Aplikace matematiky

R. A. Muller

O užití pravděpodobnostních metod pro určení vlivu absolutních rozměrů na únosnost konstruktivních prvků

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 2, 134–141

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102653`

O UŽITÍ PRAVDĚPODOBNOSTNÍCH METOD PRO URČENÍ VLIVU ABSOLUTNÍCH ROZMĚRŮ NA ÚNOSNOST KONSTRUKTIVNÍCH PRVKŮ

Diskusní příspěvek

R. A. Muller

Jak víme, užívá se pro stanovení pevnostních charakteristik hmot v současných výpočtech hodnot získaných laboratorními zkouškami zkušebních těles z těchto hmot. Přitom se ve většině případů mlčky předpokládá, že pevnost hmoty v konstrukci se shoduje s pevností zkušebních těles, nebo jinými slovy, že všude platí až do porušení tak zvaný zákon podobnosti.

Ve skutečnosti tomu však tak zdaleka není. Již dávno bylo zjištěno, že u některých hmot a při některých silových účincích závisí pevnost značně na rozměrech zkušebních těles. To bylo pozorováno při dynamických zkouškách, na příklad při ohybu rázem nebo při rázové zkoušce v tahu. Bylo zjištěno, že velká zkušební tělesa jsou křehčí a že se vzrůstem průměru zkušebních těles se zvyšují jejich křehké vlastnosti [1]. Ještě dříve byl tento účinek pozorován při zkoušce kovů v únavě. N. N. Afanasjevem byla vypracována statistická teorie pevnosti v únavě, která umožňuje přihlédnout k tomuto účinku při stanovení meze únavy [2]. Vliv rozměrů se projevil i při statických zkouškách, na příklad při zkouškách ohybem a tahem fosfornatého železa, které je křehké při nízkých teplotách [3].

Experimentálně bylo zjištěno, že rozměrový činitel se projevuje tím více, čím více je hmota náchylná ke křehkému porušení, tj. když porušení hmoty nastává při dosti malých přetvořeních a před porušením se nemohou namáhání v tělese podstatně přeskupit a rozložit.

Rozměrový účinek se nepochybně velmi silně projevuje v stavebních konstrukcích. Porušení betonových, železobetonových, cihelných a vyztužených cihelných konstrukcí se ve většině případů může pokládat za křehké. Za křehké můžeme také považovat porušení dřevěných prvků při usmyknutí a tahu. Projevem rozměrového účinku je též zvýšení meze pevnosti v ohybu a mimostředném tlaku při křehkém porušení, neboť je přitom napjata jen nepatrná část objemu hmoty ve srovnání s objemem působícím při dostředném tlaku. Tento zjev je znám jako vznik zvětšujícího účinku krajního napětí při mimostředném tlaku cihelných sloupů a zvýšení meze pevnosti v ohybu a mimostředném tlaku železobetonových prvků. Jak víme, nenastává tento zjev u plastické oceli. Tento případ vlivu rozměrového účinku hraje velmi značnou roli ve výpočtech únosnosti stavebních konstrukcí.

Čím je možno fysikálně objasnit vliv rozměrového činitele?

Již dávno byla obrácena pozornost výzkumníků na ohromný vliv, který mají vady (defekty) struktury na pevnost hmot — práce akademika A. F. IOFFEHO [4], teorie GRIFFITHOVA [5].

V nynější době platí obecný názor, že technická pevnost závisí v první řadě na strukturálních zvláštnostech hmoty a ne na mezimolekulárních silách vzájemného působení. Ty určují tak zvanou teoretickou pevnost, která je mnohokrát větší než technická pevnost hmot.

Ve všech pevných, krystalických a amorfních hmotách jsou trhliny, nestejnorodosti a jiné vady, které charakterisují strukturální zvláštnosti skutečných hmot.

V závislosti na tvaru, velikosti a orientaci, vedou tyto trhliny k vzniku menších nebo větších místních napětí, která mohou mnohokrát překročit střední napětí v hmotě. Takovým způsobem musí v struktuře hmoty vzniknout mechanicky oslabená místa snižující mechanickou pevnost.

Čím větší jsou rozměry prvků, tím větší je pravděpodobnost výskytu různých poruch a vad struktury a pravděpodobnost výskytu části prvku se sníženou pevností, která rozhoduje při křehkém porušení o pevnosti prvku jako celku a vlivem toho je také tím menší střední hodnota pevnosti.

