Václav Doležal

O systémech lineárních integrodiferencialních rovnic v technických problémech

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 1, 1–17

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102642`

ČLÁNKY

O SYSTÉMECH LINEÁRNÍCH INTEGRODIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC V TECHNICKÝCH PROBLÉMECH

VÁCLAV DOLEŽAL

(Došlo dne 25. února 1958.)

DT: 517.948.34
621.3.001.2
621.8-52

Článek je věnován teorii systému lineárních integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty, na který vede formulace problémů dynamiky lineárních fysikálních soustav se soustředěnými parametry. Je definováno „zobecněné" a „klasické" řešení systému za předpokladu, že pravé strany systému (tj. vnější síly působící na soustavu) jsou lebesgueovsky integrovatelné funkce, odvozeny postačující podmínky pro existenci a ukázáno, že zobecněné řešení je limitou posloupnosti řešení klasických. Je provedeno fysikální zhodnocení dosažených výsledků a udán předpis na konstrukci řešení v praktických případech.

ÚVOD

Toto pojednání je věnováno vyšetření vlastností systémů lineárních integrodiferenciálních rovnic s konstantními koeficienty; k takovým systémům rovnic vede formulace problémů lineárních elektrických obvodů, lineárních mechanických a elektromechanických soustav (např. soustav automatické regulace) apod. Pojetí otázky řešení těchto systémů, tak jak se traduje v technické literatuře příslušných oborů, má řadu nedostatků, které mají svůj původ v povrchním matematickém zpracování celého problému.

Než přistoupíme k sestrojení obecné teorie, ukažme na jednoduchém příkladě elektrického obvodu charakter nesrovnalostí, vznikajících při běžném formálním řešení.

Uvažujme obvod z obr. 1 s elektromotorickou silou $e(t)$, která je rovna nule pro $t < 0$. Nechť obvod je pro $t < 0$ bez energie, tj. proudy x, y jsou nulové a kondensátor je bez náboje. Zajímá nás průběh proudu $x(t)$ v časech $t \geqq 0$.

V technické literatuře se úloha řeší následujícím způsobem: určí se admitance $\mathfrak{Y}(p)$, do které zdroj pracuje, a užije se pravidla, že *Laplaceův obraz proudu je roven součinu z obrazu napětí* $e(t)$ *a admitance* $\mathfrak{Y}(p)$.

V našem případě nalezneme známým způsobem $\mathcal{Y}(p) = \dfrac{p^2 + 3p + 1}{2p^2 + 6p + 3}$, takže pro obraz $X(p)$ funkce $x(t)$ platí

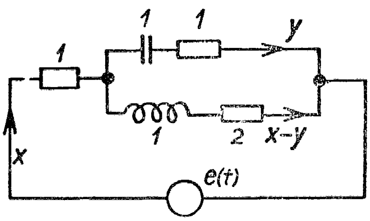
$$X(p) = \frac{p^2 + 3p + 1}{2p^2 + 6p + 3} E(p) , \tag{1}$$

kde $E(p)$ je obrazem $e(t)$. Bude-li specielně $e(t)$ „jednotkový skok", tj. $e(t) = 1$ pro $t \geqq 0$, obdržíme snadno

$$x(t) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{12}\left(\sqrt{3} + 1\right) \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} - \tfrac{1}{12}\left(\sqrt{3} - 1\right) \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} , \quad \lambda_{12} = \tfrac{1}{3}\left(3 \mp \sqrt{3}\right) \text{ pro } t \geqq 0 .$$

Všimněme si, že $x(0) = \frac{1}{2}$, tj. že proud při zavedení napětí „naskočí" na hodnotu $\frac{1}{2}$.

