Václav Fabian

Některé modifikace intervalového odhadu a volba počtu pozorování ve speciálním případě binomické náhodné proměnné

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 1, 35–52

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102644`

NĚKTERÉ MODIFIKACE INTERVALOVÉHO ODHADU A VOLBA POČTU POZOROVÁNÍ VE SPECIÁLNÍM PŘÍPADĚ BINOMICKÉ NÁHODNÉ PROMĚNNÉ

VÁCLAV FABIAN

DT: 519.262.2

(Došlo dne 3. května 1958.)

Jsou uvedeny vlastnosti některých modifikací intervalového odhadu a tabulky umožňující volbu rozsahu výběru při řešení některých problémů, týkajících se neznámé pravděpodobnosti $p = P(A)$ daného jevu A. Přesné hodnoty jsou porovnány s výsledky určenými na základě normální a arcsinové aproximace.

1. SHRNUTÍ

Nechť je $\nu_{n,p}$ relativní četnost jevu A (jehož pravděpodobnost je p) v n nezávislých pokusech. Buďte $m_{n,p,r}$ a $M_{n,p,r}$ náhodné proměnné tvořící obvyklý intervalový odhad (spolehlivosti $1-2r$) parametru p, sestrojený na základě pozorování náhodné proměnné $\nu_{n,p}$, a nechť je pro každé $p \in \langle 0,1\rangle$

$$P(m_{n,p,r} > p) \leqq r\,, \quad P(M_{n,p,r} < p) \leqq r\,. \tag{1.1}$$

(Intervalový odhad $(m_{n,p,r}, M_{n,p,r})$ pokryje správnou hodnotu p s pravděpodobností $1-2r$.)

V tabulce 1 (v tabulce 1a pro $r = 0{,}05$, v tabulce 1b pro $r = 0{,}01$) je pro různá $p_1 < p_2$ udáno nejmenší přirozené číslo n, k němuž existuje necelé k s touto vlastností: Je-li $\nu_{n,p} < k$, je $M_{n,p,r} \leqq p_2$, je-li $\nu_{n,p} > k$, je $m_{n,p,r} \geqq p_1$. Připojena jsou též příslušná k.

Interval $(m_{n,p,r}, M_{n,p,r})$ tedy nikdy neobsahuje interval $\langle p_1, p_2\rangle$, takže z tvrzení $p \in (m_{n,p,r}, M_{n,p,r})$ plyne vždy buď tvrzení $p > p_1$ (je-li $\nu_{n,p} > k$) nebo tvrzení $p < p_2$ (je-li $\nu_{n,p} < k$).

Jsou-li tedy n a k čísla udaná tabulkou 1 a přijmeme-li rozhodnutí $p > p_1$, je-li $\nu_n > k$, a rozhodnutí $p < p_2$, je-li $\nu_n < k$, pak z předchozího odstavce plyne, že pravděpodobnost nesprávného rozhodnutí bude (pro všechna $p \in (0,1)$) menší nebo rovna číslu $2r$; ukážeme však (§ 2), že je menší nebo rovna číslu r.

V tabulce 2 (v tabulce 2a pro $r = 0{,}05$, v tabulce 2b pro $r = 0{,}01$) jsou pro různá k a n udána čísla c_1, c_2, l_1, l_2 s touto vlastností: Je-li $\nu_{n,p} < c_1$, je $M_{n,p,r} \leqq$

$\leqq k$; je-li $\nu_{n,p} > c_2$, je $m_{n,p,r} \geqq k$. V ostatních případech je $k \in (m_{n,p,r}, M_{n,p,r}) \subset$ $\subset (l_1, l_2)$.

Z tvrzení $p \in (m_{n,p,r}, M_{n,p,r})$ tedy plyne buď $p < k$ (je-li $\nu_{n,p} < c_1$) nebo $p > k$ (je-li $\nu_{n,p} > c_2$) nebo $p \in (l_1, l_2)$ (je-li $c_1 \leqq \nu_{n,p} \leqq c_2$). V praxi bude užitečné umět zvolit n tak, aby poslední z uvedených tvrzení mělo — z hlediska uvažované konkrétní situace — smysl: p je přibližně rovno číslu k.

Seslabíme-li jedno z tvrzení $p < k$, $p > k$ (pro určitost mluvme nadále o tvrzení $p < k$) použitím tupé nerovnosti (což bude účelné zejména tehdy, když případ $p = k$ můžeme předem vyloučit, nebo když z praktických důvodů tvrzení $p < k$ a tvrzení $p \leqq k$ mají stejný význam) a vybereme-li tedy rozhodnutí $p \leqq k$, je-li $\nu_{n,p} < c_1$, rozhodnutí $p > k$, je-li $\nu_{n,p} > c_2$, a rozhodnutí $p \in (m_{n,p,r}, M_{n,p,r})$, je-li $c_1 \leqq \nu_{n,p} \leqq c_2$ (víme, že $(m_{n,p,r}, M_{n,p,r}) \subset (l_1, l_2)$), pak plyne z vlastnosti čísel c_1, c_2, že pravděpodobnost nesprávného rozhodnutí je menší nebo rovna číslu $2r$. Lze však ukázat (viz § 2), že je menší nebo rovna číslu r.

Tabulka 1.

Hodnoty n (celé číslo) a k (necelé) pro různá p_1, p_2, r. Intervalový odhad (spolehlivosti $1-2r$) (m_n, M_n) neznámé pravděpodobnosti p určený z n nezávislých pokusů má tyto vlastnosti:
1. $m_n \geqq p_1$ nebo $M_n \leqq p_2$ podle toho, zda napozorovaná četnost ν_n je větší nebo menší než k.
2. Metoda, která přijímá rozhodnutí $p > p_1$, je-li $\nu_n > k$ a rozhodnutí $p < p_2$ je-li $\nu_n < k$, vybírá správné rozhodnutí s pravděpodobností větší nebo rovnou číslu $1 - r$.