Názor o statistické povaze rozměrového účinku vyslovili nejdříve sovětští vědci ALEKSANDROV a ŽURKOV [6]. V roce 1939 uveřejnil statistickou teorii křehké pevnosti WEIBULL [7]. Weibullova teorie je vybudována na předpokladu, že pravděpodobnost křehkého porušení zkušebního tělesa při napětí σ se dá vyjádřit ve tvaru $\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m$, kde m a σ_0 jsou mechanické konstanty zkušebního tělesa. Pro stanovení konstant m a σ_0 je nutno provést zkoušku s řadami zkušebních těles alespoň dvojí velikosti. Weibull ve své práci předpokládal, že se změnou rozměrů zkušebního tělesa se mění jen střední pevnost a její proměnlivost zůstává stálá.

Skoro současně s Weibullem, ale nezávisle na něm, předložili statistickou teorii křehké pevnosti sovětští vědci T. A. KONTOROVA a J. I. FRENKEL [8]. Teorie Kontorové a Frenkelova je fysikálně více podložena. Velký význam má práce Kontorové a TIMOŠENKOVA, kde se dokazuje, že při ohybu a kroucení se musí rozměrový účinek řídit tímtéž zákonem jako při prostém tahu [9].

Obtížnost použití statistické teorie křehké pevnosti Kontorové a Frenkelovy pro určení vlivu změny absolutních rozměrů je způsobena tím, že se autoři teorie snažili za každou cenu o získání přímého analytického výrazu pro závislost křehké pevnosti na rozměrech zkušebního tělesa, čímž velmi zvýšili složitost celé teorie.

Jak víme, vychází statistická teorie křehké pevnosti ze základního předpokladu, že křehká pevnost celého zkušebního tělesa jako celku je dána „nejslabším místem".

Protože při zvětšení objemu zkušebního tělesa se zvýší pravděpodobnost výskytu nebezpečné vady struktury, je zřejmé, že se zvětšením objemu se musí střední pevnost zmenšovat. Spolu s tím se zmenšuje i poměrný rozptyl hodnot křehké pevnosti.

Rozdělme těleso na n stejných částí, které jsou z hlediska stavu napětí v stejnorodých podmínkách a nechť je pravděpodobnost porušení každé z těchto částic P_0. Pravděpodobnost porušení celého tělesa označíme P.

Potom pravděpodobnost porušení celého tělesa je pravděpodobností porušení aspoň jednoho z dílčích těles

$$P = 1 - (1 - P_0)^n \,. \tag{1}$$

Veličina $1 - P$ se obvykle nazývá bezpečností, v našem případě bezpečností proti porušení

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - P \,, \\ \xi_0 &= 1 - P_0 \,. \end{aligned} \tag{2}$$

Vzorec (1) dostane tvar

$$\xi = \xi_0^n \,. \tag{3}$$

Zde je ξ — bezpečnost proti porušení celého tělesa jako celku, ξ_0 — bezpečnost proti porušení dílčího tělesa.

Položíme-li objem každé z n částic rovný jedné, dává již vzorec (3) možnost kvantitativně odpovědět na otázky, které nás zajímají.

Nechť je známa křivka rozložení křehké pevnosti zkušebního tělesa při některé určité velikosti (jako výsledek zkoušek serie zkušebních těles dané velikosti), $p = p_0(z)$ je zjištěná hustota rozložení pravděpodobnosti, $P = P_0(z)$ je příslušná distribuční funkce, $\xi_0(z)$ je křivka bezpečnosti vůči porušení pro zkušební těleso dané velikosti, z je křehká pevnost zkušebního tělesa, m_0 je střední pevnost zkušebního tělesa dané velikosti.

Potom podle vzorce (3) máme možnost určit křivku rozložení křehké pevnosti pro těleso libovolné jiné velikosti, to znamená, že máme možnost určit střední pevnost, variační koeficient a jiné parametry.