Řešme nyní předloženou úlohu „příměji", tj. bez použití pravidla o obrazu proudu tak, že sestavíme na základě Kirchhoffových zákonů soustavu rovnic pro daný obvod. (Právě tak by bylo nutno postupovat, kdyby uvažovaný systém nebyl před okamžikem přiložení napětí v klidu.) Má tedy pro $t \geqq 0$ platit



Obr. 1.

$$\begin{aligned} x + \int_0^t y \,\mathrm{d}\tau + y &= e(t) , \\ 3x + \dot{x} - 2y - \dot{y} &= e(t) . \end{aligned} \tag{2}$$

Pro nalezení řešení (2) se pak předpokládá, že existují funkce $x(t)$, $y(t)$, mající v $\langle 0, \infty)$ první derivaci a Laplaceovy obrazy $X(p)$ resp. $Y(p)$. Aplikujeme-li nyní Laplaceovu transformaci na (2), nalezneme

$$\begin{aligned} X + Y\left(\frac{1}{p} + 1\right) &= E(p) , \\ X(p + 3) - Y(p + 2) &= E(p) + c_1 - c_2 , \end{aligned} \tag{3}$$

kde $c_1 = x(0)$, $c_2 = y(0)$.

První nepříjemnost, ke které takto přicházíme, je, že a priori neznáme čísla c_1, c_2. Je zřejmé, že k jejich stanovení nám znalost hodnot $x(t)$, $y(t)$ pro $t < 0$ nikterak nepomůže. Abychom tedy „správné" řešení nalezli, musíme připojit nějaký další předpoklad odvozený z fysikální podstaty věci. V našem případě nám pomůže ta okolnost, že „proud tekoucí cívkou musí narůstat spojitě", tj. že musí být $c_1 - c_2 = 0$. Potom skutečně obdržíme pro $X(p)$ z (3) stejný výraz jako (1).

Nyní možno klást otázky: Proč jsme při posledním postupu narazili na „úskalí", a v prvém případě tomu tak nebylo, ačkoli ono pravidlo o obrazu proudu, které jsme tam užili, bývá odvozováno právě na základě systému (2)?

Dostaneme správný výsledek, budeme-li při druhém postupu řešení obecně klást $x(0) = y(0) = \ldots = 0$, (byl-li ovšem systém v klidu)?

Všimněme si v této souvislosti ještě jednoho faktu. Uvažme ten případ, kdy funkce $e(t)$ je spojitá v $\langle 0, \infty)$ a v některých bodech nemá derivaci. Z (1) potom plyne, že v týchž bodech zároveň $x(t)$ nemá derivaci.[1]) Je potom takto sestrojená funkce $x(t)$ skutečně řešením soustavy (2), nebo jaký lze vůbec soustavě (2) dát smysl?

Promítneme-li si tyto nepříjemnosti na případ nějakého dosti složitého systému, vidíme, že nezbude asi nic jiného, než pojetí celého problému trochu precisovat. Přitom se budeme snažit definovat řešení systémů typu (2) tak, aby definice měla smysl i tehdy, když pravé strany (2) patří do dostatečně široké třídy funkcí, aby teorie byla schopná zpracovat např. otázky šumu obvodů apod.

TEORIE SYSTÉMU

Přistupme tedy konečně k vlastnímu problému! Zaveďme tato označení:

Buď S systém všech funkcí $f(t)$, definovaných na $\langle 0, \infty)$, které mají tyto vlastnosti:

1) $f(t)$ má Lebesgueův integrál $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ pro každé $0 < t < \infty$,

2) existují čísla ξ, $\eta \geqq 0$ (obecně závislá na $f(t)$) tak, že $\left|\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq \eta\,\mathrm{e}^{\xi t}$ (4)

pro každé $t \in \langle 0, \infty)$.

Přitom funkce $f(t), g(t) \in S$ budeme pokládat za sobě rovné, jestliže $f(t) - g(t)$ je *skoro všude* rovná nule.