1 a $r = 0,05$

p_2								
0,2	135 19,5							
0,3	41 7,5	208 51,5						
0,4	24 5,5	60 17,5	248 86,5					
0,5	13 3,5	28 9,5	67 26,5	268 120,5				
0,6	8 2,5	17 6,5	28 12,5	67 33,5	268 147,5			
0,7	7 2,5	10 4,5	15 7,5	28 15,5	67 40,5	248 161,5		
0,8	6 2,5	7 3,5	10 5,5	17 10,5	28 18,5	60 42,5	208 156,5	
0,9	3 1,5	6 3,5	7 4,5	8 5,5	13 9,5	24 18,5	41 33,5	135 115,5
p_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

1 b $r = 0{,}01$

p_2								
0,2	272 39,5							
0,3	83 15,5	398 98,5						
0,4	42 9,5	111 32,5	495 172,5					
0,5	25 6,5	52 17,5	130 51,5	535 240,5				
0,6	18 5,5	30 11,5	59 26,5	133 66,5	535 294,5			
0,7	12 4,5	20 8,5	31 15,5	59 32,5	130 78,5	495 322,5		
0,8	9 3,5	13 6,5	20 11,5	30 18,5	52 34,5	111 78,5	398 299,5	
0,9	5 2,5	9 5,5	12 7,5	18 12,5	25 18,5	42 32,5	83 67,5	272 232,5
p_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

V tabulce 3 je provedeno srovnání čísel n z tabulky 1 se dvěma aproximacemi těchto hodnot, normální a arcsinovou. V tabulce 4 jsou údány arcsinové aproximace čísel $[n, k]$ z tabulky 1, v tabulce 5 jsou udány arcsinové aproximace čísel l_1, l_2 z tabulky 2.

V § 2 uvádíme vlastnosti některých metod, které lze obecně odvodit z intervalového odhadu. V § 3 popisujeme konstrukci tabulek 1 a 2; § 4 je věnován normální, § 5 arcsinové aproximaci.

2. INTERVALOVÝ ODHAD A JEHO MODIFIKACE

V předchozím § jsme uvedli některé vlastnosti metod, které vzniknou, vzdáme-li se části informace, již nám poskytuje intervalový odhad. Pochopitelně metoda, která takto vznikne, vybere nesprávné rozhodnutí s pravděpodobností menší nebo rovnou pravděpodobnosti, se kterou tak učiní intervalový odhad. Podstatné je, že někdy můžeme říci, že pravděpodobnost nesprávného rozhodnutí je pro odvozenou metodu menší než pro původní intervalový odhad — příkladem může být např. jednostranný odhad vzniklý z oboustranného. Dvou dalších modifikací, které mohou být velmi důležité, si nyní podrobněji všimneme.

Buď (m_p, M_p) intervalový odhad neznámého parametru $p \in \mathfrak{M} \subset (-\infty, +\infty)$; přesněji řečeno pro každé $p \in \mathfrak{M}$ buďte m_p, M_p náhodné proměnné splňující vztahy

$$P(p < M_p) \geqq 1 - r\,, \tag{2.1}$$

$$P(m_p < p) \geqq 1 - r\,. \tag{2.2}$$

Pro každé $p \in \mathfrak{M}$ nechť je dále ν_p taková náhodná proměnná, že jev

$$\{m_p \leqq \nu_p \leqq M_p\} \tag{2.3}$$

Tabulka 2.

Hodnoty c_1, c_2, l_1, l_2 pro různá n a k. Intervalový odhad (spolehlivosti $1-2r$) (m_n, M_n) neznámé pravděpodobnosti $p = P(A)$, určený na základě pozorování četnosti ν_n jevu A v n nezávislých pokusech, má tyto vlastnosti:

1) $M_n \leqq k$ pro $\nu_n < c_1$; $m_n \geqq k$ pro $\nu_n > c_2$; $(m_n, M_n) \subset (l_1, l_2)$ v ostatních případech.

2) Metoda, která přijímá rozhodnutí $p > k$, je-li $\nu_n > c_2$; $p \leqq k$, je-li $\nu_n < c_1$; $p \in (m_n, M_n)$ v ostatních případech, vybírá správné rozhodnutí s pravděpodobností větší nebo rovnou číslu $1 - r$.

2 a $\qquad r = 0{,}05$

n	$k = 0{,}1$				$k = 0{,}2$			
	c_1	c_2	l_1	l_2	c_1	c_2	l_1	l_2
10	0	3	0_	0,607	0	4	0_	0,697
20	0	4	0_	0,401	1	7	0,003	0,558
30	1	6	0,002	0,357	3	10	0,028	0,500
40	1	7	0,001	0,304	4	12	0,035	0,440
50	2	9	0,007	0,293	6	15	0,054	0,424
60	2	10	0,006	0,266	7	17	0,056	0,394
70	3	11	0,012	0,247	9	20	0,069	0,388
80	4	13	0,017	0,246	10	22	0,069	0,369
90	5	14	0,022	0,232	12	24	0,078	0,354
100	6	15	0,020	0,221	14	27	0,086	0,353
200	13	27	0,043	0,181	31	49	0,114	0,300
500	39	61	0,059	0,149	85	115	0,143	0,263
1000	85	116	0,071	0,134	179	221	0,159	0,244

n	$k = 0{,}3$				$k = 0{,}4$				$k = 0{,}5$			
	c_1	c_2	l_1	l_2	c_1	c_2	l_1	l_2	c_1	c_2	l_1	l_2
10	1	7	0,005	0,778	2	7	0,037	0,913	2	8	0,037	0,963
20	3	9	0,042	0,653	4	12	0,071	0,983	6	14	0,140	0,860
30	5	13	0,068	0,598	8	16	0,140	0,692	11	19	0,221	0,779
40	7	17	0,085	0,567	11	21	0,162	0,662	15	25	0,247	0,753
50	10	20	0,113	0,526	14	26	0,178	0,643	19	31	0,265	0,735
60	12	24	0,120	0,515	18	30	0,204	0,613	24	36	0,293	0,707
70	15	27	0,137	0,491	21	35	0,211	0,604	28	42	0,301	0,699
80	17	31	0,140	0,485	25	39	0,228	0,585	33	47	0,319	0,681
90	20	34	0,152	0,470	28	44	0,231	0,580	37	53	0,324	0,676
100	23	38	0,162	0,467	32	48	0,243	0,567	42	58	0,336	0,664
200	49	71	0,196	0,414	69	91	0,289	0,516	88	112	0,381	0,619
500	113	167	0,234	0,370	182	218	0,328	0,474	232	268	0,426	0,574
1000	276	324	0,253	0,349	375	426	0,350	0,452	472	526	0,448	0,552