Protože je pevnost tělesa jasně kladnou veličinou, nemůže být teoreticky křivka rozložení křivkou Gaussovou, přisuzující i záporným hodnotám pevnosti jakousi pravděpodobnost. Je však možno prokázat, že při malých hodnotách variačního koeficientu se výsledky, určené za předpokladu, že křivka rozložení pevnosti pro zkoumané velikosti zkušebních těles bude křivkou Gaussovou, skoro neliší od výsledků určených podle jiných křivek rozložení, na příklad podle Pearsonovy křivky III. druhu [10]. Jinými slovy, vliv nesouměrnosti křivky rozložení na rozměrový účinek při malých hodnotách variačního koeficientu a dosti malých změnách velikostí zkušebních těles je nepatrný.

Střední nebo očekávaná hodnota náhodné veličiny řídící se Gaussovým zákonem má integrální pravděpodobnost i střední bezpečnost rovnou padesáti procentům. Dosadíme-li do (3) $\xi = 0{,}5$, dostaneme

$$\xi_0 = (0{,}5)^{\frac{1}{n}} . \tag{4}$$

Jinak řečeno, jestliže křivka bezpečnosti jednotkového obrazce je ξ_0, má střední hodnota křehké pevnosti tělesa o objemu n podle této křivky bezpečnost $\xi_0 = (0{,}5)^{\frac{1}{n}}$.

Máme-li podle experimentálních údajů křivku bezpečnosti ξ_0, tj. závislost $\xi_0 = \xi_0(z)$ na křehké pevnosti zkušebního tělesa, najdeme snadno takovou hodnotu pevnosti $\bar{z} = m$, jejíž bezpečnost bude $(0{,}5)^{\frac{1}{n}}$. Tato hodnota m bude také střední pevností tělesa o objemu n.

Protože křivka P_0 a po případě $\xi_0 = 1 - P_0$ je v případě Gaussova zákona určena jen jedním parametrem — proměnlivostí (variačním koeficientem C_v), je pro snazší vyčíslení účelné vyjádřit Gaussovu integrální křivku ne pro jednotkovou směrodatnou odchylku, ani pro střední hodnotu rovnou nule, jak to bývá uvedeno ve všech tabulkách Gaussových funkcí, ale pro střední hodnotu rovnou jedné a v závislosti na proměnné variabilitě a bezpečnosti, nebo, což je totéž, na rozměrovém součiniteli n. Potom po stanovení ξ_0 podle vzorce (4) v závislosti na veličině n v tomto případě dostáváme v tabulce Gaussovy křivky, jak je snadno vidět, poměr střední pevnosti tělesa o objemu n k střední pevnosti jednotkového tělesa $\frac{m}{m_0}$.

Zbývá určit novou proměnlivost pevnosti tělesa s objemem n. Je-li C_v variační koeficient pevnosti jednotkového tělesa a C_v variační koeficient pevnosti tělesa s objemem n, platí, jak již bylo uvedeno, tyto nerovnosti:

$$C_v < C_{v_0} \quad \text{pro} \quad n > 1 ,$$
$$C_v > C_{v_0} \quad \text{pro} \quad n < 1 .$$

Veličinu C_v dostaneme z téže tabulky obráceným postupem.

Vybereme z tabulky sloupec, odpovídající novému variačnímu koeficientu C_v tak, abychom dostali změnu střední hodnoty pevnosti v poměru $\frac{m_0}{m}$, jestliže