Pojem řešení soustavy integrodiferenciálních rovnic zavedeme takto:

Buďte α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik}, δ_i, $1 \leqq i$, $k \leqq r$ reálná čísla, $f_i(t) \in S$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Řekneme, že soustava $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t) \in S$ je *zobecněným řešením* systému

$$\sum_{k=1}^{r}(\alpha_{ik}x_k + \beta_{ik}\dot{x}_k + \gamma_{ik}\int_0^t x_k\,\mathrm{d}\tau) + \delta_i = f_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{5}$$

při počátečních podmínkách $c_1, c_2, \ldots, c_r$, jestliže soustava $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$ splňuje systém

$$\sum_{k=1}^{r}(\alpha_{ik}\int_0^t x_k\,\mathrm{d}\tau + \beta_{ik}x_k - \beta_{ik}c_k + \gamma_{ik}\int_0^t\int_0^\tau x_k\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau) + \delta_i t = \int_0^t f_i\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{6}$$
$$i = 1, 2, \ldots, r\,,$$

přičemž rovnost pojímáme ve smyslu *skoro všude*.

---

[1]) Zřejmě totiž originálem k $X(p)$ je $x(t) = \frac{1}{2}e(t) - \int_0^t a(t-\tau)\,e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, kde $a(t)$ je originál k $\dfrac{1}{2(2p^2 + 6p + 3)}$, přičemž konvoluce stojící na pravé straně má derivaci.

Stane-li se dokonce, že všechny funkce $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$ jsou spojité v $\langle 0, \infty)$, splňují podmínky $x_i(0) = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$, mají spojitou derivaci v $(0, \infty)$ a vyhovují identicky (5) v $(0, \infty)$, nazveme soustavu $x_1(t), x_2(t), \ldots$ $\ldots, x_r(t)$ *klasickým řešením* systému (5). („Vyhovují identicky" značí, že levé strany (5) jsou v každém bodě $(0, \infty)$ rovny pravým stranám.)

Z vyslovené definice lehko vidíme, že platí následující triviální tvrzení: *je-li $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$ klasické řešení* (5), *pak je zároveň zobecněným řešením* (5).

Naším úkolem bude nyní v prvé řadě nalézt postačující podmínky pro existenci klasického resp. zobecněného řešení, a poté zkoumat fysikální význam zobecněného řešení.

Pro další úvahy bude účelná znalost následujícího zřejmého tvrzení:

Je-li soustava $v_1(t), v_2(t), \ldots, v_r(t)$ zobecněným (klasickým) řešením systému

$$\sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} v_k + \beta_{ik} \dot{v}_k + \gamma_{ik} \int_0^t v_k \,\mathrm{d}\tau) + \delta_i = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{7}$$

při počátečních podmínkách $c_1, c_2, \ldots, c_r$, soustava $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_r(t)$ zobecněným (klasickým) řešením systému

$$\sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} w_k + \beta_{ik} \dot{w}_k + \gamma_{ik} \int_0^t w_k \,\mathrm{d}\tau) = f_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{8}$$

při počátečních podmínkách $0, 0, \ldots, 0$, *pak soustava $x_k(t) = v_k(t) + w_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, r$ je zobecněným (klasickým) řešením* (5) *při počátečních podmínkách $c_1, c_2, \ldots, c_r$.*

Zabývejme se nyní systémem (7). Pro stručnost vyjadřování zavedeme tuto terminologii: řekneme, že koeficienty systému (5) splňují podmínku

1) P1, jestliže determinant matice r-tého řádu

$$Z(p) = \left[\alpha_{ik} + p\beta_{ik} + \frac{1}{p}\gamma_{ik}\right] \tag{9}$$

není identicky roven nule,

2) P2, jestliže je splněna P1 a prvky matice $Z^{-1}(p)$ jsou regulární v bodě $p = \infty$.