2 b $r = 0{,}01$

n	$k = 0{,}1$				$k = 0{,}2$			
	c_1	c_2	l_1	l_2	c_1	c_2	l_1	l_2
10	0	4	0_	0,782	0	5	0_	0,950
20	0	6	0_	0,583	0	8	0_	0,677
30	0	7	0_	0,457	1	11	0,000	0,594
40	0	9	0_	0,414	3	14	0,011	0,546
50	1	10	0,000	0,363	4	17	0,017	0,514
60	1	12	0,000	0,346	5	20	0,022	0,490
70	2	13	0,002	0,318	7	22	0,034	0,458
80	2	15	0,002	0,310	8	25	0,037	0,446
90	3	16	0,005	0,290	10	27	0,047	0,425
100	4	18	0,008	0,286	11	30	0,049	0,418
200	11	30	0,024	0,218	27	54	0,084	0,350
500	35	66	0,046	0,171	80	121	0,124	0,290
1000	79	123	0,060	0,149	171	230	0,144	0,262

n	$k = 0{,}3$				$k = 0{,}4$				$k = 0{,}5$			
	c_1	c_2	l_1	l_2	c_1	c_2	l_1	l_2	c_1	c_2	l_1	l_2
10	0	7	0_	0,952	1	8	0,001	0,984	1	9	0,001	0,999
20	2	11	0,008	0,800	3	13	0,023	0,871	5	15	0,069	0,931
30	4	15	0,028	0,716	6	18	0,063	0,799	9	21	0,127	0,873
40	6	19	0,047	0,665	9	23	0,093	0,754	13	27	0,166	0,834
50	8	23	0,061	0,631	12	28	0,115	0,722	17	33	0,193	0,807
60	10	26	0,072	0,590	15	33	0,132	0,700	21	39	0,213	0,787
70	12	30	0,081	0,575	19	38	0,156	0,682	25	45	0,228	0,772
80	15	34	0,097	0,561	22	42	0,167	0,657	30	50	0,252	0,748
90	17	37	0,103	0,539	25	47	0,175	0,647	34	56	0,261	0,739
100	20	41	0,116	0,531	29	52	0,190	0,638	38	62	0,269	0,731
200	45	75	0,160	0,459	64	96	0,245	0,564	84	116	0,339	0,661
500	126	174	0,208	0,400	175	226	0,301	0,505	224	276	0,396	0,604
1000	267	334	0,235	0,370	364	436	0,329	0,473	463	537	0,426	0,574

je jistý. Budiž nyní k pevně zvolené číslo a položme

$$V_{1,p} = \begin{cases} (m_p, +\infty) \cup \langle k, +\infty) & \text{pro } r_p \geqq k , \\ (-\infty, M_p) \cup (-\infty, k) & \text{pro } r_p < k , \end{cases} \tag{2.4}$$

$$V_{2,p} = \begin{cases} (-\infty, k\rangle & \text{pro } M_p \leqq k , \\ (k, +\infty) & \text{pro } k \leqq m_p , \\ (m_p, M_p) & \text{pro } m_p < k < M_p . \end{cases} \tag{2.5}$$

Pro obě $i = 1, 2$ je $\{V_{i,p} \supset (m_p, M_p)\}$ jistý jev a tedy

$$P(p \in V_{i,p}) \geqq P(p \in (m_p, M_p)) \geqq 1 - 2r$$

(poslední rovnost plyne z (2.1) až (2.3)); tento odhad pravděpodobnosti lze však podstatně zlepšit.

Tabulka 3.

Porovnání hodnot n z tabulky 1 s jejich aproximacemi n_N (normální) a n_A (arcsinovou).

p_3				$r = 0,05$				
0,2	135 133 135	n n_N n_A						
0,3	41 39 41	208 200 202						
0,4	24 19 21	60 54 56	248 244 246					
0,5	13 11 13	28 25 27	67 63 64	268 266 267				
0,6	8 7 9	17 14 16	28 28 29	67 65 67	268 266 267			
0,7	7 5 7	10 8 10	15 15 16	28 28 29	67 63 64	248 244 246		
0,8	6 3 5	7 5 7	10 8 10	17 14 16	28 25 27	60 54 56	208 200 202	
0,9	3 2 4	6 3 5	7 5 7	8 7 9	13 11 13	24 19 21	41 39 41	135 133 135
p_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

Věta. *Pro každé $p \in \mathfrak{M}$ a $i = 1, 2$ je*

$$P(p \in V_{i,p}) \geqq 1 - r\,. \tag{2.6}$$

Důkaz:

1. $i = 1$. Je-li $p < k$, je

$$\{p \in V_{1,p}\} \supset [\{\nu_p \geqq k\} \cap \{m_p < p\}] \cup \{\nu_p < k\} \supset \{m_p < p\}\,;$$

je-li $p \geqq k$ je

$$\{p \in V_{1,p}\} \supset \{\nu_p \geqq k\} \cup [\{\nu_p < k\} \cap \{M_p > p\}] \supseteq \{M_p > p\}\,.$$

V obou případech plyne z (2.2) resp. (2.1) tvrzení věty pro $i = 1$.

2. $i = 2$. Je-li $p \leqq k$, je

$$\begin{aligned}\{p \in V_{2,p}\} &= \{M_p \leqq k\} \cup [\{m_p < k < M_p\} \cap \{m_p < p < M_p\}] = \\ &= \{M_p \leqq k\} \cup [\{M_p > k\} \cap \{m_p < k\} \cap \{m_p < p\} \cap \{M_p > p\}] = \\ &= \{M_p \leqq k\} \cup [\{M_p > k\} \cap \{m_p < p\}] \supset \{m_p < p\}\,;\end{aligned}$$

je-li tedy $p \leqq k$, je podle (2.2) $P(p \in V_{2,p}) \geqq 1 - r$.

Je-li $p > k$, je podobně

$$\{p \in V_{2,p}\} = \{m_p \geqq k\} \cup [\{m_p < k < M_p\} \cap \{m_p < p < M_p\}] =$$
$$= \{m_p \geqq k\} \cup [\{m_p < k\} \cap \{M_p > p\}] \supset \{M_p > p\},$$

a tedy opět

$$P\{p \in V_{2,p}\} \geqq 1 - r .$$

Platí tedy tvrzení (2.4) i pro $i = 2$ a důkaz věty je skončen.

Obě metody, přijímající rozhodnutí $p \in V_{i,p}$, mohou být užitečné zejména při porovnávání neznámého parametru p s nějakým daným číslem k. V této situaci je zatím značně rozšířeno takové použití testu významnosti, při kterém je rozsah výběru volen bez zřetele k mohutnosti testu a při kterém se buď odmítne hypothesa $p = k$ (není-li $k \in (m_p, M_p)$) nebo se tato hypothesa neodmítne. Tento postup není příliš vhodný, potřebujeme-li vědět, zda je p větší či menší než k, či zda jsou obě čísla (přibližně) stejná. Když totiž interpretujeme neodmítnutí hypothesy $p = k$ jako přibližné její splnění, aniž bychom předtím vhodně zvolili rozsah výběru, můžeme se dopustit značného omylu s nezanedbatelnou pravděpodobností. Jestliže při neodmítnutí hypothesy $p = k$ provádíme další experimenty, abychom získali positivnější rozhodnutí, provádíme sekvenční postup, jehož vlastnosti mohou být značně vzdáleny těm, které má původní nesekvenční metoda (viz např. [1]).

