Aplikace matematiky

Václav Doležal; Jaroslav Kurzweil

O některých vlastnostech lineárních diferenciálních rovnic

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 3, 163–176

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102659

ČLÁNKY

O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

VÁCLAV DOLEŽAL, JAROSLAV KURZWEIL

(Došlo dne 7. července 1958.) DT: 517.94

Článek je věnován některým vlastnostem řešení lineárních diferenciálních rovnic, jsou-li jejich koeficienty a pravé strany integrovatelné funkce. Zejména je stanoven odhad pro odchylku řešení dvou rovnic, jsou-li si koeficienty a pravé strany obou rovnic blízké v metrice prostoru L; mimo to je ukázáno, jak řešení závisí na primitivní funkci pravé strany.

Použití příslušné teorie je ilustrováno řešením některých technických problémů.

Úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře s některými pro aplikaci důležitými vlastnostmi řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic v případě, kdy o koeficientech a pravých stranách soustavy se nepředpokládá, že jsou spojitými funkcemi nezávisle proměnné.

Uvažujme systém

$$x_i^{\cdot}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, x_k(t) + w_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

s počátečními podmínkami $x_i(0) = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Jak známo, klasické pojetí soustavy (1) požaduje, aby $a_{ik}(t)$, $w_i(t)$, $1 \leqq i$, $k \leqq n$ byly spojitými funkcemi t na nějakém intervalu $\langle 0, T \rangle$. Tento rámec je však poměrně úzký a technická praxe často přináší problémy vedoucí na soustavu (1), kdy některé koeficienty $a_{ik}(t)$ nebo funkce $w_i(t)$ nejsou spojité. V dalším naznačíme, kterak je možno pojetí (1) jednoduše rozšířit na případ, kdy $a_{ik}(t)$, $w_i(t)$ jsou libovolnými integrovatelnými funkcemi.

Aby další úvahy byly přehlednější, zavedeme maticovou symboliku. Přitom budeme matice označovat velkými, vektory malými písmeny.

Zavedeme-li čtvercovou matici n-tého řádu $A(t) = [a_{ik}(t)]$ a vektory $x(t) = [x_i(t)]$, $w(t) = [w_i(t)]$, $c = [c_i]$ téhož řádu, zřejmě můžeme (1) psát ve tvaru

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\, x(t) + w(t)\,, \quad x(0) = c\,. \tag{2}$$

Poněvadž hodláme odvodit různé odhady, bude účelné zavést pojem normy vektoru a normy matice. (Viz na př. [5], str. 50.) Je-li c nějaký vektor, H matice, můžeme normu definovat například vztahy $\|c\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |c_i|$, $\|H\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |h_{ij}|$. Povšimněme si, že je $|h_{ij}| \leqq \|H\|$ pro všechna i, j.

Snadno zjistíme, že pro takto zavedenou normu matice platí $\|H\| = \max\limits_{\|c\| \leqq 1} \|Hc\|$. Odtud ihned vyplývá, že pro libovolné matice M, N téhož řádu platí $\|MN\| \leqq \|M\| \, . \, \|N\|$. Dále lze jednoduše dokázat, že pro normu platí obdobná pravidla, jako pro nerovnosti, např.:

$$\|M + N\| \leqq \|M\| + \|N\| \,, \quad \|Mc\| \leqq \|M\| \, . \, \|c\| \,,$$

$$\|\int_\alpha^\beta x(\tau) \, \mathrm{d}\tau\| \leqq \int_\alpha^\beta \|x(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \,, \quad \|\int_\alpha^\beta M(\tau) \, \mathrm{d}\tau\| \leqq \int_\alpha^\beta \|M(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau \,, \quad (\alpha \leqq \beta)$$

a pod.

Zaveďme ještě tuto terminologii: řekneme, že vektor [matice] $x(t)$, $[A(t)]$, definovaný na $\langle 0, T \rangle$ je integrovatelný, jsou-li jeho prvky měřitelné funkce a konverguje-li (Lebesgueův) integrál $\int_0^T \|x(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau$, $[\int_0^T \|A(\tau)\| \, \mathrm{d}\tau]$.

Řešení rovnice (2) definujme takto: jsou-li $A(t)$, $w(t)$ integrovatelné, nazveme vektor $x(t)$ řešením (2), splňuje-li rovnici

$$x(t) = c + \int_0^t A(\tau) \, x(\tau) \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t w(\tau) \, \mathrm{d}\tau \quad \text{pro } t \in \langle 0, T \rangle \,. \tag{3}$$

Z této definice je vidět, že $x(t)$ je spojitý (dokonce absolutně) vektor. Má tedy $x(t)$ derivaci skoro všude a (2) je rovněž splněna skoro všude. Dá se dokázat (Carathéodoryho věta), že (3) má při libovolném vektoru c vždy jediné řešení. (Viz [1], str. 43.)

Všimněme si při této příležitosti případu, kdy $A(t)$, $w(t)$ jsou spojité v některém bodě $t_0 \in \langle 0, T \rangle$. Zřejmě potom $x(t)$ má v t_0 derivaci a v tomto bodě je splněna rovnice (2). To znamená, že jsou-li $A(t)$, $w(t)$ spojité na nějakém intervalu $\langle T_1, T_2 \rangle \subset \langle 0, T \rangle$, že námi definované řešení je tam totožné s řešením v klasickém pojetí.

Než se budeme zevrubněji zabývat vlastnostmi řešení rovnice (3), povězme si něco bližšího o jednodušší maticové rovnici

$$X^{\cdot}(t) = A(t) \, X(t) \,, \quad X(0) = I \,. \tag{4}$$

(I je jednotková matice.)