Zaveďme ještě matici $B = [\beta_{ik}]$ r-tého řádu a vektory $c = [c_i]$, $d = [\delta_i]$ téhož řádu. Pak platí

Věta 1. *Nechť koeficienty systému* (7) *splňují* P1. *Existuje-li vlastní*

$$\lim_{p\to\infty} Z^{-1}(p)(pBc - d) = c\,, \tag{10}$$

pak existuje jediné klasické řešení (7), *přičemž pro vektor Laplaceových obrazů $V(p)$ řešení $v_1(t), v_2(t), \ldots, v_r(t)$ platí $V(p) = Z^{-1}(p)\,(Bc - \frac{1}{p}d)$. Rovnice* (10) *je při splnění* P1 *zároveň nutnou podmínkou pro existenci klasického řešení* (7).

Důkaz: Definujme funkce $V_k(p)$, $k = 1, 2, \ldots, r$ systémem rovnic

$$\sum_{k=1}^{r} \left\{ \left(\alpha_{ik} + p\beta_{ik} + \frac{1}{p} \gamma_{ik} \right) V_k(p) - \beta_{ik} c_k \right\} + \frac{\delta_i}{p} = 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \,. \tag{11}$$

Zavedeme-li vektor $V(p) = [V_i(p)]$, můžeme předešlou soustavu zapsat ve tvaru

$$Z(p) \, V(p) - Bc + \frac{1}{p} d = 0 \,. \tag{12}$$

Poněvadž platí P1, existuje jediný vektor $V(p)$, splňující (12), a to

$$V(p) = Z^{-1}(p) \left(Bc - \frac{1}{p} d \right) .$$

Lehko vidíme, že prvky $V(p)$ jsou racionálními funkcemi p. Z (10) plyne, že je

$$\lim_{p \to \infty} pV(p) = c \,, \tag{12a}$$

a tedy tím spíše $\lim\limits_{p \to \infty} V(p) = 0$. To znamená, že $V_k(p)$, $k = 1, 2, \ldots, r$ jsou Laplaceovými obrazy. Buďte $v_k(t)$ spojité originály k $V_k(p)$, které jak známo, mají tvar $\sum\limits_m e^{\lambda_m t} \{P_m(t) \cos \mu_m t + Q_m(t) \sin \mu_m t\}$; ($P_m$, Q_m jsou mnohočleny v t). Mají tedy funkce $v_k(t)$ v $\langle 0, \infty)$ dokonce všechny derivace. Podle Tauberových vět však z (12a) plyne, že $v_k(0) = c_k$, $k = 1, 2, \ldots, r$. (Srv. [2], str. 19.)

Ukažme konečně, že takto sestrojená soustava funkcí $v_1(t)$, $v_2(t)$, $\ldots$, $v_r(t)$ splňuje (7). K tomu cíli utvořme funkce

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} v_k + \beta_{ik} \dot{v}_k + \gamma_{ik} \int_0^t v_k \, d\tau) + \delta_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \,.$$

Zřejmě $\varphi_i(t)$ jsou spojité na $\langle 0, \infty)$. Označíme-li $\Phi_i(p)$ Laplaceův obraz $\varphi_i(t)$, lehko vidíme na základě (11), že $\Phi_i(p) = 0$, takže $\varphi_i(t)$ je rovná nule skoro všude. Ježto ale $\varphi_i(t)$ je spojitá, je $\varphi_i(t) \equiv 0$. Tvoří tedy soustava $v_1(t)$, $v_2(t)$, $\ldots$ $\ldots$, $v_r(t)$ klasické řešení (7).