Z estetických důvodů by bylo příjemné použít metody, která by vybírala jedno ze tří vzájemně se vylučujících tvrzení $p < k$, $p = k$, $p > k$. Bohužel ve většině případů (např. je-li p neznámá pravděpodobnost daného jevu nebo neznámá očekávaná hodnota normální náhodné proměnné) neexistuje metoda, která by vybírala jedno z těchto tří tvrzení a pro kterou by pravděpodobnost nesprávného tvrzení byla menší nebo rovna danému číslu $r < 1$.

Situace se změní, považujeme-li za nemožné přesné splnění rovnosti $p = k$; pak již obvykle lze sekvenční metodou rozhodnout (s pravděpodobností nesprávného rozhodnutí menší nebo rovnou předem danému číslu $0 < r < 1$) zda je $p < k$ či $p > k$. (Pro p neznámou pravděpodobnost a $k = \frac{1}{2}$ udal autor takovou metodu v [3].) Pro p blízké číslu k je však vybrání jednoho z obou rozhodnutí obvykle velmi obtížné a požadovaný rozsah experimentu může být tak velký, že z praktických důvodů nelze experiment dokončit.

V mnoha praktických situacích[1]) můžeme však určit takový interval indiference (p_1, p_2), že chybné přijetí jednoho z rozhodnutí $p < k$ a $p > k$ je nepodstatné, jakmile je $p \in (p_1, p_2)$. (To je postup, používaný Waldem [9].) V takovém případě řeší položenou otázku metoda, vybírající jedno z rozhodnutí $p < p_2$, $p > p_1$. Jestliže intervalový odhad (m_p, M_p) je takový, že $M_p \leqq p_2$ pro $\nu_p < k$ a $m_p \geqq p_1$ pro $\nu_p \geqq k$, je $V_{1,p} \subset (-\infty, p_2)$ resp. $V_{1,p} \subset (p_1, +\infty)$ podle toho, zda $\nu_p < k$ nebo $\nu_p \geqq k$. Metoda, jejíž tvrzení jsou $p \in V_{1,p}$, umož-

[1]) Např. při přejímce dodávky, kde $100p$ je procento zmetků.

ňuje v tomto případě vybrat jedno z obou tvrzení $p < p_2$, $p > p_1$; přitom pravděpodobnost nesprávného tvrzení je pro tuto metodu menší nebo rovna r, ať je $p \in \mathfrak{M}$ jakékoliv.

Příklad 1. Je-li p neznámá očekávaná hodnota normální náhodné proměnné s neznámým rozptylem, a jsou-li $p_1 < p_2$ dvě daná čísla, lze pomocí STEINOVA postupu [7] a dvojstupňového experimentu konstruovat náhodnou proměnnou v_p takovou, že jsou splněny podmínky (2.1) a (2.2), položíme-li $m_p = v_p - \Delta$, $M_p = v_p + \Delta$, $\Delta = \frac{1}{2}(p_2 - p_1)$. Položíme-li $k = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, je $V_{1,p} \subset (p_1, +\infty)$ pro $v_p \geqq k$ a $V_{1,p} \subset (-\infty, +p_2)$ pro $v_p < k$.

V některých případech může být uvedené převedení původního problému na otázku, zda p je větší než p_1 či menší než p_2, nevhodné, a je třeba rozhodnout, zda je $p > k$, nebo zda je $p < k$, anebo konečně zda p je přibližně rovno číslu k. Znamená-li poslední tvrzení vztah $p \in (l_1, l_2)$, vybíráme jedno ze tří tvrzení: $p < k$, $p > k$, $p \in (l_1, l_2)$. To je možné na příklad intervalovým odhadem (m_p, M_p), jestliže je $(m_p, M_p) \subset (l_1, l_2)$ jakmile $k \in (m_p, M_p)$. Jestliže navíc můžeme seslabit tvrzení $p < k$ na tvrzení $p \leqq k$, pak je vždy jedno ze tří tvrzení $p \leqq k$, $p > k$, $p \in (l_1, l_2)$ důsledkem tvrzení $p \in V_{2,p}$, které, jak plyne z dokázané věty, je správné s pravděpodobností aspoň $1 - r$ (zatím co o tvrzení $p \in (m_p, M_p)$ víme pouze, že je správné s pravděpodobností větší nebo rovnou $1 - 2r$).

Příklad 2. Mají-li p, v_p, m_p, M_p stejný význam jako v příkladu 1, avšak je-li $\Delta = \frac{1}{4}(l_2 - l_1)$ a $k = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, je

$$V_{2,p} = \begin{cases} (-\infty, k\rangle & \text{pro } v_p \leqq k - \Delta \\ (k, +\infty) & \text{pro } v_p \geqq k + \Delta \\ (v_p - \Delta, v_p + \Delta) \subset (l_1, l_2) & \text{pro } v_p \in (k - \Delta, k + \Delta)\,. \end{cases}$$

Poznámka. Je-li $(l_1, l_2) = (p_1, p_2)$, jsou tvrzení $p \in V_{2,p}$ metody uvažované v příkladu pochopitelně silnější, než tvrzení $p \in V_{1,p}$ metody z příkladu 1. Jsou-li však obě metody založeny na témže experimentu, pak je v obou příkladech Δ stejné a tedy délka intervalu $(l_1, l_2) = (k - 2\Delta, k + 2\Delta)$ je dvojnásobkem délky intervalu $(p_1, p_2) = (k - \Delta, k + \Delta)$. Analogický je vztah mezi oběma metodami i při odhadu jiných parametrů než očekávané hodnoty normální náhodné proměnné.

3. BINOMICKÁ NÁHODNÁ PROMĚNNÁ

V tomto § se budeme zabývat analogickými úvahami jako v příkladech 1, 2, avšak s tím rozdílem, že parametr bude neznámou pravděpodobností. Odhady této neznámé pravděpodobnosti $p = P(A)$ založíme na binomické náhodné proměnné $v_{n,p}$ udávající četnost jevu A v n nezávislých experimentech. Po teoretické stránce je uvažování binomické náhodné proměnné snadnější než práce s normální náhodnou proměnnou, avšak při praktické konstrukci metody s požadovanými vlastnostmi bývá poměr obtížnosti obrácený.