ξ-příslušná bezpečnost	n-rozměrový součinitel	Variační												
		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12	0,13
0,99999	71430	0,956	0,913	0,869	0,826	0,781	0,738	0,695	0,652	0,608	0,562	0,518	0,476	0,432
0,9999	7143	0,963	0,926	0,889	0,852	0,814	0,778	0,741	0,704	0,657	0,628	0,591	0,556	0,519
0,9997	2326	0,966	0,932	0,898	0,864	0,828	0,796	0,762	0,728	0,694	0,657	0,623	0,592	0,558
0,9995	1389	0,967	0,934	0,901	0,868	0,835	0,802	0,769	0,736	0,703	0,670	0,637	0,604	0,571
0,999	714,3	0,969	0,938	0,907	0,876	0,846	0,814	0,783	0,752	0,721	0,791	0,660	0,628	0,597
0,997	233	0,972	0,945	0,918	0,890	0,862	0,836	0,809	0,780	0,753	0,725	0,698	0,672	0,645
0,995	139	0,974	0,948	0,922	0,896	0,872	0,844	0,818	0,792	0,766	0,743	0,717	0,688	0,664
0,99	71,4	0,977	0,954	0,931	0,908	0,884	0,862	0,839	0,816	0,793	0,768	0,745	0,724	0,701
0,97	23,3	0,981	0,962	0,943	0,924	0,906	0,886	0,867	0,848	0,829	0,812	0,793	0,772	0,753
0,95	13,9	0,984	0,968	0,952	0,936	0,918	0,904	0,888	0,872	0,856	0,835	0,820	0,808	0,792
0,90	6,58	0,987	0,974	0,961	0,948	0,936	0,922	0,909	0,896	0,883	0,871	0,859	0,844	0,831
0,80	3,10	0,992	0,984	0,976	0,968	0,958	0,952	0,944	0,936	0,928	0,916	0,908	0,904	0,896
0,70	1,94	0,995	0,990	0,985	0,980	0,974	0,970	0,965	0,960	0,955	0,947	0,943	0,940	0,935
0,60	1,36	0,997	0,995	0,993	0,990	0,987	0,986	0,984	0,980	0,978	0,974	0,972	0,972	0,970
0,50	1	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,40	0,757	1,0025	1,005	1,007	1,010	1,013	1,014	1,016	1,020	1,022	1,025	1,028	1,028	1,030
0,30	0,575	1,0050	1,01	1,015	1,020	1,026	1,030	1,035	1,040	1,045	1,052	1,057	1,060	1,065
0,25	0,5	1,007	1,014	1,021	1,028	1,034	1,042	1,049	1,056	1,063	1,067	1,074	1,084	1,091
0,20	0,431	1,008	1,016	1,024	1,032	1,042	1,048	1,056	1,064	1,072	1,084	1,092	1,096	1,104
0,10	0,332	1,013	1,026	1,039	1,052	1,064	1,078	1,091	1,104	1,117	1,128	1,141	1,156	1,169
0,05	0,23	1,016	1,032	1,048	1,064	1,082	1,096	1,112	1,128	1,144	1,164	1,180	1,192	1,208
0,03	0,198	1,019	1,038	1,057	1,076	1,094	1,114	1,133	1,152	1,171	1,188	1,207	1,228	1,247
0,01	0,15	1,023	1,046	1,069	1,092	1,116	1,138	1,161	1,184	1,207	1,230	1,255	1,276	1,299
0,005	0,131	1,026	1,052	1,078	1,104	1,128	1,156	1,182	1,208	1,234	1,257	1,283	1,312	1,338
0,003	0,12	1,027	1,054	1,081	1,108	1,135	1,162	1,189	1,216	1,243	1,270	1,302	1,328	1,355
0,001	0,1	1,031	1,062	1,093	1,124	1,154	1,186	1,217	1,248	1,279	1,309	1,340	1,372	1,403
0,0005	0,091	1,033	1,066	1,099	1,132	1,165	1,198	1,231	1,264	1,297	1,330	1,363	1,396	1,429
0,0003	0,085	1,034	1,068	1,102	1,136	1,171	1,204	1,238	1,272	1,306	1,343	1,317	1,408	1,442
0,0001	0,015	1,037	1,074	1,111	1,148	1,186	1,222	1,259	1,296	1,343	1,372	1,409	1,444	1,481
0,00001	0,060	1,044	1,087	1,031	1,174	1,219	1,262	1,306	1,348	1,392	1,438	1,482	1,524	1,568

postupujeme podle vzorce (4) obráceně od tělesa s objemem n k tělesu o objemu rovném jedné.

Objasníme vyložený postup na číselném příkladě:

Nechť byla experimentálně určena křivka rozložení křehké pevnosti tělesa určité velikosti.