Dokažme ještě unicitu! Buď tedy $\tilde{v}_1(t)$, $\tilde{v}_2(t)$, $\ldots$, $\tilde{v}_r(t)$ jiné klasické řešení (7). Pak zřejmě platí pro $t \geqq 0$

$$\sum_{k=1}^{r} \{ \alpha_{ik}(v_k - \tilde{v}_k) + \beta_{ik}(v_k - \tilde{v}_k)^{\cdot} + \gamma_{ik} \int_0^t (v_k - \tilde{v}_k) \, d\tau \} = 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \,,$$

$$v_k(0) - \tilde{v}_k(0) = 0 \,, \quad k = 1, 2, \ldots, r \,.$$

Z této soustavy však v důsledku platnosti P1 plyne, že obrazy funkcí $v_k(t) - \tilde{v}_k(t)$ jsou rovny nule a tudíž že $v_k(t) - \tilde{v}_k(t)$ je rovná nule skoro všude. Poněvadž však $v_k(t) - \tilde{v}_k(t)$ je spojitá v $\langle 0, \infty)$, je $v_k(t) - \tilde{v}_k(t) \equiv 0$, c. b. d.

To, že (10) je též podmínkou pro existenci klasického řešení, vyplývá bezprostředně z výše zmíněné Tauberovy věty.

Věnujme nyní několik slov fysikálnímu významu rovnice (10)! Je zřejmé, že uvažujeme-li nějaký systém se soustředěnými parametry, na který nepůsobí vnější síly a jehož chování je popsáno soustavou (7), pak rovnice (10) je podmínkou pro to, aby přechodový děj, který se v systému odehraje, spojitě vyšel z předepsaného počátečního stavu. To znamená, že splnění (10) zabezpečuje *kompatibilitu* počátečních podmínek, tj. že právě takový předepsaný počáteční stav je na fysikálním systému možný. Existuje-li totiž například limita v rovnici (10) a není-li rovna c, pak tento případ nelze fysikálně realisovat. Proto ani nebudeme odvozovat slabší podmínky než (10), za kterých existuje zobecněné řešení (7), které zřejmě pak nemusí být klasickým řešením.

Pro větší názornost ilustrujme si věc na příkladě elektrického obvodu, který jsme uvedli úvodem!

Nechť tedy v čase $t = 0$ je na kondensátoru náboj q a proudy mají hodnoty $x(0) = c_1$, $y(0) = c_2$.

Pro $t > 0$ platí

$$x + \int_0 y \,\mathrm{d}\tau + y + q = 0\,, \tag{13}$$

$$3x - \dot{x} - 2y - \dot{y} = 0\,.$$

Zde je $Z(p) = \begin{bmatrix} 1;\ 1 + \dfrac{1}{p} \\ p + 3;\ -p - 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0; & 0 \\ 1; & -1 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$.

Snadným výpočtem nalezneme $\lim\limits_{p\to\infty} Z^{-1}(p)(pBc - d) = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} c_1 - c_2 - q \\ -c_1 + c_2 - q \end{bmatrix}$.

Má-li tedy existovat klasické řešení, musí být poslední vektor roven c, což vede k rovnici $c_1 + c_2 + q = 0$. Fysikálně tato rovnice značí, že hodnoty c_1, c_2, q, které určují počáteční stav, splňují Kirchhoffovy zákony.

Zabývejme se nyní systémem (8)! Zde platí

Věta 2. *Nechť $f_i(t) \in S$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Splňují-li koeficienty systému (8) podmínku P2, pak při počátečních podmínkách 0, 0, …, 0 existuje jediné zobecněné řešení.*[2] *Přitom pro vektor $W(p)$ obrazů řešení platí $W(p) = Z^{-1}(p)\,F(p)$, kde $F(p)$ je vektor obrazů funkcí $f_i(t)$.*

Nadto platí: existuje-li bod $t_0 \in \langle 0, \infty)$, ve kterém jsou všechny funkce $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ spojité, pak existuje takové řešení $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_r(t)$, že

a) funkce $w_i(t)$ jsou spojité ve všech bodech, ve kterých jsou všechny $f_i(t)$ spojité,

b) jsou-li mimo to všechny $f_i(t)$ ohraničené v každém intervalu $\langle T_1, T_2\rangle$, $0 < T_1 < T_2 < \infty$ a mají-li derivaci v některém bodě $t > 0$, pak v tomto bodě mají $w_i(t)$ derivaci.

