

Aplikace matematiky

Jan Dvořák

Mezikruhová deska v pružně-plastickém stavu

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 1, 18–34

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102643>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

MEZIKRUHOVÁ DESKA V PRUŽNĚ-PLASTICKÉM STAVU

JAN DVOŘÁK

(Došlo dne 19. února 1958.)

DT: 621.81-41:539.3/4

Odvození a použití vztahů pro určení průběhu radiálního, tečného momentu a průhybu pružně-plastické mezikruhové desky, na vnějším obvodu opřené a na vnitřním zatížené rovnoměrně rozloženou silou. Při výpočtu je za základ vzata Huber-Mises-Henckyho podmínka plasticity. Řešení základních rovnic je provedeno aproximativní metodou, která dává dostatečně přesné výsledky v uzavřeném tvaru. — Porovnání přesnosti řešení.

1. ÚVOD

V práci je podáno řešení napjatosti mezikruhové, tenké pružně-plastické desky, na jednom okraji volně podepřené a na druhém zatížené rovnoměrně rozloženou silou. Vzhledem k tomu, že podpora vyvolá tíž účinek jako prvotní síla, nezávisí stav napjatosti a rozložení plastické oblasti na tom, zda je deska zatížena na vnitřním a opřena na vnějším okraji, nebo naopak.

Překročí-li velikost zatěžující síly určitou hodnotu, začnou přecházet některá vlákna do plastického stavu. Plastická oblast se nejprve objeví na vnitřním okraji desky a se vzrůstající silou se jednak prohlubuje ve směru axiálním, jednak rozšiřuje ve směru radiálním. Dosáhne-li zatěžující síla určité mezní hodnoty, přejde celá deska do plastického stavu.

V dalším bude vyšetřován tvar a velikost této plastické oblasti, její závislost na rozměrech desky, na mezi pružnosti materiálu a na velikosti zatížení.

Výpočet je založen na těchto předpokladech:

- 1) Deska je zhotovena z homogenního isotropního nestlačitelného materiálu ($\nu = \frac{1}{2}$) s výraznou mezí pružnosti.
- 2) Tloušťka desky je malá proti jejímu vnějšmu průměru.
- 3) Průhyb střední neutrální plochy je malý ve srovnání s tloušťkou desky.
- 4) Střední plocha deformované desky není tažena ani tlačena, nýbrž pouze ohýbána.
- 5) Průřezy kolmé k střední ploše nedeformované desky zůstávají kolmými i po její deformaci.

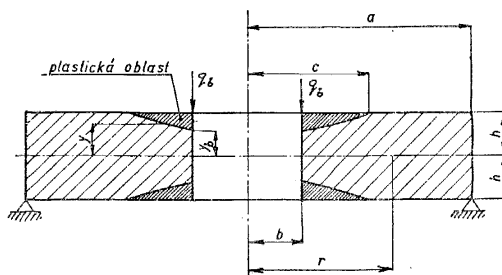
Podmínka plasticity je dána hypotesou Huber-Mises-Henckyho.

Výsledky jsou dovedeny do takového tvaru, aby jich bylo možno použití při určování plastických oblastí v strojních součástech, majících tvar mezikruhovité desky, např. v otočných listech vysokotlakých přírubových spojů.

Účelem práce je posoudit využití materiálu takto zatížené mezikruhovité desky a zpřesnit dosavadní pevnostní výpočty, při nichž se srovnává určené namáhání s mezním stavem, při kterém povrchová vlákna na vnitřním poloměru dosáhnou meze úměrnosti. ($\eta_b = 1$, viz diagram 3,1).

2. POUŽITÁ OZNAČENÍ

a, b	vnější, resp. vnitřní poloměr desky (cm)
r	proměnný poloměr (cm)
$x = \frac{r}{a}$	redukovaný poloměr



OBR. 2,1

c	poloměr oddělující krajní vlákna pružně-plastické oblasti od pružné (cm)
w	průhyb desky (cm)
h	poloviční tloušťka desky (cm)
z	vzdálenost libovolného bodu od neutrální plochy desky (cm)
y	vzdálenost rozhraní mezi pružnou a plastickou oblastí od neutrální plochy na poloměru r (cm)
$\eta = \frac{y}{h}$	redukovaná vzdálenost rozhraní mezi pružnou a plastickou oblastí od neutrální plochy
Q	celková zatěžující síla (kg)
$q_r = \frac{Q}{2\pi r}$	posouvající síla, připadající na 1 cm obvodu kružnice o poloměru r $\left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}}\right)$

$P = \frac{\sqrt{3}Q}{\pi\sigma_s(2R)^2}$	redukované zatížení (bezrozměrná veličina, charakterisující velikost namáhání materiálu desky o tloušťce $2h$)
σ_s	mez průtažnosti materiálu $\left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$
G	modul pružnosti cm ve smyku $\left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$
$m_r^{(e)}, m_r^{(p)}$	radiální ohybový moment v pružné nebo pružně-plastické oblasti $\left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}}\right)$
$m_t^{(e)}, m_t^{(p)}$	tečný ohybový moment v pružné nebo pružně-plastické oblasti $\left(\frac{\text{kgcm}}{\text{cm}}\right)$
k_r, k_t	parametry křivosti neutrálné plochy zatížené desky $\left(\frac{1}{\text{cm}}\right)$

Veličiny označené indexy b a c se vztahují k vnitřnímu okraji desky, případně k poloměru, rozdělujícímu pružnou a plastickou oblast.