Položíme-li

$$m_{n,r}(x) = \sup \{p; P(\nu_{n,p} \geqq x) \leqq r\} , \tag{3.1}$$

$$M_{n,r}(x) = \inf \{p; P(\nu_{n,p} \leqq x) \leqq r\} \tag{3.2}$$

a klademe-li $m_{n,p,r} = m_{n,p}(\nu_{n,p})$, $M_{n,p,r} = M_{n,r}(\nu_{n,p})$, dostaneme obvyklý intervalový odhad $({}_n m_{p,r}, M_{n,p,r})$ splňující podmínku (1.1) pro všechna $p \in (0,1)$, ale nikoliv pro $p = 0$ a $p = 1$. Zvolíme-li libovolné číslo $\varepsilon > 0$, píšeme-li $1 + \varepsilon = 1_+$, $-\varepsilon = 0_-$ a pozměníme-li definici náhodných proměnných tak, že klademe

$$\begin{aligned} m_{n,p,r} &= m_{n,r}(\nu_{n,p}) \quad \text{pro } \nu_{n,p} > 0 , \\ m_{n,p,r} &= 0_- \quad \text{pro } \nu_{n,p} = 0 , \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} M_{n,p,r} &= M_{n,r}(\nu_{n,p}) \quad \text{pro } \nu_{n,p} < m , \\ M_{n,p,r} &= 1_+ \quad \text{pro } \nu_{n,p} = n , \end{aligned} \tag{3.4}$$

je podmínka (1.1) splněna již pro všechna $p \in \langle 0,1 \rangle$. Je patrné, že z tvrzení $p \in (m_{n,p,r}, M_{n,p,r})$ plyne tvrzení $p \in (m_{n,p,r}, M_{n,p,r}) \cap \langle 0,1 \rangle =$

$$= \begin{cases} (m_{n,p,r}, M_{n,p,r}) & \text{pro } 0 \neq \nu_{n,p} \neq n , \\ (m_{n,p,r}, 1\rangle & \text{pro } \nu_{n,p} = 1 , \\ \langle 0, M_{n,p,r}) & \text{pro } \nu_{n,p} = 0 . \end{cases}$$

K o n s t r u k c e t a b u l k y 1. Hledáme přirozené n, k němuž existuje necelé k tak, že $M_{n,p,r} \leqq p_2$ pro $\nu_{n,p} < k$ a $m_{n,p,r} \geqq p_1$ pro $\nu_{n,p} > k$, pro daná $0 < p_1 < p_2 < 1$.

Položíme-li pak $m_p = m_{p,n,r}$, $M_p = M_{p,n,r}$, je vždy buď $V_{1,p} \subset (-\infty, p_2)$ nebo $V_{1,p} \subset (p_1, +\infty)$ a n je nejmenší přirozené číslo s touto vlastností.

Bez újmy obecnosti můžeme zvolit k tak, aby $2k$ bylo celé. Podmínka $M_{n,p,r} \leqq p_2$ pro $\nu_{n,p} < k$ bude splněna tehdy a jen tehdy, bude-li $M_{n,p,r} \leqq p_2$ pro $\nu_{n,p} = k - 0{,}5$; podmínka $m_{n,p,r} \geqq p_1$ pro $\nu_{n,p} > k$ bude splněna tehdy a jen tehdy, bude-li $m_{n,p,r} \geqq p_1$ pro $\nu_{n,p} = k + 0{,}5$.

Lze tedy obě podmínky vyjádřit vztahy

$$p_2 \geqq \inf \{p; P(\nu_{n,p} \leqq k - 0{,}5) \leqq r\} , \tag{3.5}$$

$$p_1 \leqq \sup \{p; P(\nu_{n,p} \geqq k + 0{,}5) \leqq r\} \tag{3.6}$$

nebo také vztahy

$$P(\nu_{n,p_2} \leqq k - 0{,}5) \leqq r , \tag{3.7}$$

$$P(\nu_{n,p_1} \geqq k + 0{,}5) \leqq r . \tag{3.8}$$

Tabulka 4.

Arcsinové aproximace n_A a k_A hodnot n a k z tabulky 1.

4 a $r = 0{,}05$

p_2								
0,2	135 19,78							
0,3	41 7,79	202 50,20						
0,4	21 4,88	56 16,52	246 85,98					
0,5	13 3,59	27 9,23	64 25,44	267 120,02				
0,6	9 2,90	16 6,24	29 12,99	67 33,50	267 146,98			
0,7	7 2,61	10 4,42	16 8,00	29 16,01	64 38,56	246 160,02		
0,8	5 2,14	7 3,50	10 5,58	16 9,76	27 17,77	56 39,48	202 151,80	
0,9	4 2,00	5 2,86	7 4,39	9 6,10	13 9,41	21 16,12	41 33,21	135 115,22
p_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

K verifikaci, zda pro daná n, k jsou splněny vztahy (3.5), (3.6) resp. (3.7), (3.8) bylo použito tabulek PEARSONOVÝCH [5] (pro $n \leqq 10$), CLARKOVÝCH [2] (pro $10 \leqq n \leqq 50$) a kvantilů F-rozložení z tabulek HALDOVÝCH [4] (pro $n \geqq 50$). Použití procentilů F-rozložení bylo možné proto, že podmínky (3.5), (3.6) jsou ekvivalentní podmínkám

$$n \geqq k - 0{,}5 + \frac{1 - p_2}{p_2} (k + 0{,}5)\, F(f_2, f_1, r)\,, \tag{3.9}$$

$$n \leqq k - 0{,}5 + \frac{1 - p_1}{p_1} (k + 0{,}5)\, F(f_1, f_2, r)\,, \tag{3.10}$$

kde $f_1 = 2(n - (k - 0{,}5))$, $f_2 = 2(k + 0{,}5)$ a $F(f_1, f_2, r)$ je horní r-procentní bod F-rozložení s f_1, f_2 stupni volnosti.

Při vyhledávání minimálního n se osvědčil postup, při kterém se vyšlo od aproximací získaného k a k tomu se určila množina $N_{1,k}$ resp. $N_{2,k}$ přirozených čísel n, pro která byla splněna podmínka (3.5) resp. (3.6) s tímto k. Pak bylo vybráno k takové pro které $N_{1,k} \cap N_{2,k}$ byla neprázdná množina a pro které $n = n_k = \inf N_{1,k} \cap N_{2,k}$ bylo nejmenší.

