.[4]) Problém je tedy problém náhodové diferenciální rovnice s náhodovými okrajovými podmínkami. Lze očekávat, že řešení bude také náhodovou funkcí a za určitých předpokladů bude s dostatečnou přesností hodnota střední řešení rovna řešení, ke kterému dospějeme, řešíme-li rovnici



Obr. 3. Četnost denních průměrů teploty (7 + 14 + 21) : 3 v % — v ročních dobách a v roce. j . . . jaro, l . . . léto, p . . . podzim, z . . . zima, r . . . rok

tak, že za koeficienty a okrajové hodnoty vezmeme střední hodnoty. Dosavadní výpočty tedy, vycházíme-li ze středních hodnot, směřují ve většině případů ke střední hodnotě. Je třeba však zdůraznit, že i přesné vyřešení rovnice vede ve většině případů pouze k přibližnému určení střední hodnoty náhodového řešení.

Na základě dosažených výsledků, vypočtených hodnot — v našem případě teploty v daném čase a místě — provádí se určité závěry. V příznivém případě jsme vycházejíce ze středních hodnot, vypočetli střední hodnoty. Je však závěr vycházející ze středních hodnot oprávněný (není třeba vycházet např. ze závěrů o extremních hodnotách)? Výpočet provádíme proto, abychom učinili závěry — nejde přece o výpočet samoúčelný; je tedy oprávněna někdy jednostranná péče jdoucí do značných detailů o přesnost výsledku (odhad chyby metody, chyby zaokrouhlovací atp.) v tom smyslu, že nám tato přesnost umožní provést spolehlivější závěry? Je pro zvýšení spolehlivosti závěrů (nikoliv dosažených numerických výsledků, v našem případě hodnot řešení diferenciální rovnice) nejsprávnější cestou maximální úsilí o co nejpřesnější vyřešení dané diferenciální rovnice resp. co nejpřesnější odhad chyby apod.? Není právě tak důležité, jako odhad rozdílu mezi přesným (tj. přesným, teoreticky řešením matematické diferenciální rovnice) a přibližným řešením (tj. přibliž-

[4]) Podle dr. J. HLAVÁČE.

ným ve srovnání s řešením dané diferenciální rovnice), odhadnout i dispersi dosažených výsledků? Není třeba chápat přesnost v širším smyslu jako rozdíl řešení ve srovnání se skutečností (v náležitém smyslu)? Potom přesnost, která vyjadřuje rozdíl přibližného a přesného řešení dané diferenciální rovnice je pouze speciální částí tohoto problému.

V jakém poměru k těmto myšlenkám je vývoj dnešní matematiky, který směřuje ke stále větší přesnosti; co je to aplikovaná matematika (existuje-li vůbec) a co jsou to matematické aplikace?

Tyto myšlenky, třebaže ohraničeného rázu, souvisí, podle mého názoru, velmi úzce s touto diskusí. Pokusím se na některé tyto myšlenky odpovědět. *Matematická aplikace* je podle mého názoru řešení fysikálního nebo technického problému matematickou cestou, přičemž matematika zde hraje roli významnou, co do metody základní, co do cíle však pomocnou. Hlavní je a musí být co nejspolehlivější poznání a studium daného technického nebo fysikálního jevu, přičemž se musí matematika v tomto případě podřídit tomuto účelu. Tak např. je třeba chápat pojem chyby (se všemi důsledky) nikoliv jako rozdíl mezi řešením dané diferenciální rovnice a řešením numerickým, ale jako rozdíl (samozřejmě ve vhodném smyslu) mezi dosaženým řešením a skutečností. Celá matematická cesta musí být v tomto případě podřízena základnímu cíli, co nejspolehlivějšímu technickému nebo fysikálnímu závěru dosaženému na základě matematických úvah. Tím musí být ovlivněna matematická formulace problému, metoda řešení, přesnost matematického řešení, otázka počtu desetinných míst apod. Tak např. považuji na nejsprávnější, aby při numerickém řešení byl poměr chyby mezi skutečností a danou diferenciální rovnicí, rozdíl mezi přesným a přibližným řešením této rovnice a vliv zaokrouhlovacích chyb ve správném poměru, přičemž vzhledem k pracnosti je třeba se omezit ve výpočtu na minimální míru přesnosti, umožňující ještě spolehlivý závěr. Tak nemá zřejmě cenu počítat s požadovanou přesností výsledku na 5 desetinných míst, když rozptyl řešení (jako náhodová funkce) vlivem velké disperse v počátečních a okrajových podmínkách a fenomenologických koeficientech je velikostí jednotek. Nesouhlasím s někdy vyslovovaným míněním vyžadujícím jednostrannou matematickou přesnost bez ohledu na přesnost celkovou. Jsem přesvědčen, že tato celková přesnost je právě tak věcí matematika pracujícího v matematických aplikacích jako přesnost v úvahách ryze matematických; je zde ovšem třeba úzké spolupráce s fysikem nebo technikem. Je třeba si však dobře také uvědomiti rozdíl mezi přesností v tom smyslu, jak jsem se o ní zmínil a přesností pojmovou. Domnívám se, že jen maximální pojmová přesnost jak v části matematické tak nematematické, přesné uvědomění, které úvahy jsou zcela logicky přesné a bezesporné a které mají názorný charakter, které úvahy jsou matematické a které technické neb fysikální, jen taková pojmová přesnost ve všech etapách řešení může zaručit dobrou přesnost celkovou.