3. SHRUTÍ VÝSLEDKŮ

Uvažujme desku, která je na příklad na vnějším okraji volně opřena a na vnitřním okraji zatížena posouvající silou $q_b = \frac{Q}{2\pi b}$ rovnoměrně rozloženou po obvodě. (Viz obr. 2,1.)

Vnější zatížení vyvolá v desce stav napjatosti, který je určen obvodovým a radiálním napětím σ_t a σ_r . Jak známo, je při platnosti Hookova zákona rozdělení tečného a radiálního napětí po tloušťce desky přímkové. S rostoucí vnější silou vzrůstají i napětí, až při jisté hodnotě Q se v desce objeví plastická místa. Podle hypotézy Huber-Mises-Henckyovy tento stav nastane, když napětí σ_t a σ_r splňují rovnici

$$\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_t + \sigma_t^2 = \sigma_s^2. \quad (3,1)$$

Úkolem je určit, zda v desce při daném zatížení vznikly plastické oblasti, určit jejich tvar a velikost, stanovit průběh tečného a radiálního momentu a deformaci desky.

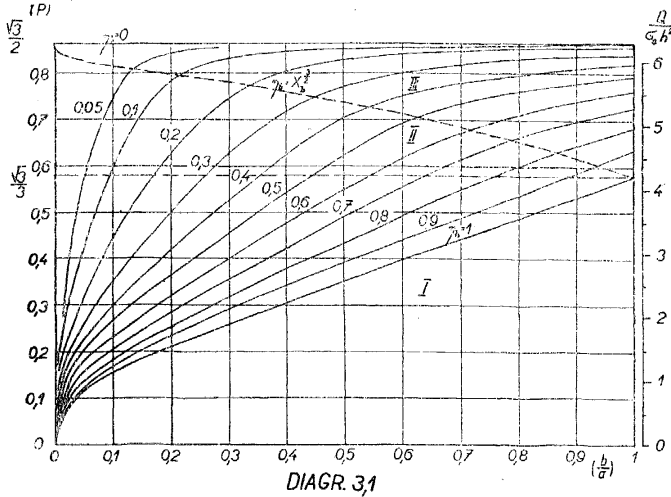
Postupujeme tak, že nejprve vypočteme redukovaný poloměr $x_b = \frac{b}{a}$ vnitřního okraje desky a redukované zatížení $P = \frac{\sqrt{3}Q}{\pi\sigma_s(2h)^2}$ nebo bezrozměrné číslo $\frac{Q}{\sigma_s h^2}$.

Na základě těchto hodnot odečteme v diagramu 3,1 parametr η_b , což je redukovaná tloušťka pružné oblasti na vnitřním okraji desky.

Tvar křivky (viz obr. 2,1), rozdělující pružnou a plastickou oblast, je dán vztahem

$$y = h\eta_b \left(\frac{x}{x_b}\right)^{\frac{3}{2}} = h\eta_b \left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3,2)$$

Velikost redukovaného poloměru x_c , rozdělujícího okrajová vlákna pružné a plastické oblasti, dostáváme ze vztahů (3,1), dosadíme-li $y = h$; $x_c = x_b \cdot \eta_b^{-\frac{2}{3}}$.



Ohybové momenty, působící na délkovou jednotku rovnoběžkového nebo radiálního řezu v pružně-plastické oblasti ($x_b \leq x \leq x_c$) jsou dány vztahy

$$\left. \begin{aligned} m_r^{(p)} \\ m_t^{(p)} \end{aligned} \right\} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s h^2 \left[1 - \frac{\eta_b^2}{3} \left(\frac{x}{x_b}\right)^3 \right] \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right), \quad (3,3)$$

kde

$$\omega = \frac{P}{3} \lg \frac{\eta_b^2 - 3}{\eta_b^2 x^3 - 3x_b^3} + \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - P \right) \lg x + \frac{\sqrt{3}}{2} \lg x_b. \quad (3,4)$$

V pružné části desky pro ($x_c \leq x \leq 1$) je

$$\left. \begin{aligned} m_r^{(e)} &= \frac{Q}{8\pi} \left[\lg \frac{1}{x^3} + x_b^2 \eta_b^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3P} \sin \omega_c \right) \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \right], \\ m_t^{(e)} &= \frac{Q}{8\pi} \left[1 + \lg \frac{1}{x^3} - x_b^2 \eta_b^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3P} \sin \omega_c \right) \right], \end{aligned} \right\} (3,5)$$

kde

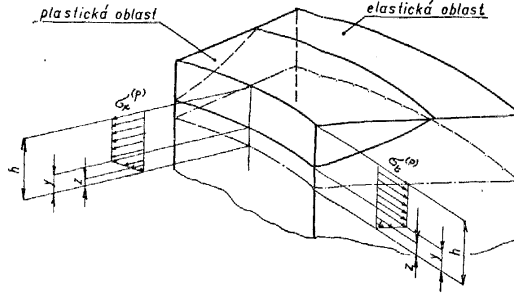
$$\omega_c = \frac{P}{3} \lg \frac{3 - \eta_b^2}{2\eta_b^2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \lg \eta_b^{\frac{2}{3}}.$$

Rozložení tečného a radiálního napětí je patrné z obr. 3,1.