4 b $r = 0{,}01$

p_2								
0,2	269 39,41							
0,3	82 15,58	403 100,15						
0,4	42 9,76	111 32,74	491 171,60					
0,5	26 7,19	53 18,10	128 50,88	534 240,03				
0,6	17 5,48	31 12,11	58 25,98	134 67,00	534 293,97			
0,7	13 4,84	20 8,84	32 16,00	58 32,02	128 77,12	491 319,40		
0,8	9 3,87	14 7,00	20 11,16	31 18,89	53 34,90	111 78,26	403 302,85	
0,9	7 3,50	9 5,13	13 8,16	17 11,52	26 18,81	42 32,24	82 66,42	269 229,59
p_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8

Konstrukce tabulky 2. Tabulka udává (pro daná n, $0 < k < 1$, r) čísla c_1, c_2, l_1, l_2 s těmito vlastnostmi: c_1 je největší celé číslo takové, že je $M_{n,p,r} \leqq k$ pro $\nu_{n,p} < c_1$; c_2 je nejmenší celé číslo takové, že je $m_{n,p,r} \geqq k$ pro $\nu_{n,p} > c_2$. V ostatních případech je $(m_{n,p,r}, M_{n,p,r}) \subset (l_1, l_2)$ (to vše pro každé $p \in \langle 0,1 \rangle$). Přitom opět je $1_+ > 1$, $0_- < 0$.

Položíme-li tedy $m_p = m_{p,n,r}$, $M_p = M_{p,n,r}$, je

$$V_{2p} = \begin{cases} (-\infty, k\rangle \text{ pro } \nu_{n,p} < c_1\,, \\ (k, +\infty) \text{ pro } \nu_{n,p} > c_2\,, \\ (m_p, M_p) \subset (l_1, l_2) \text{ pro } c_1 \leqq \nu_{n,p} \leqq c_2. \end{cases}$$

c_1 je největší celé číslo, pro které $M_{n,p}(c_1 - 1) \leqq k$ tj. takové největší číslo, pro které

$$P(\nu_{n,k} \leqq c_1 - 1) \leqq r\,; \tag{3.11}$$

podobně c_2 je nejmenší číslo, pro které $m_{n,r}(c_2 + 1) \geqq k$, tj. pro které

$$P(\nu_{n,k} \geqq c_2 + 1) \leqq r\,; \tag{3.12}$$

čísla l_1, l_2 jsou pak určena vztahy

$$l_1 = \begin{cases} m_{n,r}(c_1) & \text{pro } c_1 > 0\,, \\ 0_- & \text{pro } c_1 = 0\,, \end{cases}$$
$$l_2 = \begin{cases} M_{n,r}(c_2) & \text{pro } c_2 < n\,, \\ 1_+ & \text{pro } c_2 = n\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Výpočty hodnot c_1, c_2 byly provedeny podle tabulek [8], čísla l_1, l_2 jsme určili ze vztahů

$$l_1 = \frac{c_1}{c_1 + (n - c_1 + 1)\, F(2(n - c_1 + 1), 2c_1, r)}\,, \tag{3.14}$$

$$l_2 = \frac{(c_2 + 1)\, F(2(c_2 + 1), 2(n - c_2), r)}{n - c_2 + (c_2 + 1)\, F(2(c_2 + 1), 2(n - c_2), r)}\,, \tag{3.15}$$

pro $c_1 > 0$ a $c_2 < n$. Pro ekvivalenci vztahů (3.14), (3.15) s (3.13) viz např. Hald [4], str. 29.

4. NORMÁLNÍ APROXIMACE (K HODNOTÁM TABULKY 1)

Vyjdeme-li od aproximace

$$P\{v_{n,p} \leqq x\} \doteq \Phi\left(\frac{x - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad \text{pro} \quad x = 0, 1, \ldots, n\,, \tag{4.1}$$

kde $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$ je normální distribuční funkce, nahradíme vztahy (3.7) a (3.8) vztahy

$$\Phi\left(\frac{k - p_2 n}{\sqrt{np_2(1-p_2)}}\right) \leqq r\,, \tag{4.2}$$

$$1 - \Phi\left(\frac{k - p_1 n}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right) \leqq r\,; \tag{4.3}$$

nebo ekvivalentně vztahy

$$np_2 - k \geqq t_r \sqrt{n}\sqrt{p_2(1-p_2)} \tag{4.4}$$

$$k - np_1 \geqq t_r \sqrt{n}\sqrt{p_1(1-p_1)}\,, \tag{4.5}$$

kde

$$\Phi(t_r) = 1 - r\,. \tag{4.6}$$

Nejmenší n, ke kterému existuje k tak, že platí (4.4) a (4.5), je tedy nejmenší n vyhovující podmínce

$$n \geqq \left[\frac{t_r(\sqrt{p_1(1-p_1)} + \sqrt{p_2(1-p_2)})}{p_2 - p_1}\right]^2. \tag{4.7}$$

Nejmenší celé číslo n, vyhovující vztahu (4.7) (označení n_N) uvádíme pro různá p_1, p_2 a $r = 0{,}05$ spolu s přesnými hodnotami n a arcsinovými aproximacemi n_A v tabulce 3. Ukazuje se, že arcsinová aproximace je těsnější než normální. Proto jsme se nadále zabývali již jen aproximacemi arcsinovými.

5. ARCSINOVÁ APROXIMACE

Vycházíme od přibližného vztahu

$$P(\nu_{n,p} \leqq x) \doteq \Phi\left(\left[a\left(\frac{x + \frac{1}{2}}{n}\right) - a(p)\right] \sqrt{n}\right) \tag{5.1}$$

pro $x = 0, 1, \ldots, n$, kde $a(x) = 2 \arcsin \sqrt{x}$.

Aproximace k hodnotám tabulky 1. Použijeme-li vztahu (5.1), nahradíme podmínky (3.7) a (3.8) vztahy

$$\Phi\left(\left[a\left(\frac{k}{n}\right) - a(p_2)\right] \sqrt{n}\right) \leqq r\,, \tag{5.2}$$

$$1 - \Phi\left(\left[a\left(\frac{k}{n}\right) - a(p_1)\right] \sqrt{n}\right) \leqq r\,. \tag{5.3}$$

Ty jsou opět ekvivalentní vztahům

$$a(p_2) - a\left(\frac{k}{n}\right) \geqq \frac{t_r}{\sqrt{n}} \tag{5.4}$$

$$a\left(\frac{k}{n}\right) - a(p_1) \geqq \frac{t_r}{\sqrt{n}}\,. \tag{5.5}$$

K číslu n existuje k tak, že platí (5.4) a (5.5), když a jen když

$$n \geqq \left[\frac{2t_r}{a(p_2) - a(p_1)}\right]^2. \tag{5.6}$$

Nejmenší celé n, vyhovující vztahu (5.6) označíme n_A. Tato čísla uvádíme v tabulce 3 pro různá p_1, p_2 a $r = 0{,}05$.

K získaným hodnotám n_A určíme hodnotu k_A jako aritmetický průměr čísel k_1, k_2 definovaných vztahy

$$a\left(\frac{k_1}{n}\right) = a(p_2) - \frac{t_r}{\sqrt{n}}\,,$$

$$a\left(\frac{k_2}{n}\right) = a(p_1) + \frac{t_r}{\sqrt{n}}\,.$$

Hodnoty n_A, k_A jsou udány v tabulce 4. (v tab. 4a pro $r = 0{,}05$, v tab. 4b pro $r = 0{,}01$).