Podle definice jejím řešením je matice $X(t)$, splňující rovnici

$$X(t) = I + \int_0^t A(\tau) \, X(\tau) \, \mathrm{d}\tau \,. \tag{5}$$

Lze dokázat (viz [2]), že pro $X(t)$ platí rozvoj

$$X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(t) , \quad A_0(t) = I , \quad A_i(t) = \int_0^t A(\tau) A_{i-1}(\tau) \, d\tau , \quad i = 1, 2, \dots , \tag{6}$$

přičemž pro všechna $t \in \langle 0, T \rangle$ existuje inversní matice $[X(t)]^{-1} = Y(t)$, která je řešením rovnice

$$Y^{\cdot}(t) = - Y(t) A(t) , \quad Y(0) = I . \tag{7}$$

Pomocí matic $X(t)$, $Y(t)$ je pak možno jednoduše vyjádřit řešení rovnice (2). Platí totiž vzorec

$$x(t) = X(t)\{c + \int_0^t Y(\tau) w(\tau) \, d\tau\} . \tag{8}$$

(Důkaz možno provést prostým dosazením do (2).)

Přistupme nyní k prvé otázce, kterou se hodláme zabývat, tj. jak závisí řešení rovnice (2) na c, $A(t)$, $w(t)$ a zejména k odvození příslušného odhadu.

Bude nám užitečné následující

Lemma. *Buďte* $u(t)$, $v(t) \geqq 0$ *v* $\langle 0, T \rangle$ *integrovatelné funkce,* $\varphi(t) > 0$ *neklesající funkce v* $\langle 0, T \rangle$. *Je-li pro každé* $t \in \langle 0, T \rangle$

$$u(t) \leqq \varphi(t) + \int_0^t u(\tau) v(\tau) \, d\tau , \tag{9}$$

pak platí

$$u(t) \leqq \varphi(t) \exp \left(\int_0^t v(\tau) \, d\tau\right) , \quad t \in \langle 0, T \rangle . \tag{10}$$

D ů k a z: Zvolme $t \in \langle 0, T \rangle$. Pak podle (9) zřejmě platí pro každé $\xi \in \langle 0, t \rangle$, že $u(\xi) \leqq \varphi(t) + \int_0^{\xi} u(\sigma) v(\sigma) \, d\sigma$, takže

$$\frac{u(\xi) v(\xi)}{\varphi(t) + \int_0^{\xi} u(\sigma) v(\sigma) \, d\sigma} \leqq v(\xi) . \tag{11}$$

Dále snadno nahlédneme, že funkce $\ln (\varphi(t) + \int_0^{\xi} u(\sigma) v(\sigma) \, d\sigma)$ má v $\langle 0, t \rangle$ derivaci podle ξ skoro všude, která je rovna levé straně (11). Plyne tedy integrací (11) v mezích $0, \xi$

$$\ln (\varphi(t) + \int_0^{\xi} u(\sigma) v(\sigma) \, d\sigma) - \ln \varphi(t) \leqq \int_0^{\xi} v(\sigma) \, d\sigma ,$$

takže

$$u(\xi) \leqq \varphi(t) + \int_0^{\xi} u(\sigma) v(\sigma) \, d\sigma \leqq \varphi(t) \exp \left(\int_0^{\xi} v(\sigma) \, d\sigma\right) ,$$

odkud dosazením $\xi = t$ plyne tvrzení.

Nyní můžeme vyslovit větu:

Věta 1. *Buďte* $A_1(t)$, $A_2(t)$, $w_1(t)$, $w_2(t)$ *integrovatelné na* $\langle 0, T\rangle$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ *řešení rovnic*

$$\dot{x}_1(t) = A_1(t)\, x_1(t) + w_1(t)\,, \quad x_1(0) = c_1\,,$$
$$\dot{x}_2(t) = A_2(t)\, x_2(t) + w_2(t)\,, \quad x_2(0) = c_2\,.$$

Je-li $\alpha_i(t) = \exp\,(\int_0^t \|A_i(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau)$, $\beta_i(t) = \|c_i\| + \int_0^t \|w_i(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau$, $i = 1, 2$, *pak pro* $t \in \langle 0, T\rangle$ *platí*

$$\begin{aligned}\|x_1(t) - x_2(t)\| &\leqq (\|c_1 - c_2\| + \int_0^t \|w_1(\tau) - w_2(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau)\,\alpha_{1,2}(t) + \\ &+ (\int_0^t \|A_1(\tau) - A_2(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau)\,\alpha_1(t)\,\alpha_2(t)\,\beta_{2,1}(t)\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Důkaz: Pro vektory $x_1(t)$, $x_2(t)$ podle definice řešení platí

$$\begin{aligned}x_1(t) - x_2(t) &= c_1 - c_2 + \int_0^t (A_1(\tau)\,x_1(\tau) - A_2(\tau)\,x_2(\tau))\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \int_0^t (w_1(\tau) - w_2(\tau))\,\mathrm{d}\tau = c_1 - c_2 + \int_0^t (w_1(\tau) - w_2(\tau))\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \int_0^t (A_1(\tau) - A_2(\tau))\,x_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t A_1(\tau)\,(x_2(\tau) - x_z(\tau))\,\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