Pro oblast pružně-plastickou ($x_b \leq x \leq x_c$) při vzdálenosti z od střední roviny menší než y , je

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r^{(e)} \\ \sigma_t^{(e)} \end{matrix} \right\} = \frac{4z\sigma_s}{3h\eta_b} \left(\frac{x_b}{x} \right)^{\frac{3}{2}} \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right), \quad (3,6)$$

kde ω je dáno vztahem (3,4).



OBR. 3,1

Jestliže $z \geq y$, nastupuje oblast plastická, ve které jsou složky napětí $\sigma_r^{(p)}$, $\sigma_t^{(p)}$ nezávislé na vzdálenosti vlákna od střední roviny desky:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r^{(p)} \\ \sigma_t^{(p)} \end{matrix} \right\} = \frac{4}{3} \sigma_s \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right). \quad (3,7)$$

V pružné oblasti platí známé vztahy (pro $x_c \leq x \leq 1$)

$$\sigma_t^{(e)} = \frac{3m_t^{(e)}}{2h^3} z, \quad \sigma_r^{(e)} = \frac{3m_r^{(e)}}{2h^3} z, \quad (3,8)$$

pomocí nichž a na základě výrazu (3,5) můžeme stanovit napětí v kterémkoliv místě desky.

Jestliže bod o souřadnicích x_b , P leží v části II diagramu 3,1, je rovnice průhybové plochy pro $x_b \leq x \leq x_c$

$$w = \frac{\sigma_s a^2}{3G} \frac{2x_b^{\frac{3}{2}}}{h\eta_b} \left(x_c^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \right) + w_c, \quad (3,9)$$

kde

$$w_c = \frac{Q}{8\pi K} a^2 \left\{ \left[x_c^2 \frac{4 \sin \omega_c}{9P} + \frac{7 - x_c^2}{6} \right] (1 - x_c^2) - x_c^2 \left(2 - \frac{8}{3P} \sin \omega_c \right) \lg \frac{1}{x_c} \right\},$$

$K = \frac{8}{3} Gh^3$ a ω_c je dáno třetím z výrazů (3,5).

Pro $x_c \leq x \leq 1$ je

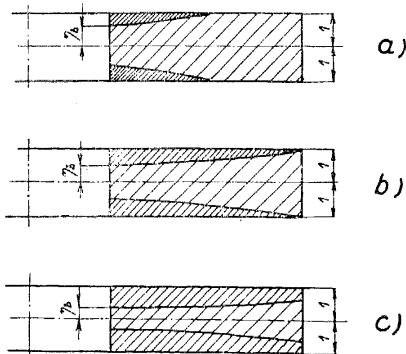
$$w = \frac{Q}{8\pi K} a^2 \left[\left[x_c^2 \frac{4}{9} \frac{\sin \omega_c}{P} + \frac{7 - x_c^2}{G} \right] (1 - x^2) - \left[x^2 + x_c^2 \left(1 - \frac{8}{3P} \sin \omega_c \right) \right] \lg \frac{1}{x} \right]. \quad (3,10)$$

Jsou-li všechna povrchová vlákna a část vnitřních vláken desky plastická (viz obr. 3,2c), je rovnice průhybové plochy

$$w = \frac{2}{3} \frac{\sigma_s a^2 x_b^{\frac{3}{2}}}{G h \eta_b} (1 - \sqrt{x}). \quad (3,11)$$

Z diagramu 3,1 je patrné, že bod o souřadnicích x_b, P může ležet v oblasti I, II, nebo III. V prvním případě je celá deska pružná, v druhém případě část povrchových vláken je v pružném stavu, část je již plastická (viz obr. 3,2a). V třetím případě zůstávají pružná jen vnitřní vlákna desky (viz obr. 3,2c).

Bod o souřadnicích x_b, P může též ležet na křivce $\eta_b = 1$ nebo $n_b = x_b^{\frac{3}{2}}$ nebo $\eta_b = 0$. Znamená to, že buď celá deska je pružná až na vlákna vnitřního okraje, ležící ve vzdálenosti $\pm h$ od neutrální plochy, nebo že plocha ohraničující pružnou a plastickou oblast prochází povrchovými vlákny vnějšího okraje (viz obr. 3,2b) nebo konečně, že celá deska je plastická.



OBR. 3,2

4. PŘÍKLAD

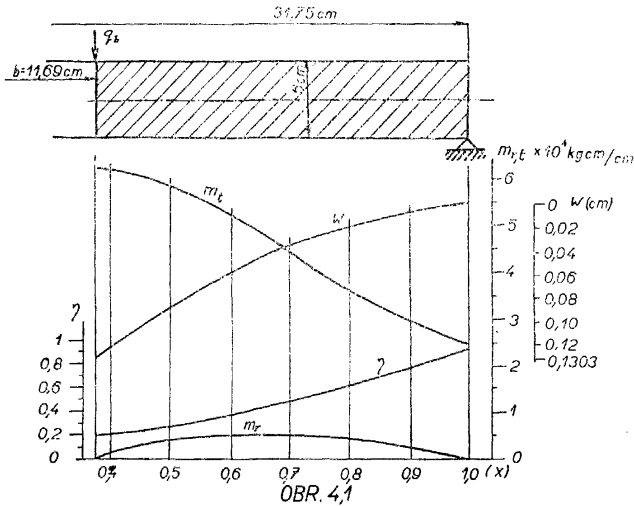
V příkladě je vyšetřen průběh radiálního a tečného momentu v mezikruhové desce o rozměrech $a = 31,8$ cm, $b = 11,7$ cm, $h = 3$ cm na vnějším obvodu volně opřené a zatížené silou $Q = 104000$ kg. Materiál desky je uhlíková ocel s mezí průtažnosti $\sigma_s = 2000$ kg/cm². Vypočteme bezrozměrné parametry

$$P = \frac{\sqrt{3}Q}{\pi \sigma_s (2h)^2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 104000}{\pi \cdot 2000 \cdot 36} = 0,795, \quad x_b = \frac{b}{a} = \frac{11,7}{31,8} = 0,368.$$

Z diagramu 3,1 odečteme $\eta_b = 0,2$. Bod o souřadnicích $P = 0,795, x_b = 0,368$ leží v části III diagramu.