Těsnost aproximace není vyjádřena jen rozdílem $n_A - n$, ale spíše tím, do jaké míry splňují n_A, k_A vztahy (3.7) a (3.8). Pro 3 různé dvojice $[p_1, p_2]$ uvádíme levé strany těchto nerovností v připojené tabulce 5, a to jednak pro aproximace n_A, k_A, jednak pro přesné hodnoty n, k.

Tabulka 5.

Levé strany nerovností (3.7) a (3.8) pro hodnoty (n, k) z tabulky 1 a pro hodnoty (n_A, k_A) z tab. 4

p_1	p_2	r	$P\{\nu_{n_A, p_1} > k_A\}$	$P\{\nu_{n_A, p_2} < k_A\}$	$P\{\nu_{n, p_1} > k\}$	$P\{\nu_{n, p_2} < k\}$
0,1	0,4	0,05	0,05215	0,03696	0,02766	0,03997
0,2	0,4	0,05	0,04321	0,05168	0,04270	0,04129
0,1	0,5	0,01	0,00298	0,01448	0,00948	0,00732

Zdá se, že použití arcsinové aproximace dává velmi dobré přiblížení a že tedy lze počítat n a k pomocí této aproximace pro ta p_1, p_2, r, která nejsou v tabulce 1 uvedena, avšak která nevybočují příliš ze sítě dané hodnotami p_1, p_2, r tabulky 1.

Aproximace k hodnotám l_1, l_2 tabulky 2. Použijeme-li aproximativního vztahu (5.1), přejdou podmínky (3.11) a (3.12) v podmínky

$$a\left(\frac{C_1 - 0{,}5}{n}\right) \leqq a(k) - \frac{t_r}{\sqrt{n}} \tag{5.7}$$

a

$$a\left(\frac{C_2 + 0{,}5}{n}\right) \geqq a(k) + \frac{t_r}{\sqrt{n}}\,. \tag{5.8}$$

Určíme-li tedy C_1 jako největší a C_2 jako nejmenší celé číslo splňující tyto nerovnosti, určíme L_1, L_2 (aproximace čísel l_1, l_2) ze vztahů

$$\begin{aligned} a(L_1) &= a\left(\frac{C_1 - 0{,}5}{n}\right) - \frac{t_r}{\sqrt{n}} \quad \text{pro} \quad C_1 > 0\,, \\ L_1 &= 0_- \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pro} \quad C_1 = 0\,; \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} a(L_2) &= a\left(\frac{C_2 + 0{,}5}{n}\right) + \frac{t_r}{\sqrt{n}} \quad \text{pro} \quad C_2 < n\,, \\ L_2 &= 1_+ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pro} \quad C_2 = n\,. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Srovnání hodnot l_1, l_2 z tabulky 2 a jejich aproximací je provedeno v tabulce 5. Opět se shoda jeví pro většinu praktických aplikací postačitelnou.

Poznámka. Poměrně rozsáhlé tabulky hodnot získaných aproximacemi uvádíme proto, že s těmito aproximacemi jsme často nuceni pracovat a nemáme zatím jiných účinných metod k posouzení jejich vhodnosti, než jejich porovnání s přesným řešením v těch případech, kdy přesné řešení známe.

Tabulka 6.

Porovnání hodnot l_1, l_2 z tabulky 2 s jejich arcsinovými aproximacemi L_1 a L_2.

6 a $\quad r = 0{,}05$

n	$k = 0{,}1$				$k = 0{,}2$			
	l_1	L_2	l_2	L_2	l_1	L_1	l_2	L_2
10	0_-	0_-	0,809	0,607	0_-	0_-	0,696	0,704
30	0,002	0	0,357	0,352	0,028	0,020	0,500	0,498
50	0,007	0,003	0,293	0,289	0,054	0,048	0,424	0,422
100	0,020	0,024	0,221	0,219	0,086	0,084	0,353	0,351
1000	0,071	0,071	0,134	0,134	0,159	0,160	0,244	0,243

n	$k = 0{,}4$				$k = 0{,}4$				$k = 0{,}5$			
	l_1	L_1	l_2	L_2	l_1	L_1	l_2	L_2	l_1	L_1	l_2	L_2
10	0,005	0	0,778	0,867	0,037	0,019	0,913	0,932	0,037	0,068	0,963	0,932
30	0,068	0,060	0,598	0,632	0,140	0,133	0,692	0,695	0,221	0,216	0,779	0,784
50	0,113	0,108	0,526	0,546	0,178	0,191	0,643	0,644	0,265	0,262	0,735	0,738
100	0,162	0,160	0,467	0,466	0,243	0,242	0,567	0,567	0,336	0,336	0,664	0,665
1000	0,253	0,253	0,349	0,349	0,350	0,350	0,452	0,452	0,448	0,448	0,552	0,552

6 b $\quad r = 0{,}01$

n	$k = 0{,}1$				$k = 0{,}2$			
	l_1	L_1	l_2	L_2	l_1	L_1	l_2	L_2
10	0_-	0_-	0,782	0,797	0_-	0_-	0,850	0,871
30	0_-	0_-	0,457	0,488	0	0	0,594	0,628
50	0	0	0,363	0,380	0,017	0,011	0,514	0,512
100	0,008	0,005	0,286	0,283	0,049	0,052	0,418	0,416
1000	0,060	0,060	0,149	0,149	0,144	0,144	0,262	0,262

n	$k = 0{,}3$				$k = 0{,}4$				$k = 0{,}5$			
	l_1	L_1	l_2	L_2	l_1	L_1	l_2	L_2	l_1	L_1	l_2	L_2
10	0_-	0_-	0,952	0,976	0,001	0	0,984	0,990	0,001	0,001	0,999	0,999
30	0,028	0,019	0,716	0,721	0,063	0,052	0,799	0,807	0,127	0,117	0,873	0,883
50	0,061	0,053	0,631	0,633	0,115	0,109	0,722	0,726	0,193	0,187	0,807	0,813
100	0,116	0,112	0,531	0,531	0,190	0,187	0,638	0,639	0,269	0,276	0,731	0,724
1000	0,235	0,234	0,370	0,370	0,329	0,328	0,473	0,473	0,426	0,426	0,574	0,574

6. OPRAVA TABULEK PRÁCE [3]

Při kontrole tabulek v již citované práci [3] bylo zjištěno několik chybných dat. Uvedena jsou vždy trojice čísel n_i, i, $n_i - i$.