[2]) Poznamenejme, že „jediné řešení" rozumíme v tom smyslu, že všechna řešení (8) se liší jen na množině míry nula.

K důkazu použijeme následující **pomocné věty:**

Buďte $\quad f_1(t), f_2(t) \in S, \; f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int\limits_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) \, d\tau \, .$ (14)

Pak platí:

1) *Je-li $f_1(t)$ v každém konečném intervalu $\langle 0, T \rangle$ ohraničená, pak $f(t)$ existuje a je spojitá pro všechna $t \geqq 0$.*

2) *Je-li $f_1(t)$ spojitá v $\langle 0, \infty)$ a má derivaci v $(0, \infty)$, a jsou-li funkce $f_1^{\cdot}(t)$ a $f_2(t)$ ohraničené v každém intervalu $\langle T_1, T_2 \rangle$, $0 < T_1 < T_2 < \infty$, potom v každém bodě $t > 0$, ve kterém je $f_2(t)$ spojitá, existuje derivace*

$$f^{\cdot}(t) = f_1^{\cdot}(t) * f_2(t) + f_1(0) f_2(t) \, . \tag{15}$$

3) *Má-li $f_1(t)$ derivaci skoro všude, pak $f(t)$ má derivaci skoro všude a platí* (15). (Důkaz této věty nalezne čtenář např. v [1], str. 108—118.)

Dokažme nyní větu 2!

Definujme vektor $W(p) = [W_i(p)]$ rovnicí

$$Z(p) \, W(p) = F(p) \, . \tag{16}$$

Ježto je splněna podmínka P1, existuje jediný vektor $W(p) = Z^{-1}(p) \, F(p)$ splňující (16). Označme pro zkrácení $Z^{-1}(p) = [A_{ik}(p)]$, takže je $W_i(p) = \sum\limits_{k=1}^{r} A_{ik}(p) \, F_k(p)$. Poněvadž platí P2, existují čísla μ_{ik} tak, že je $A_{ik}(p) = \mu_{ik} + \tilde{A}_{ik}(p)$, kde $\tilde{A}_{ik}(p)$ má nulu v bodě $p = \infty$. Je-li $a_{ik}(t)$ spojitý originál k $\tilde{A}_{ik}(p)$, klaďme

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{r} \mu_{ik} f_k(t) + a_{ik}(t) * f_k(t) \, , \quad i = 1, 2, \ldots, r \, . \tag{17}$$

Poněvadž $a_{ik}(t)$ má v $\langle 0, \infty)$ všechny derivace, pak podle pomocné věty $a_{ik}(t) * f_k(t)$ existuje a je spojitá pro všechna $t \geqq 0$. V důsledku toho je podle (17) $w_i(t)$ spojitá v každém bodě, ve kterém jsou všechny $f_k(t)$ spojité. Jsou-li dokonce splněny podmínky b) věty 2, pak v každém bodě, ve kterém $f_k(t)$ má derivaci (a je v něm tedy spojitá), existuje podle 2) pomocné věty derivace

$$\{a_{ik}(t) * f_k(t)\}^{\cdot} = a_{ik}^{\cdot}(t) * f_k(t) + a_{ik}(0) \, f_k(t) \, , \tag{18}$$

takže podle (17) mají $w_i(t)$ derivaci v každém bodě, kde mají derivaci všechny funkce $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, r$.

Konečně ze známé věty o obrazu konvoluce plyne, že obrazem $w_i(t)$ je $W_i(p)$. (Zřejmě existuje σ tak, že pro $\operatorname{Re} p > \sigma$ konvergují Laplaceovy integrály funkcí $a_{ik}(t)$, $f_k(t)$ absolutně, viz [1], str. 123).