Průběh radiální a tečné složky ohybových momentů je dán vztahy (3,3) a (3,4). Z rovnice (3,10) byl určen tvar průhybové plochy.

Na obr. 4,1 je nakreslen průběh obou složek momentů, dále průběh rozhraní mezi pružnou a plastickou oblastí a průhyb w desky.



5. ODVOZENÍ VZTAHŮ

Redukovaný poloměr $x_c = \frac{c}{a}$ dělí desku na dvě mezikruhovité části: 1. pružně plastickou o velikosti redukovaných poloměrů x_b a x_c , 2. pružnou s vnitřním a vnějším poloměrem, odpovídajícím hodnotám x_c a 1.

Diferenciální rovnice pružné kruhové a mezikruhové desky, zatížené po obvodě rovnoměrně rozloženou silou je homogenní a má tvar

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0,$$

kde w je průhyb desky.

Odvození této diferenciální rovnice je provedeno např. v knize GIRKMANOVĚ [3] na straně 155 a 158.

Zavedeme-li redukovaný poloměr $x = \frac{r}{a}$, dostáváme

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} \right) = 0.$$

Obecný integrál rovnice je

$$w = C_1 + C_2 x^2 + C_3 x^2 \lg x + C_4 \lg x. \quad (5,1)$$

K určení konstant klademe tyto okrajové podmínky: pro $x = 1$, $m_r = w = 0$, $q_r = q_a$. Je-li materiál nestlačitelný ($\nu = \frac{1}{2}$) platí

$$m_r = -\frac{K}{a^2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{2x} \frac{dw}{dx} \right), \quad (5,2)$$

$$m_t = -\frac{K}{a^2} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} \right), \quad (5,3)$$

$$q_r = -\frac{K}{a^3} \left(\frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{1}{x} \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dw}{dx} \right). \quad (5,4)$$

K je ohybová tuhost desky ($K = \frac{8}{3} Gh^3$), G je modul pružnosti ve smyku. Provedeme-li naznačené diferenciální operace podle vztahu (5,4) s integrálem (5,1), dostáváme na základě okrajové podmínky na redukovaném poloměru $x = 1$

$$C_3 = \frac{Qa^2}{8\pi K}. \quad (5,5)$$

Nulový průhyb a nulová radiální složka ohybového momentu na vnějším obvodu desky jsou podmínkami pro určení dalších dvou konstant:

$$\text{ze vztahu (5,1): } C_1 + C_2 = 0,$$

$$\text{ze vztahu (5,2): } 3C_2 - \frac{1}{2}C_4 + \frac{7}{2}C_3 = 0.$$

Tyto podmínky můžeme zachovat i při zatížení na vnějším a opření na vnitřním okraji desky. Na jejím stavu napjatosti se nic nezmění, pouze k rovnici průhybové plochy desky přičteme tak velkou konstantu C_1 (posunutí desky v osovém směru), aby pro $x = x_b$ bylo $w = 0$.

Dosadíme-li do posledního vztahu za C_3 výraz (5,5) a řešíme-li tuto soustavu vzhledem k C_2 a C_4 , dostáváme

$$C_2 = -C_1, \quad (5,6)$$

$$C_4 = \frac{7}{8} \frac{Qa^2}{8\pi K} - 6C_1. \quad (5,7)$$

Jestliže konečně tyto konstanty dosadíme do vztahů pro ohybové momenty, dostaneme

$$m_r = -\frac{K}{a^2} \left\{ 3C_1 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) + \frac{Qa^2}{8\pi K} \left[3 \lg x - 3,5 \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \right] \right\},$$

$$m_t = -\frac{K}{a^2} \left\{ -3C_1 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) + \frac{Qa^2}{8\pi K} \left[3 \lg x + 2,5 + \frac{3,5}{x^2} \right] \right\}. \quad (5,8)$$

Konstanta C_1 bude určena z okrajové podmínky na redukovaném poloměru x_c .

Řešení plastické oblasti. Ohybový moment, připadající na délkovou jednotku meridiálního nebo rovnoběžkového řezu je dán vztahem

$$m_r = 2 \int_0^h \sigma_r z \, dz, \quad m_t = 2 \int_0^h \sigma_t z \, dz. \quad (5,9)$$

Protože v pružně-plastické oblasti je napětí po tloušťce desky rozloženo podle obrázku 3,1, rozdělíme integrály (5,9) na dvě části:

$$m_r = 2 \int_0^y \sigma_r^{(e)} z \, dz + 2 \int_y^h \sigma_r^{(p)} z \, dz,$$

$$m_t = 2 \int_0^y \sigma_t^{(e)} z \, dz + 2 \int_y^h \sigma_t^{(p)} z \, dz.$$

Z obrázku 3,1 je patrné, že $\sigma_r^{(e)} = \frac{z}{y} \sigma_r^{(p)}$. Dosadíme-li do předchozích vztahů a provedeme-li integraci v daných mezích, dostáváme

$$m_r = \sigma_r^{(p)} \left(h^2 - \frac{y^2}{3} \right), \quad m_t = \sigma_t^{(p)} \left(h^2 - \frac{y^2}{3} \right). \quad (5,10)$$