Přejdeme-li v této rovnici k normám a použijeme-li pravidel o normě součtu a integrálu, dostaneme

$$\begin{aligned}\|x_1(t) - x_2(t)\| &\leqq \|c_1 - c_2\| + \int_0^t \|w_1 - w_2\|\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \int_0^t \|A_1 - A_2\|\,.\,\|x_2\|\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \|A_1\|\,.\,\|x_1 - x_2\|\,\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Je zřejmé, že součet prvých tří členů na pravé straně nerovnosti (13) je v $\langle 0, T\rangle$ nezáporná neklesající funkce, takže pomocí lemmatu můžeme psát

$$\begin{aligned}\|x_1(t) - x_2(t)\| &\leqq (\|c_1 - c_2\| + \int_0^t \|w_1 - w_2\|\,\mathrm{d}\tau + \\ &+ \int_0^t \|A_1 - A_2\|\,.\,\|x_2\|\,\mathrm{d}\tau)\exp\,(\int_0^t \|A_1\|\,\mathrm{d}\tau)\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Pro normu $\|x_2\|$ však podle (3) platí

$$\|x_2(t)\| \leqq \|c_2\| + \int_0^t \|w_2\|\mathrm{d}\tau + \int_0^t \|A_2\|\,.\,\|x_2\|\,\mathrm{d}\tau\,,$$

odkud pomocí lemmatu máme

$$\|x_2(t)\| \leqq (\|c_2\| + \int_0^t \|w_2\|\,\mathrm{d}\tau)\exp\,(\int_0^t \|A_2\|\,\mathrm{d}\tau)\,. \tag{15}$$

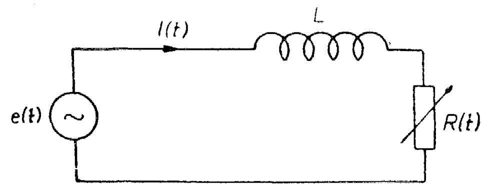
Dále je $\int\limits_0^t \|A_1 - A_2\| \,.\, \|x_2\| \,\mathrm{d}\tau \leqq \max\limits_{\sigma \in \langle 0, t\rangle} \|x_2(\sigma)\| \int\limits_0^t \|A_1 - A_2\| \,\mathrm{d}\tau$, což pomocí (15) dá

$$\int\limits_0^t \|A_1 - A_2\| \,.\, \|x_2\| \,\mathrm{d}\tau \leqq (\|c_2\| + \int\limits_0^t \|w_2\| \,\mathrm{d}\tau) \,.\, \int\limits_0^t \|A_1 - A_2\| \,\mathrm{d}\tau \,.\, \exp\,(\int\limits_0^t \|A_2\| \,\mathrm{d}\tau)\,.$$

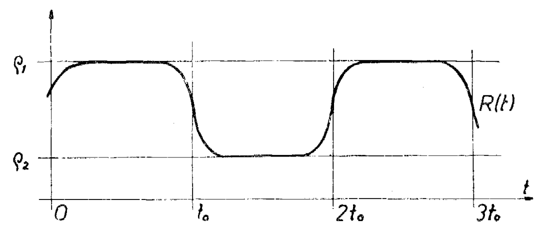
Dosazením do (14) a záměnou indexů 1,2 obdržíme nerovnost (12).

Z právě dokázané věty vyplývá, že je-li $c_n \to c$, $A_n(t) \to A(t)$, $w_n(t) \to w(t)$ v prostoru L[1]), tj. $\int\limits_0^T \|A_n(\tau) - A(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau \to 0$, $\int\limits_0^T \|w_n(\tau) - w(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau \to 0$, konvergují řešení rovnic $x_n^{\cdot}(t) = A_n(t)\, x_n(t) + w_n(t)$, $x_n(0) = c_n$ k řešení rovnice $x^{\cdot}(t) = A(t)\, x(t) + w(t)$, $x(0) = c$ stejnoměrně na $\langle 0, T\rangle$.

Ilustrujme si použití těchto výsledků na jednoduchých příkladech.



Obr. 1.



Obr. 2.

Příklad 1. Naším úkolem je stanovit v časovém intervalu $\langle 0, 2t_0\rangle$ průběh proudu v modulátoru, jehož náhradní schema je na obr. 1. Přitom nechť odpor obvodu $R(t)$ je periodickou funkcí času, která má průběh patrný z obr. 2, a o které víme jen to, jaká je její „odchylka" od funkce $\varrho(t) = \varrho_1 > 0$ pro $t \in \langle 0, t_0\rangle$, $\varrho(t) = \varrho_2 > 0$ pro $t \in (t_0, 2t_0)$, tj. jaká je hodnota integrálu $\varkappa = \int\limits_0^{2t_0} |R(\tau) - \varrho(\tau)| \,\mathrm{d}\tau$.

Modulátor je buzen napětím $e(t) = E \sin \omega t$, počáteční hodnota proudu buď $I(0) = 0$.

Hledaný průběh proudu $I(t)$ je dán řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L} R(t)\, I(t) + \frac{1}{L} e(t)\,, \quad I(0) = 0\,. \tag{16}$$

Jak víme, bude funkce $I(t)$ blízká funkci $K(t)$, která je řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}K(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L} \varrho(t)\, K(t) + \frac{1}{L} e(t)\,, \quad K(0) = 0\,. \tag{17}$$

---

[1]) Prostorem L rozumíme množinu všech na $\langle 0, T\rangle$ integrovatelných vektorů, kde metrika je definována vztahem $\varrho(w_1, w_2) = \int\limits_0^T \|w_1(\tau) - w_2(\tau)\| \,\mathrm{d}\tau$, $w_1, w_2 \in L$. Konvergence $w_n \to w$ v L pak značí, že $\varrho(w_n, w) \to 0$. Podobně prostor C je množina všech na $\langle 0, T\rangle$ spojitých vektorů s metrikou $\varrho(w_1, w_2) = \max\limits_{\tau \in \langle 0, t\rangle} \|w_1(\tau) - w_2(\tau)\|$, $w_1, w_2 \in C$. Konvergence $w_n \to w$ v C pak zřejmě značí, že $w_n \to w$ stejnoměrně na $\langle 0, T\rangle$.