Utvořme nyní funkce

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} \int\limits_0^t w_k \, d\tau + \beta_{ik} w_k + \gamma_{ik} \int\limits_0^t \int\limits_0^\tau w_k \, d\sigma \, d\tau) - \int\limits_0^t f_i \, d\tau \, , \quad i = 1, 2, \ldots, r \, . \tag{19}$$

Zřejmě $\varphi_i(t) \in S$. Snadno zjistíme podle (16), že obrazy funkcí $\varphi_i(t)$ jsou rovny nule, takže $\varphi_i(t) = 0$ skoro všude. Sestrojená soustava $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_r(t)$ je tedy zobecněným řešením (8). Důkaz unicity, tj. že (8) nemá v S jiné řešení než právě sestrojené, je obdobný jako u věty 1.

Všimněme si v této souvislosti blíže případu, kdy funkce $f_i(t)$ systému (8) jsou spojité v $\langle 0, \infty)$, mají spojitou derivaci v $(0, \infty)$ a splňují podmínku $f_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Z dokázaného vyplývá, že v tomto případě všechny $w_i(t)$ podle (17) jsou spojité v $\langle 0, \infty)$ a mají spojitou derivaci v $(0, \infty)$. Nadto ze (17) plyne, že je $w_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Dále je zřejmé z (19), že $\varphi_i(t)$ jsou spojité v $\langle 0, \infty)$, takže $\varphi_i(t) = 0$ všude v $\langle 0, \infty)$. Poněvadž ale členy levé strany (19) mají v $(0, \infty)$ derivaci, je

$$\varphi_i'(t) = \sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} w_k + \beta_{ik} w_k' + \gamma_{ik} \int_0^t w_k \, d\tau) - f_i = 0 \,, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

pro $t > 0$, takže soustava $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_r(t)$ je klasickým řešením (8). Platí tedy

Věta 3. *Nechť koeficienty systému* (8) *splňují* P2. *Pak postačující podmínkou pro existenci jediného klasického řešení* (8) *při nulových počátečních podmínkách je*

1) *funkce $f_i(t) \in S$, $i = 1, 2, \ldots, r$ jsou spojité v $\langle 0, \infty)$ a mají spojitou derivaci v $(0, \infty)$,*

2) *$f_i(0) = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Všimněme si, že podmínky věty 3 nejsou nutnými podmínkami, jak ukazuje příklad „systému" $3x + \dot{x} + 2 \int_0^t x \, d\tau = f$, $x(0) = 0$, f spojitá na $\langle 0, \infty)$, majícího klasické řešení $x(t) = \int_0^t (2e^{-2\tau} - e^{-\tau}) f(t - \tau) \, d\tau$. (Srovnej ostatně s následující větou 4.)

Poznámka 1. Je-li v systému (8) $f_{h+1}(t) = f_{h+2}(t) = \ldots = f_r(t) = 0$, $h < r$, možno zřejmě ve větě 2 a 3 nahradit podmínku P2 *oslabenou podmínkou:* v bodě $p = \infty$ jsou regulární prvky $A_{ik}(p)$ pro $1 \leqq i \leqq r$, $1 \leqq k \leqq h$.

Pro úplnost uveďme ještě následující větu:

Věta 4. *Nechť $f_i(t) \in S$, $i = 1, 2, \ldots, r$ a koeficienty systému* (5) *splňují podmínku* $\det B \neq 0$. *Pak při libovolných počátečních podmínkách $c_1, c_2, \ldots, c_r$ existuje jediné v $\langle 0, \infty)$ spojité zobecněné řešení $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$ systému* (5).