Radiální a tečnou složku napětí spojuje podmínka plasticity (3,1), kterou SOKOLOVSKÝ [1] respektoval zavedením nové proměnné ω v tomto tvaru:

$$\left\langle \frac{\sigma_r^{(p)}}{\sigma_t^{(p)}} \right\rangle = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right). \quad (5,11)$$

Dosadíme-li do rovnice (5,10) za $\sigma_r^{(p)}$ a $\sigma_t^{(p)}$ výrazy (5,11), dostaneme

$$\left\langle \frac{m_r}{m_t} \right\rangle = \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}} h^2 \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right). \quad (5,12)$$

Nově zavedenou proměnnou ω použijeme též k vyjádření křivosti průhybové plochy v tečném a radiálním směru.

Z teorie desek je známo, že

$$k_t = -\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = -\frac{1}{a^2} \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} = \frac{\varepsilon_t}{z},$$

$$k_r = -\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{1}{a^2} \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\varepsilon_r}{z}, \quad (5,13)$$

kde ε_r , ε_t jsou poměrná prodloužení v radiálním a tečném směru. Tyto geometrické vztahy platí obecně bez ohledu na mechanické vlastnosti materiálu.

Při platnosti Hookova zákona je

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r) = \frac{2G}{1-\nu} (\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r),$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t) = \frac{2G}{1-\nu} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t).$$

Dosaďme-li za poměrné prodloužení ε křivosti k podle vztahů (5,13) a $\nu = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$\sigma_t = 4Gz(k_t + \frac{1}{2}k_r), \quad \sigma_r = 4Gz(k_r + \frac{1}{2}k_t).$$

Tyto vztahy platí i pro vlákna na rozhraní pružné a plastické oblasti, tedy

$$\sigma_t^{(n)} = 4Gy(k_t + \frac{1}{2}k_r), \quad \sigma_r^{(n)} = 4Gy(k_r + \frac{1}{2}k_t). \quad (5,14)$$

Dosaďme-li nyní do rovnice (5,14) výrazy (5,11), dostáváme

$$\left\langle \frac{k_t}{k_r} \right\rangle = \pm \frac{\sigma}{3Gy} \sin \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right). \quad (5,15)$$

Hledané funkce $\omega(r)$ a $y(r)$ musí splňovat rovnice rovnováhy

$$\frac{1}{a} \frac{dm_r}{dx} + \frac{1}{a} \frac{m_r - m_t}{x} = -q_r \quad (5,16)$$

a kompatibility

$$\frac{dk_t}{dx} + \frac{k_t - k_r}{x} = 0. \quad (5,17)$$

Upravme tyto rovnice tak, že použijeme vztahů (4,12) a (5,15):

$$\begin{aligned} x \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] - \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \sin \omega + P &= 0, \\ x \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\eta} \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{1}{\eta} \sqrt{3} \sin \omega &= 0. \end{aligned} \quad (5,18)$$

Zavedeme-li novou nezávisle proměnnou substitucí $x = e^\varrho$, dostáváme z (5,18)

$$\frac{d}{d\varrho} \left[\left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \cos \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] = \left(1 - \frac{\eta^2}{3} \right) \sin \omega - P, \quad (5,19)$$

$$\frac{d}{d\varrho} \left[\frac{1}{\eta} \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{1}{\eta} \sqrt{3} \sin \omega = 0, \quad (5,20)$$

kde

$$P = \frac{\sqrt{3}Q}{\pi\sigma_s(2h)^2}.$$

Provedme naznačenou derivaci v rovnici (5,20); dostaneme po úpravě

$$\frac{d\eta}{\eta} = \cotg \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) d\omega + \sqrt{3} \frac{\sin \omega}{\sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right)} d\varrho$$

a po integraci

$$\lg \eta = \lg \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) + \lg \exp \sqrt{3} \int_e^{\varrho} \frac{\sin \omega}{\sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right)} d\varrho + \lg C$$

nebo

$$\eta = C \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \exp \sqrt{3} \int_{e_b}^e \frac{\sin \omega}{\sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right)} d\varrho. \quad (5,12)$$

Konstantu C určíme z podmínky, že na vnitřním okraji desky ($\varrho = \varrho_b$) je radiální složka ohybového momentu nulová. Podle (5,12) musí tedy být $\omega_b = \frac{\pi}{3}$. Krajní hodnotu proměnné η označme η_b . Z (5,21) plyne, že $C = \eta_b$ a tedy

$$\eta = \eta_b \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \exp \sqrt{3} \int_{e_b}^e \frac{\sin \omega}{\sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right)} d\varrho. \quad (5,22)$$

Z rovnice (5,19) dostaneme dále s použitím vztahu (5,22)

$$\frac{d\omega}{d\varrho} = \frac{\eta^2 \left[2\sqrt{3} \cotg \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right] \sin \omega + 3 (\sin \omega - P)}{\left\{ \eta^2 \left[1 - 2 \cotg^2 \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) \right] - 3 \right\} \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right)}. \quad (5,23)$$

Přesné řešení rovnice (5,23) nelze provést, avšak již prvé přiblížení při použití aproximační metody vede k dostatečně přesným výsledkům. Přesnost této metody bude posouzena v kapitole 6.