Stačí tedy řešit (17) a určit příslušnou odchylku. K nalezení řešení (17) mohli bychom postupovat podle vzorců (6) a (8), jednodušší však bude využít té okolnosti, že $K(t)$ je všude spojitá a má derivaci ve všech bodech, kde $\varrho(t)$ je spojitá. To znamená, že funkce $K(t)$ je na intervalu $\langle 0, t_0\rangle$ řešením rovnice

$$x^{\cdot}(t) = -\frac{1}{L}\varrho_1 x(t) + \frac{E}{L}\sin\omega t\,, \quad x(0) = 0\,, \tag{18}$$

na intervalu $\langle t_0, 2t_0\rangle$ pak řešením rovnice

$$y^{\cdot}(t) = -\frac{1}{L}\varrho_2 y(t) + \frac{E}{L}\sin\omega t\,, \quad y(t_0) = x(t_0)\,. \tag{19}$$

Známými metodami nalezneme snadno

$$K(t) = \frac{E}{\varrho_1^2 + L^2\omega^2}\{\varrho_1\sin\omega t - \omega L\cos\omega t + \omega L e^{-\frac{\varrho_1}{L}t}\} \quad \text{pro } 0 \leqq t \leqq t_0\,,$$
$$= \frac{E}{\varrho_2^2 + L^2\omega^2}\{\varrho_2\sin\omega t - \omega L\cos\omega t + \alpha e^{-\frac{\varrho_2}{L}t}\} \quad \text{pro } t_0 \leqq t \leqq 2t_0\,,$$

kde

$$\alpha = \frac{e^{\frac{\varrho_2}{L}t_0}}{\varrho_1^2 + \omega^2 L^2}\{(\varrho_1 - \varrho_2)(L^2\omega^2 - \varrho_1\varrho_2)\sin\omega t_0 - L\omega(\varrho_2^2 - \varrho_1^2)\cos\omega t_0 +$$
$$+ L\omega(L^2\omega^2 + \varrho_2^2)\,e^{-\frac{\varrho_1}{L}t_0}\}\,.$$

Zbývá stanovit odchylku funkcí $I(t)$ a $K(t)$ na $\langle 0, 2t_0\rangle$. Klademe-li ve větě 1 $A_1(t) = -\frac{1}{L}R(t)$, $A_2(t) = -\frac{1}{L}\varrho(t)$, $w_1(t) = w_2(t) = \frac{E}{L}\sin\omega t$, $c_1 = c_2 = 0$, nalezneme $\|A_1(t)\| = \frac{1}{L}|R(t)| \leqq \frac{1}{L}(|R(t) - \varrho(t)| + |\varrho(t)|)$, takže $\alpha_1(2t_0) \leqq$ $\leqq \exp\left[\frac{1}{L}\int_0^{2t_0}(|R(\tau) - \varrho(\tau)| + |\varrho(\tau)|)\,d\tau\right] = \exp\frac{1}{L}[\varkappa + t_0(\varrho_1 + \varrho_2)]$. Podobně $\alpha_2(2t_0) = \exp\left(\frac{1}{L}t_0(\varrho_1 + \varrho_2)\right)$. Dále je $\beta_{1,2}(2t_0) = \int_0^{2t_0}\frac{E}{L}|\sin\omega\tau|\,d\tau < \frac{2Et_0}{L}$. Všimneme-li si, že pravá strana nerovnosti (12) je rostoucí funkcí t, můžeme konečně dosazením psát: $|I(t) - K(t)| < \frac{2\varkappa Et_0}{L^2}\exp\left\{\frac{1}{L}[\varkappa + 2t_0(\varrho_1 + \varrho_2)]\right\}$ pro $t \in \langle 0, 2t_0\rangle$.

Příklad 2. Vyšetřování kmitavých obvodů vede často na řešení rovnice

$$\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} + G^2(t)\,\xi(t) = 0\,, \tag{20}$$

kde funkce $G(t)$ je „dosti hladká". Má-li $G(t)$ druhou derivaci, pak podle Brillouin-Wentzel-Kramerovy metody (srv. [3], str. 93) je přibližné řešení (20) dáno vztahem

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \{K_1 \cos \Phi(t) + K_2 \sin \Phi(t)\}, \quad \Phi(t) = \int_0^t G(\tau) \, d\tau . \qquad (21)$$

Naším úkolem bude stanovit chybu, které se dopustíme, když řešení (20) nahradíme na nějakém intervalu $\langle 0, T \rangle$ funkcí $\psi(t)$.

Nechť tedy na $\langle 0, T \rangle$ platí:

a) $G(t) > 0$,

b) existuje $G^{\cdot\cdot}(t)$ a $\left| \frac{G^{\cdot\cdot}(t)}{2G(t)} - \frac{3}{4}\left(\frac{G^{\cdot}(t)}{G(t)}\right)^2 \right| < \varepsilon$, a nechť $\xi(0) = c_1$, $\xi^{\cdot}(0) = c_2$.

Položme $\xi(t) = \xi_1(t)$, $\xi_1^{\cdot}(t) = \eta_1(t)$, $x_1(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \eta_1(t) \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. Pak zřejmě (20) je ekvivalentní rovnici $x_1^{\cdot}(t) = A_1(t)\, x_1(t)$, $x_1(0) = c$, kde $A_1(t) = \begin{bmatrix} 0; & 1 \\ -G^2(t); & 0 \end{bmatrix}$.