Střední pevnost m_0; variační koeficient pevnosti $C_{v_0} = 10\ \%$.

a) Určíme křivku rozložení křehké pevnosti pro tělesa, jejichž objem je desetkrát menší.

koeficient														
0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,0
0,388	0,344	0,304	0,260	0,216	0,172	0,124	—	—	—	—	—	—	—	—
0,482	0,445	0,408	0,371	0,314	0,277	0,256	—	—	—	—	—	—	—	—
0,524	0,490	0,456	0,422	0,388	0,354	0,314	—	—	—	—	—	—	—	—
0,538	0,505	0,472	0,439	0,406	0,373	0,340	0,010	—	—	—	—	—	—	—
0,566	0,535	0,504	0,473	0,442	0,411	0,382	0,073	—	—	—	—	—	—	—
0,618	0,591	0,560	0,533	0,506	0,479	0,450	0,175	—	—	—	—	—	—	—
0,636	0,610	0,584	0,558	0,532	0,506	0,486	0,229	—	—	—	—	—	—	—
0,678	0,655	0,632	0,609	0,586	0,563	0,536	0,304	0,072	—	—	—	—	—	—
0,734	0,715	0,696	0,677	0,658	0,639	0,624	0,436	0,248	0,060	—	—	—	—	—
0,776	0,760	0,744	0,728	0,712	0,696	0,671	0,506	0,342	0,177	0,012	—	—	—	—
0,818	0,805	0,792	0,779	0,766	0,753	0,744	0,615	0,488	0,359	0,230	0,101	—	—	—
0,888	0,880	0,872	0,864	0,856	0,848	0,832	0,748	0,664	0,580	0,497	0,423	0,329	0,245	0,160
0,930	0,925	0,920	0,915	0,910	0,905	0,895	0,842	0,789	0,736	0,683	0,630	0,576	0,523	0,470
0,968	0,966	0,960	0,958	0,956	0,954	0,949	0,923	0,898	0,872	0,846	0,820	0,794	0,768	0,742
1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,032	1,034	1,040	1,042	1,044	1,046	1,0506	1,076	1,102	1,126	1,152	1,177	1,204	1,229	1,256
1,070	1,075	1,080	1,085	1,090	1,095	1,105	1,157	1,210	1,262	1,314	1,366	1,420	1,472	1,524
1,098	1,105	1,112	1,119	1,126	1,133	1,135	1,202	1,270	1,337	1,404	1,467	1,540	1,607	1,675
1,112	1,120	1,128	1,136	1,144	1,152	1,168	1,252	1,336	1,421	1,504	1,576	1,672	1,756	1,840
1,182	1,195	1,208	1,221	1,234	1,247	1,256	1,384	1,512	1,641	1,768	1,896	2,024	2,152	2,282
1,224	1,240	1,256	1,272	1,288	1,304	1,329	1,494	1,658	1,822	1,968	1,132	2,316	2,480	2,645
1,266	1,285	1,304	1,323	1,342	1,361	1,376	1,564	1,752	1,940	2,128	2,316	2,504	2,692	2,881
1,322	1,345	1,368	1,391	1,414	1,437	1,464	1,696	1,928	2,163	2,392	2,624	2,856	3,088	3,327
1,364	1,390	1 416	1,442	1,468	1,494	1,514	1,771	2,028	2,287	2,542	2,799	3,056	3,313	3,574
1,382	1,409	1,440	1,467	1,494	1,521	1,550	1,825	2,100	2,375	2,650	2,925	3,200	3,475	3,750
1,434	1,465	1,496	1,527	1,558	1,589	1,618	1,927	2,236	2,545	2,854	3,163	3,472	3,781	4,090
1,462	1,495	1,528	1,561	1,594	1,627	1,660	1,990	2,320	2,650	2,980	3,310	3,640	3,970	4,300
1,476	1,510	1,544	1,578	1,612	1,646	1,686	2,029	2,372	2,715	3,058	3,401	3,742	4,085	4,430
1,518	1,555	1,592	1,529	1,686	1,723	1,744	2,116	2,488	2,860	3,232	3,604	3,976	4,348	4,720
1,612	1,656	1,696	1,740	1,784	1,828	1,876	2,314	2,752	3,190	3,628	4,066	4,504	4,942	5,380

Podle vzorce (4)

$$\xi_0 = (0,5)^{\frac{1}{0,1}} = 0,001 .$$

Z tabulky vyplývá nová střední hodnota pevnosti $m_1 = 1,31 m_0$.

Dále vyhledáme takový variační koeficient C_{v_1}, aby při přechodu od druhé skupiny těles k první (tj. při $n = 10$) se měnila střední pevnost v poměru

$$\frac{1,0}{1,31} = 0,76 .$$

Přitom $\xi_0 = (0{,}5)^{\frac{1}{10}} = 0{,}933.$

Z tabulky najdeme (interpolací mezi 0,90 a 0,95) nový variační koeficient $C_{v_1} = 16\ \%$.