Nechť nulová aproximace hledané funkce ω je konstanta, která splňuje podmínku nulové radiální složky ohybového momentu na obou okrajích desky $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$. Po dosazení do vztahu (5,22) dostáváme

$$\eta = \eta_b e^{\frac{3}{2}(e-e_b)} = \eta_b \left(\frac{x}{x_b} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5,24)$$

a po dosazení do (5,23) a integraci dostáváme

$$\omega = \frac{P}{3} \lg \frac{3 - \eta_b^2}{3x_b^2 - \eta_b^2 x^2} + \frac{\pi}{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - P \right) \lg x + \frac{\sqrt{3}}{2} \lg x_b. \quad (5,25)$$

V knize Sokolovského ([1], str. 231) jsou uvedeny výsledky vyšetřování tvaru rozhraní pružné a plastické oblasti kruhové, volně opřené desky, zatížené po ploše stálým tlakem.

Výchozí diferenciální rovnice zde byly řešeny numericky a výsledky tabelovány ([1], tab. 17).

Přesto, že zde jde o jiný geometrický útvar (kruhová deska) a jiné zatížení (stálý tlak po celé ploše desky), mají oba případy společnou tu vlastnost, že přejdou-li v některém průřezu všechna vlákna do plastického stavu ($\eta_b = 0$), pak je celá deska plastická ($\eta = 0$ pro každé x).

GRIGORJEV podává v článku 6 své práce ([2], str. 75) přibližné řešení ohybu mezikruhové desky stálé tloušťky. Přitom vychází z předpokladu, že m_r je všude nulový. To odpovídá zde uvedenému řešení, položí-li se $\omega = \frac{\pi}{3}$.

Uřčení konstanty C_1 :

Na přechodu mezi pružnou a plastickou oblastí na redukovaném poloměru x_c je $\eta = 1$. Tomu příslušející hodnotu funkce ω označme ω_c . Vyjádření složek momentů (5,12) se zjednoduší na tvar

$$\left. \begin{matrix} m_r \\ m_t \end{matrix} \right\} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \sigma_s h^2 \cos \left(\omega \pm \frac{\pi}{6} \right), \quad (5,26)$$

což je možné přepsat takto:

$$\begin{aligned} \sin \omega_c &= \frac{3\sqrt{3}}{\sigma_s (2h)^2} (m_t - m_r), \\ \cos \omega_c &= \frac{3}{\sigma_s (2h)^2} (m_t + m_r). \end{aligned} \quad (5,27)$$

Dosadíme-li do první rovnice (5,27) výrazy (5,8), vypočteme konstantu C_1

$$C_1 = \frac{Q}{8\pi} \frac{a^2}{K} \left[x_c^2 \frac{4}{9} \frac{1}{P} \sin \omega_c + \frac{1}{6} (7 - x_c^2) \right].$$

Po dosazení do (5,6) a (5,7)

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= - \frac{Q}{8\pi} \frac{a^2}{K} \left[x_c^2 \frac{4}{9} \frac{1}{P} \sin \omega_c + \frac{1}{6} (7 - x_c^2) \right], \\ C_3 &= \frac{Qa^2}{8\pi K}, \\ C_4 &= \frac{Q}{8\pi} \frac{a^2}{K} x_c^2 \left(1 - \frac{8}{3P} \sin \omega_c \right). \end{aligned} \right\} (5,28)$$

Z druhé rovnice (5,27) dostáváme po dosazení právě vypočtených konstant závislost, které bylo použito při konstrukci diagramu 3,1

$$\cos \omega_c = \frac{\sqrt{3}P}{4} \left[\left(\frac{x_b}{\eta_b^{\frac{2}{3}}} \right)^2 \left(\frac{4 \sin \omega_c}{3P} - \frac{1}{2} \right) + \lg \frac{\eta_b^2}{x_b^3} + \frac{1}{2} \right], \quad (5,29)$$

kde ω_c je dáno třetím ze vztahů (3,5).

Konstrukce diagramu 3,1. Probereme nyní různá stadia pružně-plastického stavu desky:

1. Počáteční pružně-plastický stav ($\eta_b = 1$). Jestliže je $\eta_b = 1$, potom plyne z třetího výrazu (3,5), že $\omega_c = \frac{\pi}{3}$ a po dosazení do (5,29) dostáváme

$$1 = P \frac{\sqrt{3}}{2} \left[x_b^2 \left(\frac{4\sqrt{3}}{6P} - \frac{1}{2} \right) - \lg x_b^3 + \frac{1}{2} \right]$$

a po úpravě

$$P = \frac{2\sqrt{3}}{3 - \frac{9}{1-x_b^2} \lg x_b}.$$

To je rovnice křivky s parametrem $\eta_b = 1$.

2. Při dostatečně velkém redukovaném zatížení P nabývá x_c hodnot větších než x_b a η_b se pohybuje v mezích $0 \leq \eta_b \leq x_b^{\frac{3}{2}}$. Za účelem sestrojení této soustavy křivek o parametru η_b byla rovnice (5,29) upravena takto:

$$\lg \frac{1}{x_b} + x_b^2 \kappa_1(P, \eta_b) = \kappa_2(P, \eta_b), \quad (5,30)$$

kde

$$\kappa_1(P, \eta_b) = \frac{1}{3\eta_b^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{4 \sin \omega_c}{3P} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\kappa_2(P, \eta_b) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \lg \frac{1}{\eta_b} + \frac{4 \cos \omega_c}{3\sqrt{3}P}.$$

Křivky oblasti II byly sestrojeny tak, že pro zvolené P a η_b se vypočetly hodnoty κ_1 a κ_2 a řešením rovnice (5,30) se našlo příslušné x_b .