Snadno se přesvědčíme, že $\psi(t)$ je řešením rovnice

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \left[G^2(t) + \frac{G^{\cdot\cdot}(t)}{2G(t)} - \frac{3}{4}\left(\frac{G^{\cdot}(t)}{G(t)}\right)^2\right] \psi(t) = 0 . \qquad (22)$$

Uvažujme tedy rovnici $x_2^{\cdot}(t) = A_2(t)\, x_2(t)$, $x_2(0) = c$,

kde

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} 0\,; & 1 \\ -G^2(t) - \frac{G^{\cdot\cdot}(t)}{2G(t)} + \frac{3}{4}\left(\frac{G^{\cdot}(t)}{G(t)}\right)^2; & 0 \end{bmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{bmatrix} \xi_2(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix}.$$

Na základě (21) a (22) lehko vidíme, že jejím řešením je

$$\xi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{G(t)}} \{K_1 \cos \Phi(t) + K_2 \sin \Phi(t)\}\,; \quad \eta_2(t) = \xi_2^{\cdot}(t) =$$
$$= \left\{-\frac{K_1}{2}\, G^{-\frac{3}{2}}\, G^{\cdot} + K_2 G^{\frac{1}{2}}\right\} \cos \Phi(t) - \left\{\frac{K_2}{2}\, G^{-\frac{3}{2}} G^{\cdot} + K_1 G^{\frac{1}{2}}\right\} \sin \Phi(t) ,$$

kde

$$K_1 = \sqrt{G(0)}\, c_1 , \quad K_2 = \frac{1}{2} c_1 \frac{G^{\cdot}(0)}{\sqrt{G(0)^3}} + c_2 \frac{1}{\sqrt{G(0)}} .$$

Stanovme nyní odhad pro $\|x_1(t) - x_2(t)\|$! Zřejmě je $\|A_1\| \leqq 1 + G^2(t)$,

$$\|A_2\| \leqq 1 + \left| -G^2 - \frac{G^{\cdot\cdot}}{2G} + \frac{3}{4}\left(\frac{G^{\cdot}}{G}\right)^2 \right| < 1 + G^2(t) + \varepsilon .$$

Označíme-li $\varphi(t) = \int\limits_0 G^2(\tau)\, d\tau$, bude v symbolice věty 1: $\alpha_1(t) \leqq \exp[t + \varphi(t)]$, $\alpha_2(t) < \exp[(1 + \varepsilon)\, t + \varphi(t)]$. Dále je $\beta_{1,2}(t) = \max[|c_1|, |c_2|]$ a $\|A_1 - A_2\| < \varepsilon$, takže dosazením do (12) máme konečně $\|x_1(t) - x_2(t)\| < \varepsilon t \max[|c_1|, |c_2|]\,.$ $.\exp[(2 + \varepsilon)\, t + 2\varphi(t)]$ pro $t \in \langle 0, T \rangle$. Poněvadž $|\xi_1(t) - \xi_2(t)| \leqq \|x_1(t) - x_2(t)\|$, je tím hledaný odhad stanoven.

Vraťme se nyní opět k rovnici (2) a podívejme se ještě z jiné stránky na to, jak řešení při pevných c, $A(t)$ závisí na $w(t)$. Uvažujme rovnice

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot}(t) &= A(t)\, x_1(t) + w_1(t)\,, \quad x_1(0) = c\,, \\ x_2^{\cdot}(t) &= A(t)\, x_2(t) + w_2(t)\,, \quad x_2(0) = c\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Označíme-li $w_i^{(-1)}(t) = \int\limits_0^t w_i(\tau)\, d\tau$, $i = 1, 2$, můžeme psát $x_1(t) - x_2(t) = \int\limits_0^t A(\tau)(x_1(\tau) - x_2(\tau))\, d\tau + w_1^{(-1)}(t) - w_2^{(-1)}(t)$. Zapíšeme-li tuto rovnici ve tvaru $x_1(t) - x_2(t) - (w_1^{(-1)}(t) - w_2^{(-1)}(t)) = \int\limits_0^t A[x_1 - x_2 - (w_1^{(-1)} - w_2^{(-1)})]\, d\tau + \int\limits_0^t A(w_1^{(-1)} - w_2^{(-1)})\, d\tau$, máme přechodem k normám

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2 - (w_1^{(-1)} - w_2^{(-1)})\| &\leqq \int\limits_0^t \|A\| \,.\, \|w_1^{(-1)} - w_2^{(-1)}\|\, d\tau + \\ &+ \int\limits_0^t \|A\| \,.\, \|x_1 - x_2 - (w_1^{(-1)} - w_2^{(-1)})\|\, d\tau\,. \end{aligned}$$

Pomocí lemmatu plyne odtud

$$\|x_1 - x_2 - (w_1^{(-1)} - w_2^{(-1)})\| \leqq \int\limits_0^t \|A\| \,.\, \|w_1^{(-1)} - w_2^{(-1)}\|\, d\tau \,.\, \exp\left(\int\limits_0^t \|A\|\, d\tau\right). \tag{24}$$

Tato nerovnost ukazuje, že budou-li blízké primitivní funkce $w_i^{(-1)}(t)$ pravých stran $w_i(t)$, $i = 1, 2$ rovnic (23) v metrice prostoru L, pak funkce $x_i(t) - w_i^{(-1)}(t)$, $i = 1, 2$ budou stejnoměrně blízké (tj. v metrice prostoru C).

Dokažme nyní následující větu:

Věta 2. *Nechť $w(t)$, $\tilde{w}(t)$ jsou integrovatelné, $A(t)$ je spojitá na $\langle 0, T \rangle$. Je-li vektor $z(t)$ řešením rovnice*

$$z^{\cdot}(t) = A(t)\, z(t) + A(t)\, \tilde{w}(t)\,, \quad z(0) = c\,,$$

pak pro řešení rovnice

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\, x(t) + w(t)\,, \quad x(0) = c$$

platí $x(t) = w^{(-1)}(t) + z(t) + r(t)$, přičemž

$$\|r(t)\| \leqq \{\alpha(t) \exp(2\int\limits_0^t \|A(\tau)\|\, d\tau)\} \,.\, \int\limits_0^t \|\tilde{w}(\tau) - w^{(-1)}(\tau)\|\, d\tau \tag{25}$$

pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$, kde $\alpha(t) = \max\limits_{\tau \in \langle 0, t \rangle} \|A(\tau)\|$.