V tabulce 1 (str. 42) je

chybně			má být		
n_i	i	$n_i - i$	n_i	i	$n_i - i$
340	133	208	340	132	208
245	134	211	345	134	211
133	173	260	433	173	260

V tabulce 2 (str. 43) je

chybně			má být		
204	78	127	204	78	126
206	79	128	206	79	127
299	119	179	299	119	180
315	126	189	314	126	188
416	171	244	416	171	245
424	175	249	425	175	250
482	101	281	482	201	281

Literatura

[1] *F. J. Anscombe:* Fixed-Sample-Size Analysis of Sequential Observations, Biometrics *10* (1954), 89—100.

[2] *Robert E. Clark:* Percentage Points of the Incomplete Beta Function, Journal of the American Statistical Association *48* (1953), 831—843.

[3] *Václav Fabian:* A Decision Function, Czech. Math. Journal *6 (81)* (1956), 31—45.

[4] *A. Hald:* Statistical Tables and Formulas, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1952.

[5] *Karl Pearson:* Tables of the Incomplete Beta-Function, Cambridge University Press 1934.

[6] *Harry C. Romig:* 50—100 Binomial Tables, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1953.

[7] *Charles Stein:* A Two-Sample Test for a Linear Hypothesis Whose Power is Independent of the Variance, Annals of Mathematical Statistics *16* (1945) 243—258.

[8] Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution, Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1955.

[9] *Abraham Wald:* Sequential Analysis, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1947.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ МОДИФИКАЦИИ ОЦЕНКИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРВАЛА И ВЫБОР ЧИСЛА НАБЛЮДЕНИЙ В СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ БИНОМИЧЕСКОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

ВАЦЛАВ ФАБИАН (Václav Fabian)

(Поступило в редакцию 3/V 1958 г.)

Пусть (m_p, M_p) — оценка с помощью интервала неизвестного параметра $p \in \mathfrak{M}$; точнее говоря, пусть для каждого $p \in \mathfrak{M}$ m_p, M_p, ν_p являются случайными переменными, удовлетворяющими условиям (2.1), (2.2), (2.3). Пусть k — данное число; оценки с помощью интервала $V_{1,p}$ и $V_{2,p}$ определим соотношениями (2.4) и (2.5). Так как (для каждого $i = 1, 2, p \in \mathfrak{M}$) $V_{i,p} \supset \supset (m_p, M_p)$, будет $P\{p \in V_{i,p}\} \geqq 1 - 2r$; согласно теореме из п. 2 справедлива лучшая оценка $P\{p \in V_{i,p}\} \geqq 1 - r$. Приводится пример применения этой теоремы к сравнению неизвестного ожидаемого значения нормальной случайной переменной с данным числом k. Дальнейшие применения теоремы касаются биномической случайной переменной.

Пусть всюду в дальнейшем (m_p, M_p) означает оценку с помощью интервала неизвестной вероятности $P(A)$, определенную обыкновенным способом по наблюдениям частоты ν_n явления A при n независимых испытаниях; пусть (m_p, M_p) опять удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2).

По таблице 1 можно для различных p_1, p_2 и r найти наименьшее число n, к которому существует число k (не целое), обладающее следующим свойством:

1. $m_p \geqq p_1$, если $\nu_n > k$;
   $M_p \leqq p_2$, если $\nu_n < k$.

Отсюда по цитированной теореме вытекает следующее свойство:

2. Метод, принимающий решение $p > p_1$ в случае $\nu_n > k$, а решение $p < p_2$ в случае $\nu_n < k$, выбирает правильное решение с вероятностью, большей или равной числу $1 - r$.

По таблице 2 определяются для различных n, k такие значения c_1, c_2, l_1, l_2, что:

1. $M_p \leqq k$ для $\nu_n < c_1$; $m_p \geqq k$ для $\nu_n > c_2$; $(m_n, M_n) \subset (l_1, l_2)$ в остальных случаях.

Из этого свойства вследствие цитированной теоремы вытекает следующее:

2. Метод принимающий решение $p > k$ в случае $\nu_n > c_2$; $p \leqq k$ в случае $\nu_n < c_1$; $p \in (m_n, M_n)$ в остальных случаях, выбирает правильное решение с вероятностью, большей или равной числу $1 - r$.

Далее статья посвящена аппроксимациям к таблицам 1 и 2; точные значения сравниваются с приближенными в таблицах 3, 4, 5, 6.

Summary

SOME MODIFICATIONS OF INTERVAL ESTIMATION AND CHOICE OF NUMBER OF OBSERVATIONS FOR A BINOMIAL RANDOM VARIABLE

VÁCLAV FABIAN

(Received May 3rd 1958)

Let (m_p, M_p) be an interval estimate of an unknown parameter $p \in \mathfrak{M}$; more precisely, for every $p \in \mathfrak{M}$ let m_p, M_p, ν_p be random variables satisfying conditions (2.1), (2.2), (2.3). For a given k define intervals $V_{1,p}$ and $V_{2,p}$ by (2.4) and (2.5). Since (for $i = 1,2$, $p \in \mathfrak{M}$) $V_{i,p} \supset (m_p, M_p)$, we have $P\{p \in V_{i,p}\} \geqq 1 - 2r$; and by the theorem of paragraph 2 we even have $P\{p \in V_{i,p}\} \geqq 1 - r$. This theorem is applied to the comparison of the unknown expected value of a normal random variable with a given number k; other applications are concerned with a binomial random variable.

Let m_p, M_p be upper and lower estimates (satisfying (2.1) and (2.2)) of an unknown probability $P(A)$ determined in the usual manner by observing the frequency ν_n of occurrence of an event A in n independent experiments. Then Table 1 gives, for different entries p_1, p_2, r, the least n such that there exists non-integral k with

1. $m_p \geqq p_1$ whenever $\nu_n > k$ and $M_p \leqq p_2$ whenever $\nu_n < k$.

Our theorem then implies that

2. The method that accepts the decision $p > p_1$ for $\nu_n > k$ and the decision $p < p_2$ for $\nu_n < k$ will decide correctly with probability at least $1 - r$.

Table 2 determines values of c_1, c_2, l_1, l_2 for different n, k such that

1. $M_p \leqq k$ for $\nu_n < c_1$ and $m_p \geqq k$ for $\nu_n > c_2$ and $(m_n, M_n) \subset (l_1, l_2)$ in other cases.

Again, our theorem implies

2. The method that accepts the decision $p > k$ for $\nu_n > c_2$, $p \leqq k$ for $\nu_n < c_1$, $p \in (m_n, M_n)$ in the remaining cases, will decide correctly with probability at least $1 - r$.

Finally, the article concerns itself with approximations to the values contained in these tables. They are compared in Tables 3, 4, 5, 6.