Aplikovaná matematika jsou podle mého názoru matematické metody a cesty k tomu, aby co nejlépe mohly být vyřešeny dané technické a fysikální problémy. Vzhledem k tomu, že tyto matematické metody jsou společné řadě problémů matematických aplikací, jedná se v aplikované matematice o hledání metod v abstraktním tvaru, bez ohledu na problém matematických aplikací. Cílem je zde např. vyřešit diferenciální rovnici (nikoliv nějaký fysikální problém). Na tomto místě bych chtěl ještě zdůraznit, že vývoj matematiky ke stále větší pojmové přesnosti zcela odpovídá snaze po maximálním poznání matematických metod a cest. Jest to tím důležitější, že řada velmi mocných matematických metod, velmi účinně aplikovatelných při studiu technických nebo fysikálních problémů ztratila onu fysikální názornost, kterou měla matematika před 50 lety. Názorové hledisko může dnes při nedostatečné opatrnosti býti příčinou docílení zcela chybných výsledků.

Vzhledem k tomu, že dnes celá matematika dává ve větší nebo menší míře tyto metody aplikované matematiky, nelze v přesném smyslu jakýmkoliv způsobem položit dělítko mezi tzv. čistou a aplikovanou matematiku. Prakticky však se pokládají za aplikovanou matematiku ty partie matematiky, které se více nebo méně bezprostředně zabývají metodami přímo užitelnými v matematických aplikacích. Je podle mého mínění úkolem matematiků, aby rozpracovávali tyto metody aplikované matematiky, všímali si nových podnětů a otázek vyskytujících se v technice a fysice. Považuji za vysoce žádoucí, aby matematik pracující v oboru aplikované matematiky studoval nejen problémy a látku matematickou, ale i technickou a fysikální a z ní bral a získával nové podněty.[5]) Znáhodnělé diferenciální rovnice, o nichž jsem se zmínil na začátku tohoto příspěvku, mi připadají jako speciální část problematiky statistických metod jedna ze základních partií aplikované matematiky (v tom smyslu, jak jsem se o tom zmínil) a to i v tom případě, že je dodnes velmi málo výsledků z tohoto oboru.

Zmíním se nyní podrobněji o otázkách souvisících s nahodilými okrajovými podmínkami. Pro určitost budu mít na mysli řešení Dirichletova problému pro Laplaceovu rovnici s nahodilými krajovými podmínkami. Prvním úkolem je nyní definice náhodného řešení. Tato otázka není tak jednoduchá, jak se na první pohled zdá. Je zde řada možných definic, podobně jako při integrálu z náhodové funkce. Je problémem, která z těchto definic je nejvhodnější z hlediska aplikací matematiky (v různých technických problémech může být nejvhodnější definice různá), k jakým dojdeme výsledkům, s kterou definicí budeme nejlépe pracovat. Tyto otázky zde nemohu rozvádět. Položme si spíše otázku, jaké vlastnosti má mít toto náhodové řešení. Bylo by jistě velice žádoucí, kdyby řešení vypočtené pro střední hodnoty okrajových podmínek

[5]) Možná, že by nebylo nevhodné diskutovat na stránkách tohoto časopisu o těchto otázkách.

bylo střední hodnotou náhodového řešení. Dále pak, kdyby z korelační funkce náhodových řešení bylo možno určit korelační funkci řešení. Tím sice nemáme určenu distribuční funkci přesně, ale známe v tomto případě korelační funkci. V případě, že okrajové podmínky budou Gaussovým stochastickým procesem, bude i náhodové řešení Gaussovým procesem a korelační funkce nám v tomto případě popisuje úplně přesně tento proces.[6]) Podobně vzniká otázka při náhodných pravých stranách rovnice apod. a to jak pro rovnice diferenciální parciální, tak i obyčejné, případně i integrální.

Matematicky zde vzniká řada zajímavých problémů, pokud vím neřešených; jsou to úlohy extremální, úlohy funkcionální apod. Tak např. v teorii lineárních operátorů je podrobně rozpracována teorie Fredholmových rovnic

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\, \varphi = f\,.$$

Je řada důležitých technických problémů, kde $\mathbf{A}$ je náhodový operátor. (Operátor vyjadřující vlastnosti materiálu apod.) Podobných matematických problémů, podle mého mínění problémů základní důležitosti, existuje celá řada, rozhlédneme-li se jen po různých technických a fysikálních problémech a podrobně je rozanalysujeme.

Na závěr bych chtěl zdůraznit svůj názor, že statistické (pravděpodobnostní) pojetí rovnic matematické fysiky je jednou z metod aplikované matematiky, která si zaslouží pozornosti.

[6]) Podrobněji se budu těmito otázkami zabývat ve speciální práci.