Důkaz: Na základě rovnice (8) můžeme psát

$$z(t) = X(t)\{c + \int_0^t Y(\tau)\, A(\tau)\, \tilde{w}(\tau)\, d\tau\}\,, \tag{26}$$

$$x(t) = X(t)\{c + \int_0^t Y(\tau)\, w(\tau)\, d\tau\}\,. \tag{27}$$

Integrujeme-li ve (27) po částech, nalezneme s ohledem na (7):

$$x(t) = X(t)c + w^{(-1)}(t) + X(t) \int_0^t Y(\tau)A(\tau)w^{(-1)}(\tau)\, d\tau\,.$$

To možno pomocí (26) psát $x(t) = w^{(-1)}(t) + z(t) + r(t)$, kde

$$r(t) = X(t)\int_0^t Y(\tau)\, A(\tau)[w^{(-1)}(\tau) - \tilde{w}(\tau)]\, d\tau\,. \tag{28}$$

Z (5) a (7) však na základě lemmatu vyplývá, že je

$$\|X(t)\| \leqq \exp\,(\int_0^t \|A(\tau)\|\, d\tau)\,, \quad \|Y(t)\| \leqq \exp\,(\int_0^t \|A(\tau)\|\, d\tau)\,. \tag{29}$$

Přejdeme-li ve (28) k normě a užijeme-li (29), dostaneme ihned pro $\|r(t)\|$ odhad (25).

Z právě dokázané věty plyne, že když pro posloupnost $w_n(t)$ konverguje posloupnost $w_n^{(-1)}(t)$ k $\tilde{w}(t)$ (v metrice prostoru L), pak posloupnost vektorů $x_n(t) - w_n^{(-1)}(t)$ ($x_n(t)$ je řešení (2) pro $w(t) = w_n(t)$) konverguje k vektoru $z(t)$ stejnoměrně.

Všimněme si nyní toho, co nám věta 2 dovoluje říci o speciálním případu, kdy prvky vektoru $w(t)$ jsou „blízké Diracově funkci".

Nechť tedy $w(t)$ je integrovatelný a existuje číslo ε, $0 < \varepsilon < T$ tak, že $w(t) = 0$ pro $t > \varepsilon$. Označme $\int_0^\varepsilon w(\tau)\, d\tau = h^*$; bude tedy $w^{(-1)}(t) = h^*$ pro $t \geqq \varepsilon$, a klaďme $\tilde{w}(t) = h^*$.

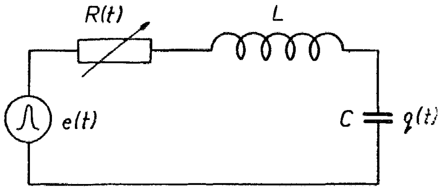
Zde je $z(t) = X(t)\{c + \int_0^t Y(\tau)\, A(\tau)\, d\tau\,.\, h^*\} = X(t)\{c + (Y(0) - Y(t))\, h^*\} = X(t)(c + h^*) - h^*$, takže $x(t) = X(t)(c + h^*) + w^{(-1)}(t) - h^* + r(t)$, $t \in \langle 0, T\rangle$. Označíme-li ještě $\beta = \max_{\tau \in \langle 0, \varepsilon\rangle} \|w^{(-1)}(\tau)\|$, bude $\int_0^t \|\tilde{w}(\tau) - w^{(-1)}(\tau)\|\, d\tau \leqq \varepsilon(\beta + \|h^*\|)$ pro každé $t \geqq 0$. Zejména tedy na intervalu $\langle \varepsilon, T\rangle$ platí

$$\|x(t) - X(t)(c + h^*)\| \leqq \varepsilon\{\alpha(T) \exp\,(2\int_0^T \|A(\tau)\|\, d\tau)\}(\beta + \|h^*\|)\,.$$

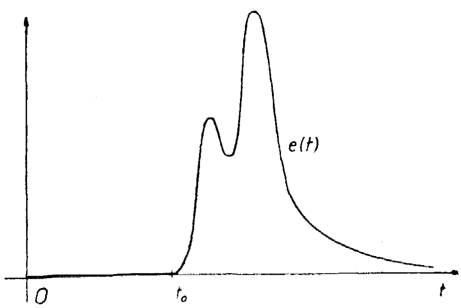
Budeme-li nyní za $w(t)$ pořadě brát vektory, pro které $\varepsilon \to 0$ při pevných h^*, β (což odpovídá „inženýrské" představě o Diracově funkci), budou příslušná řešení $x(t) \to X(t)(c + h^*)$ stejnoměrně na každém intervalu $\langle \delta, T \rangle \subset \subset (0, T\rangle$.

Ilustrujme nyní použití věty 2 na následujícím příkladě:

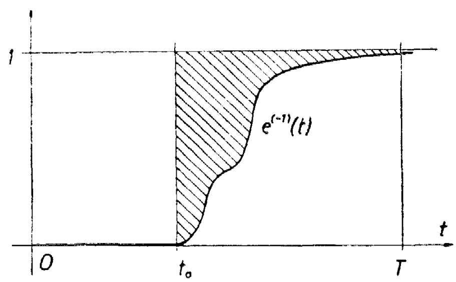
Příklad 3. Při vyšetřování superregenerativního přijímače se ukazuje, že poměry v jeho laděném okruhu jsou tytéž, jako poměry v redukovaném obvodě, který je uveden na obr. 3a. Přitom $e(t)$ značí napětí přivedené z antény, časový průběh odporu $R(t)$ je určen vedlejšími okruhy nezávisle na $e(t)$. Naším úkolem je stanovit chování obvodu, má-li $e(t)$ tvar impulsu o „vydatnosti“ 1, přivedeného v čase $t_0 > 0$ (viz obr. 3b), je-li počáteční stav určen nábojem na kondensátoru q_0 a proudem i_0.