3. Dosáhne-li x_c vnějšího okraje desky ($x_c = 1$), plyne ze vztahů (5,24) a (5,29), že $\eta_b = x_b^{\frac{3}{2}}$ a $\omega_c = \frac{\pi}{3}$.

Jestliže tyto výsledky dosadíme do třetí rovnice (3,5), dostáváme analytické vyjádření křivky o parametru $\eta_b = x_b^{\frac{3}{2}}$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\lg x_b^{\frac{3}{2}}}{\lg \frac{2x_b^{\frac{3}{2}}}{3 - x_b^{\frac{3}{2}}}}.$$

V diagramu 3,1 je vyznačena čárkovaně.

4. Při stoupajícím P musí být v důsledku nulového radiálního momentu m_r na vnějším okraji $\omega|_{x=1} = \frac{\pi}{3}$. Na základě vztahu (5,25) tedy dostáváme

$$P = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\lg x_b^{\frac{3}{2}}}{\lg \frac{3x_b^{\frac{3}{2}} - \eta_b^2}{3 - \eta_b^2}},$$

což je rovnice soustavy křivek, ležících v oblasti III diagramu 3,1.

Jestliže jsou všechna vlákna v desce plastická, je $\eta_b = 0$ a z předchozího vzorce dostáváme $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zbývá ještě odvodit vztahy, kterými je určen tvar střední roviny deformované desky.

Rovnice průhybové plochy vnitřní plastické části desky vyplývá z prvního vztahu (5,13), do kterého dosadíme za k_t výraz (5,15):

$$-\frac{1}{a^2} \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} = \frac{\sigma_s}{3Gy} \sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right). \quad (5,31)$$

Za y je dosazena první aproximace (5,24): $y = h\eta_b \left(\frac{r}{b} \right)^{\frac{3}{2}}$. První a druhá aproximace a zřejmě i přesné řešení funkce ω je blízké hodnotě $\frac{\pi}{3}$. Argument $\left(\omega + \frac{\pi}{6} \right)$ je tedy v okolí 90° a my můžeme položit

$$\sin \left(\omega + \frac{\pi}{6} \right) = 1.$$

Dosadíme-li tyto vztahy do rovnice (5,31), dostaneme po jejím řešení a splnění okrajové podmínky, že pro $x = x_c$ je $w = w_c$, vztah (3,9). Jestliže všechna vnější vlákna budou plastická, musí být pro $x = 1$, $w = 0$. To je opět okrajová podmínka pro rovnici (5,31) a jejím řešením dostáváme vztah (3,11).

Ve vnější pružné části desky je rovnice průhybové plochy dána vztahem (5,1), ve kterém konstanty C_1 až C_4 jsou dány výrazy (5,28). Po jejich dosazení dostáváme vztah (3,10).

Na rozhraní mezi pružnou a plastickou oblastí je velikost průhybu $w|_{x=x_c} = w_c$ a její hodnota plyne z (3,10), dosadíme-li za x hodnotu x_c .

6. POROVNÁNÍ PŘESNOSTI ŘEŠENÍ

Přesnější průběh hledaných funkcí w a η bychom dostali vypočtením dalších aproximací.

Obecně $(n + 1)$ aproximaci ω a η stanovíme integrováním v rovnicích

$$\eta_{n+1} = \eta_b \sin \left(\omega_n + \frac{\pi}{6} \right) \exp \sqrt{3} \int_{e_b}^e \frac{\sin \omega_n}{\sin \left(\omega_n + \frac{\pi}{6} \right)} d\varrho, \quad (6,1)$$

$$\omega_{n+1} = \int_{e_b}^e \frac{\eta_{n+1}^2 \left[2\sqrt{3} \cotg \left(\omega_n + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \right] \sin \omega_n + 3(\sin \omega_n - P)}{\left\{ \eta_{n+1}^2 \left[1 - 2 \cotg^2 \left(\omega_n + \frac{\pi}{6} \right) \right] - 3 \right\} \sin \left(\omega_n + \frac{\pi}{6} \right)} d\varrho, \quad (6,2)$$

když za ω_n a η_n dosadíme předchozí aproximaci.

Protože funkce za integrálem jsou konečné a v dané oblasti proměnné i spojité, dá se na základě věty o existenci řešení dokázat, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \omega, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \eta.$$

Od druhé aproximace počínaje musíme výpočet provádět numericky. Na číselném příkladě bude ukázáno, že aproximace konvergují dostatečně rychle a že prakticky vystačíme s prvním přiblížením v uzavřeném tvaru.

Porovnání přesnosti řešení bylo provedeno na případě desky týchž rozměrů a téhož zatížení, jako v odstavci 4.

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty nulté, první a druhé aproximace ω a první a druhé aproximace η .