Takovým způsobem dostaneme křivku rozložení pevnosti těles, jejichž objem je desetkrát menší

$$m_1 = 1{,}31 m_0\,,$$
$$C_{v_1} = 16\ \%\,.$$

b) Najdeme křivku rozložení křehké pevnosti pro tělesa, jejichž objem je desetkrát větší. V tomto případě dostaneme:

$$n = 10\,, \quad \xi_0 = (0{,}5)^{\frac{1}{10}} = 0{,}933\,,$$
$$m_2 = 0{,}86 m_0\,.$$

Vyhledáme takový variační koeficient, aby při přechodu od druhé skupiny k první (tj. při $n = 0{,}1$) se měnila střední pevnost v poměru

$$\frac{1{,}0}{0{,}86} = 1{,}17\,.$$

Potom $\xi_0 = (0{,}5)^{\frac{1}{0{,}1}} = 0{,}001.$

Z tabulky určíme

$$C_{v_2} = 5{,}5\ \%\,.$$

Takovým způsobem dostáváme křivku rozložení pevnosti těles, jejichž objem je desetkrát větší

$$m_2 = 0{,}86 m_0\,,$$
$$C_{v_2} = 5{,}5\ \%\,.$$

Bude-li tedy určena křivka rozložení křehké pevnosti pro libovolnou velikost tělesa, jehož objem se bude pokládat za jednotku, stačí to úplně nejen pro určení změny střední hodnoty křehké pevnosti v závislosti na velikosti tělesa, ale také pro kvantitativní posouzení změny variačního koeficientu této pevnosti.

Poznamenávám, že podle Weibulla je třeba mít výsledky zkoušek alespoň pro dvě skupiny těles různých velikostí a přitom se určuje jen změna střední pevnosti.

Upozorňuji, že se dá snadno určit nutný počet těles pro spolehlivé určení pevnosti při zkouškách těles daných rozměrů. Tato úloha se dá snadno řešit, zvolíme-li určitou požadovanou přesnost při určování pevnosti. Víme-li předem, že variační koeficient pevnosti těles daných rozměrů bude C_v, pak podle tak zvané teorie malého výběru dostaneme podle tabulky Studentovy přímo nutný počet těles pro určení střední pevnosti s určitou spolehlivostí v závislosti na C_v.

V pevnostních výpočtech nás však zajímá ne střední pevnost, ale výpočtová, tj. dolní hranice pevnosti, určená se známou pravděpodobností. Tak jako máme možnost přibližně určit proměnnost pevnosti tělesa dané velikosti, můžeme též stanovit i změnu intervalu pevnosti. Přitom se dá snadno dokázat, že změna rozměrů tělesa má v první řadě vliv na horní hranici intervalu pevnosti.

Uvedené metody může být užito i pro řešení jiných úloh, na příklad určení vlivu nestejnorodého stavu napětí na křehkou pevnost prvků.

Literatura

[1] *Н. Н. Давиденков:* Проблема удара в металловедении, ИАН СССР 1941.

[2] *И. И. Афанасьев:* Статистическая теория усталостной прочности металлов, Журнал технической физики 1940, вып. XIX.

[3] *Е. И. Шевандин, Г. С. Маневич:* Эффект масштаба при хрупком разрушении стали, Журнал технической физики 1946, вып. XI.

[4] *А. Д. Иоффе:* Физика кристаллов, Госиздат 1929.

[5] *A. Griffith:* Phil. Trans. Roy. Soc. (A) 1921, 163, 221.

[6] *А. П. Александров, С. Н. Журков:* Явление хрупкого разрыва, Гостехтеориздат 1934.

[7] *Weibull:* A Statistical Theory of the Strength of Materials, Stockholm 1939.

[8] *Т. А. Конторова, Я. И. Френкель:* Журнал технической физики 1941, вып. XI, 137.

[9] *Т. А. Конторова, О. А. Тимошенко:* Журнал технической физики 1949, вып. XIX, 3.

[10] *Р. А. Муллер:* Эффект масштаба в расчетах прочности от строительных конструкций, Сборник ,,Исследования по строительной механике'', ЦНИПС, Москва 1954 (под редакцией проф. А. Р. Ржаницына).