Obr. 3a.



Obr. 3b.



Obr. 3c.

Označíme-li $q(t)$ náboj na kondensátoru, platí rovnice

$$q^{\cdot\cdot}(t) + \frac{R(t)}{L} q^{\cdot}(t) + \frac{1}{LC} q(t) = \frac{1}{L} e(t) , \quad q(0) = q_0, \ q^{\cdot}(0) = i_0 . \tag{30}$$

Nechť $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ jsou řešení rovnice

$$\xi^{\cdot\cdot}(t) + r(t)\, \xi^{\cdot}(t) + \omega^2 \xi(t) = 0 , \quad r(t) = \frac{R(t)}{L} , \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} , \tag{31}$$

splňující počáteční podmínky $\xi_1(0) = 1$, $\xi_1^{\cdot}(0) = 0$; $\xi_2(0) = 0$, $\xi_2^{\cdot}(0) = 1$. (Representují tedy funkce $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ „volné kmity“ obvodu. O tom, kterak lze nalézti $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ pro různé případy $r(t)$, viz [4]).

Označíme-li $x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ q^{\cdot}(t) \end{bmatrix}$, $w(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} e(t) \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} 0; & 1 \\ -\omega^2; & -r(t) \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} q_0 \\ i_0 \end{bmatrix}$, můžeme (30) zapsat ve tvaru $x^{\cdot}(t) = A(t)\, x(t) + w(t)$, $x(0) = c$.

Snadno zjistíme, že řešením rovnice $X^{\cdot}(t) = A(t)\,X(t)$, $X(0) = I$ v našem případě je

$$X(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t);\ \xi_2(t) \\ \xi_1^{\cdot}(t);\ \xi_2^{\cdot}(t) \end{bmatrix}.$$

Položme $\tilde{w}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pro $0 \leqq t \leqq t_0$,

$= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ pro $t > t_0$ a stanovme vektor $z(t)$ podle věty 2: $z(t) =$

$= X(t)\{c + \int_0^t Y(\tau)\,A(\tau)\,\tilde{w}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\}$.

Pro $0 \leqq t \leqq t_0$ máme $z(t) = X(t)\,c = \begin{bmatrix} \xi_1(t)\,q_0 + \xi_2(t)\,i_0 \\ \xi_1^{\cdot}(t)\,q_0 + \xi_2^{\cdot}(t)\,i_0 \end{bmatrix}$.

Pro $t > t_0$ platí $z(t) = X(t)\left\{c + (\int_{t_0}^t Y(\tau)\,A(\tau)\,\mathrm{d}\tau)\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}\right\}$. Poněvadž $Y(t)\,A(t) =$

$= -Y^{\cdot}(t)$, je $z(t) = X(t)\,c + X(t)(Y(t_0) - Y(t))\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} = X(t)\left(c + Y(t_0)\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}\right) -$

$- \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$.

Dosadíme-li sem za $Y = [X]^{-1}$, nalezneme snadným výpočtem

$$z(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t)\left(q_0 - \dfrac{\xi_2(t_0)}{L\Delta}\right) + \xi_2(t)\left(i_0 + \dfrac{\xi_1(t_0)}{L\Delta}\right) \\ \xi_1^{\cdot}(t)\left(q_0 - \dfrac{\xi_2(t_0)}{L\Delta}\right) + \xi_2^{\cdot}(t)\left(i_0 + \dfrac{\xi_1(t_0)}{L\Delta}\right) - \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad \text{kde}$$

$\Delta = \xi_1(t_0)\,\xi_2^{\cdot}(t_0) - \xi_2(t_0)\,\xi_1^{\cdot}(t_0)$. Podle věty 2 bude vektor $x(t)$ stejnoměrně

blízký vektoru $z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{bmatrix}$, takže také hledané řešení $q(t)$ bude

blízké funkci $\xi_1(t)\,q_0 + \xi_2(t)\,i_0$ na $\langle 0, t_0\rangle$

funkci $$\xi_1(t)\left(q_0 - \frac{\xi_2(t_0)}{L\Delta}\right) + \xi_2(t)\left(i_0 + \frac{\xi_1(t_0)}{L\Delta}\right)$$

pro $t > t_0$.

Jak ukazuje odhad podle věty 2, bude při pevně zvoleném T odchylka na intervalu $\langle 0, T\rangle$ úměrná integrálu $\int^{T}\|\tilde{w}(\tau) - w^{(-1)}(\tau)\| \, d\tau$, tj. v našem případě $\frac{1}{L}$ -krát (šrafovaná plocha z obr. 3c).

Na závěr připojme ještě poznámku o zobecnění věty 2. Je-li $w(t)$ integrovatelný vektor, definujme indukcí vektory $w^{(-k)}(t) = \int_0^t w^{(-k+1)}(\tau) \, d\tau$, $k = 1, 2, \ldots$, $w^{(0)}(t) = w(t)$. Má-li nyní matice $A(t)$ na $\langle 0, T\rangle$ dostatečný počet derivací a konverguje-li pro nějaké k posloupnost $w_n^{(-k)}(t) \to \tilde{w}(t)$ v metrice prostoru L, pak lze snadno dokázat, že posloupnost $x_n^{(-k+1)}(t) - w_n^{(-k)}(t)$ ($x_n(t)$ je řešení rovnice $\dot{x}_n(t) = A(t)\, x_n(t) + w_n(t)$, $x_n(0) = c$) konverguje stejnoměrně na $\langle 0, T\rangle$. To je výsledek, ke kterému lze dojít jinou cestou pomocí teorie distribucí.