Pro posouzení konvergence jednotlivých aproximací jsou též uvedeny rozdíly $\Delta\omega_1 = \omega_1 - \omega_0$, $\Delta\omega_2 = \omega_2 - \omega_1$, $\Delta\eta_2 = \eta_2 - \eta_1$. Nultá aproximace ω (ω_0) je v celém oboru proměnné x konstantní

$$\omega_0 = 1,0472.$$

x	ω_1	ω_2	η_1	η_2	$\Delta\omega_1$	$\Delta\omega_2$	$\Delta\eta_2$
0,36788	1,0472	1,0472	0,200	0,200	0,0000	0,0000	0
0,38674	1,0441	1,0442	0,215	0,215	-0,0031	0,0001	0
0,40657	1,0413	1,0414	0,232	0,232	-0,0059	0,0001	0
0,42741	1,0385	1,0388	0,250	0,250	-0,0086	0,0002	0
0,44933	1,0358	1,0363	0,269	0,269	-0,0114	0,0005	0
0,47237	1,0333	1,0341	0,291	0,291	-0,0139	0,0008	0
0,49659	1,0310	1,0321	0,313	0,313	-0,0162	0,0011	0
0,52205	1,0290	1,0304	0,337	0,337	-0,0182	0,0014	0
0,54881	1,0272	1,0288	0,364	0,364	-0,0199	0,0015	0
0,57695	1,0255	1,0276	0,391	0,391	-0,0217	0,0021	0
0,60653	1,0244	1,0267	0,421	0,421	-0,0237	0,0022	0
0,63763	1,0234	1,0262	0,456	0,454	-0,0248	0,0028	-0,002
0,67032	1,0233	1,0262	0,492	0,489	-0,0239	0,0029	-0,003
0,70469	1,0234	1,0266	0,528	0,525	-0,0238	0,0033	-0,004
0,74082	1,0242	1,0277	0,573	0,566	-0,0230	0,0035	-0,006
0,77880	1,0261	1,0295	0,617	0,610	-0,0211	0,0034	-0,007
0,81873	1,0278	1,0322	0,663	0,656	-0,0184	0,0034	-0,007
0,86071	1,0326	1,0359	0,717	0,708	-0,0145	0,0032	-0,009
0,90484	1,0382	1,0411	0,771	0,762	-0,0089	0,0027	-0,009
0,95123	1,0455	1,0481	0,833	0,821	-0,0027	0,0026	-0,012
1	1,0551	1,0575	0,897	0,885	+0,0079	0,0024	-0,012

7. ZÁVĚR

Číselný výpočet ukázal, že první aproximace řešení rovnic pružně-plastické rovnováhy dává výsledky pro praxi dostatečně přesné. Tím bylo možno určit průběh obou složek ohybového momentu, průběh rozhraní mezi pružnou a plastickou oblastí a tvar průhybové plochy v uzavřeném tvaru. Diagram 3,1

umožňuje posouditi využití materiálu desky. Vidíme, že u desek s malým středním otvorem, tj. s malou hodnotou $\frac{b}{a}$ nastane sice brzy plastický stav, avšak zatížení můžeme několikrát zvětšit, než přejde celá deska do plastického stavu. Z diagramu dále plyne, že u desky, která je celá plastická, je velikost redukovaného zatížení konstantní a nezávislá na hodnotě $\frac{b}{a}$.

Literatura

- [1] V. V. Sokolovskij: Theorie plastičnosti. Technicko-vědecké vydavatelství, Praha 1952.
- [2] A. C. Грузовев: Изгиб круговых и кольцевых пластин переменной и постоянной толщины за пределом упругости. Инж. сборник, Том XX, Изд. АН СССР, Москва 1954.
- [3] G. Girkmann: Flächentragwerke. Springer, Vídeň 1946.
- [4] M. Hampl: Rotující kotouč v plastickém stavu. Strojnický sborník, Praha 1952.

Резюме

КОЛЬЦЕВАЯ ПЛАСТИНКА В УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

ЯН ДВОРЖАК (Jan Dvořák)

(Поступило в редакцию 19/II 1958 г.)

В статье приводится расчет напряженности и деформации кольцевой пластинки, с одного краю свободно опирающейся, а с другого нагруженной равномерно распределенной силой. Предполагается, что пластинка изготовлена из изотропного материала, который в пластическом состоянии не поддается упрочнению. Условие пластичности дано гипотезой Huber-Mises-Hencky.

Уравнения упруго-пластического равновесия решаются приближенным методом. На вычислительном примере показано, что уже первое приближение дает достаточно точные результаты. Это дает возможность установить графики искомых величин (изгибающие моменты, прогиб, границу между упругой и пластической областью) в закрытом виде.

Zusammenfassung

KREISRINGPLATTE IN ELASTISCH-PLASTISCHEM ZUSTANDE

JAN DVOŘÁK

(Eingegangen am 19. Februar 1958.)

Die Lösung des Spannungszustandes an einem Rande frei gestützter, am anderen durch gleichmässig verteilte Kraft belasteter Kreisringplatte. Es wird ein isotroper Werkstoff, der in plastischem Zustande keine Verfestigung aufweist, vorausgesetzt. Die Plastizitätsbedingung wird mit der Hypothese von Huber-Mises-Hencky gegeben.

Die Gleichungen des elastisch-plastischen Gleichgewichts werden mit dem Näherungsverfahren gelöst. An einem numerischen Beispiel wird gezeigt, dass bereits die erste Näherung zufriedenstellend genaue Ergebnisse gibt. Auf diese Weise besteht die Möglichkeit die Verläufe gesuchter Grössen (Biegemomente, Durchbiegung, Grenze zwischen der elastischen und der plastischen Zone) in geschlossener Form zu bestimmen.