Literatura

[1] *Coddington E. A., Levinson N.*: Theory of Ordinary Differential Equations, Mc Graw Hill, N. Y. 1955.

[2] *Sansone G.*: Equazioni differenziali nel campo reale, Bologna 1948; nebo: *Сансоне Дж.*: Обыкновенные дифференциальные уравнения, том. I., Изд. иност. р. лит., Москва 1953.

[3] *Pipes L. A.*: Analysis of Linear Time-Varying Circuits by the Brillouin-Wentzel-Kramers Method, Trans. AIEE 1954.

[4] *Erdélyi A.*: Zur Theorie des Pendelrückkopplers, Arch. der Physik **23**, 21 (1935).

[5] *Faddiejewa W. N.*: Metody numeryczne algebry liniowej, Panstwowe wyd. naukowe, Warszawa 1955.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ, ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛ (Václav Doležal, Jaroslav Kurzweil)

(Поступило в редакцию 7/VII 1958 г.)

В статье рассматриваются линейные дифференциальные уравнения, коэффициенты которых в отличие от классического понятия являются произвольными интегрируемыми (в смысле Лебега) функциями.

Доказывается теорема, что для (векторных) решений $x_i(t)$ уравнений $x_i^{\cdot}(t) = A_i(t)\,x_i(t) + w_i(t)$, $x_i(0) = c_i$, $i = 1, 2$ справедлива оценка

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqq (\|c_1 - c_2\| + \int_0^t \|w_1 - w_2\|\,\mathrm{d}\tau)\,\alpha_{1,2}(t) +$$
$$+ (\int_0^t \|A_1 - A_2\|\,\mathrm{d}\tau)\,\alpha_1(t)\,\alpha_2(t)\,\beta_{2,1}(t)\,,$$

причем $\alpha_i(t) = \exp\,(\int_0^t \|A_i\|\,\mathrm{d}\tau)$, $\beta_i(t) = \|c_i\| + \int_0^t \|w_i\|\,\mathrm{d}\tau$.

Далее доказана теорема о том, как зависит решение от правой части уравнения, в предположении, что коэффициенты суть непрерывные функции; если векторы $x(t)$, $z(t)$ являются решениями

$$z^{\cdot}(t) = A(t)\,z(t) + A(t)\,\tilde{w}(t)\,, \quad z(0) = c\,,$$

соотв.

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + w(t)\,, \quad x(0) = c\,,$$

то имеет место равенство $x(t) = w^{(-1)}(t) + z(t) + r(t)$, где для $r(t)$ верна оценка

$$\|r(t)\| \leqq \max_{\sigma \in \langle 0, t\rangle} \|A(\sigma)\|\,.\,(\exp 2\int_0^t \|A\|\,\mathrm{d}\tau)\,.\,\int_0^t \|\tilde{w} - w^{(-1)}\|\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Применение этих теорем показано на примере исследования явлений в модуляторе, на определении точности приближенного решения уравнения $\xi^{\cdot\cdot}(t) + G^2(t)\,\xi(t) = 0$ и окончательно на примере суперрегенеративного приемника, который находится под действием импульса напряжения.

В заключение авторы занимаются обобщением последней теоремы, т. е. зависимостью решения от k-той примитивной функции вектора $w(t)$.

Summary

ON CERTAIN PROPERTIES OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Václav Doležal, Jaroslav Kurzweil

(Received July 7th 1958.)

Linear differential equations whose coefficients and right-hand sides are merely Lebesgue-integrable are the main objects of this article.

It is first shown that the solutions $x_i(t)$ of the two systems

$$x_i^{\cdot}(t) = A_i(t)\,x_i(t) + w_i(t)\,, \quad x_i(0) = c_i$$

(x_i, w_i, c_i vectors, A_i matrices; $i = 1, 2$) satisfy

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqq (\|c_1 - c_2\| + \int_0^t \|w_1 - w_2\| \,\mathrm{d}\tau)\, \alpha_{1,2}(t) + \\ + (\int_0^t \|A_1 - A_2\| \,\mathrm{d}\tau)\, \alpha_1(t)\, \alpha_2(t)\, \beta_{2,1}(t)\,,$$

where

$$\alpha_i(t) = \exp \int_0^t \|A_i\| \,\mathrm{d}\tau\,, \quad \beta_i(t) = \|c_i\| + \int_0^t \|w_i\| \,\mathrm{d}\tau\,.$$

A second theorem treats the dependence of solutions on the right-hand sides if the coefficients are continuous. Namely, that the vector-solutions of

$$z^{\cdot}(t) = A(t)\, z(t) + A(t)\tilde{w}(t)\,, \quad z(0) = c\,,$$
$$x(t) = A(t)x(t) + w(t)\,, \quad x(0) = c\,,$$

are connected by $x(t) = w^{(-1)}(t) + z(t) + r(t)$, where

$$\|r(t)\| \leqq \max_{\sigma \in \langle 0, t\rangle} \|A(\sigma)\| \,.\, (\exp 2\int_0^t \|A\| \,\mathrm{d}\tau) \,.\, \int_0^t \|\tilde{w} - w^{(-1)}\| \,\mathrm{d}\tau$$

($w^{(-1)}(t) = \int_0^t w \,\mathrm{d}\tau$).

These theorems are applied to the examination of a modulator, to the error estimation of approximate solution of the equation of $\xi^{\cdot\cdot}(t) + G^2(t)\,.\,\xi(t) = 0$, and to a superregenerative receiver to which a voltage impulse is applied.

Finally a generalisation of the second theorem is indicated; viz., the dependence of a solution on the k-th primitive of $w(t)$.