Vektor $X(p)$ jeho obrazů je dán vztahem

$$X(p) = Z^{-1}(p) \left\{ Bc - \frac{1}{p} d + F(p) \right\} .$$

Nadto platí:

a) $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ *mají derivaci skoro všude,*

b) $x_i(0) = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Jsou-li dokonce $f_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ *spojité v* $\langle 0, \infty)$, *pak soustava* $x_1(t), x_2(t), \ldots$ $\ldots, x_r(t)$ *je zároveň klasickým řešením.*

Důkaz: Pro dosti velká $|p|$ se funkce $\det Z(p)$ chová jako $p^r \det B$, takže je splněna podmínka P1. Vezmeme-li v úvahu tu okolnost, že každý prvek matice $Z^{-1}(p)$ je podílem subdeterminantu $r - 1$-ho řádu matice $Z(p)$ a determinantu $Z(p)$ (který je r-tého řádu), lehko zjistíme, že existuje

$$\lim_{p \to \infty} p Z^{-1}(p) = B^{-1} . \tag{20}$$

Tím spíše je $\lim\limits_{p \to \infty} Z^{-1}(p) = 0$, takže prvky $Z^{-1}(p)$ jsou obrazy. Z (20) vyplývá, že pro libovolné vektory c a d je $\lim\limits_{p \to \infty} Z^{-1}(p)(pBc - d) = c$, což je rovnice (10) věty 1. To znamená, že existuje jediné klasické řešení systému

$$\sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} v_k + \beta_{ik} \dot{v}_k + \gamma_{ik} \int_0^t v_k \, d\tau) + \delta_i = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{21}$$

při libovolných počátečních podmínkách $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Ukažme dále, že systém

$$\sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} w_k + \beta_{ik} \dot{w}_k + \gamma_{ik} \int_0^t w_k \, d\tau) = f_i , \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{22}$$

má při počátečních podmínkách $0, 0, \ldots, 0$ jediné v $\langle 0, \infty)$ spojité zobecněné řešení.

K tomu cíli definujeme opět vektor $W(p) = [W_i(p)]$ rovností $Z(p)\, W(p) = F(p)$, tj. $W(p) = Z^{-1}(p)\, F(p)$. Označíme-li $Z^{-1}(p) = [A_{ik}(p)]$, je $W_i(p) = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}(p)\, F_k(p)$. Ježto jsme už ukázali, že $A_{ik}(p)$ jsou obrazy, označme $a_{ik}(t)$ k nim příslušné spojité originály a položme

$$w_i(t) = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}(t) * f_k(t) . \tag{23}$$

Z tvrzení 1) pomocné věty plyne, že $w_i(k)$ jsou spojité v $\langle 0, \infty)$ a že je $w_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Z tvrzení 3) pak hned vidíme, že $w_i(t)$ mají derivaci skoro všude. Jsou-li $f_i(t)$ spojité v $\langle 0, \infty)$, sleduje z tvrzení 2), že $w_i(t)$ mají derivaci v každém bodě $t > 0$. Z rovnice (15) a 1) je vidět, že $\dot{w}_i(t)$ jsou dokonce spojité.

Utvoříme-li opět funkce

$$\varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} \int_0^t w_k \, d\tau + \beta_{ik} w_k + \gamma_{ik} \int_0^t \int_0^\tau w_k \, d\sigma \, d\tau) - \int_0^t f_i \, d\tau , \quad i = 1, 2, \ldots, r , \tag{24}$$

snadno zjistíme, že $\varphi_i(t) = 0$ skoro všude, a poněvadž $\varphi_i(t)$ jsou spojité, že je $\varphi_i(t) = 0$ všude v $\langle 0, \infty)$. Jsou-li pak $f_i(t)$ spojité v $\langle 0, \infty)$, mají členy levé strany (24) v $(0, \infty)$ derivaci a je

$$\sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} w_k + \beta_{ik} \dot{w}_k + \gamma_{ik} \int_0^t w_k \, d\tau) - f_i = 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \,.$$

Tvoří tedy soustava $x_i(t) = v_i(t) + w_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ zobecněné resp. klasické řešení (5). Důkaz unicity je zřejmý.

Přistupme nyní k objasnění hlubší souvislosti mezi zobecněným a klasickým řešením. Bez újmy obecnosti uvažujme dále systémy (8). Pak platí

Věta 5. *Nechť koeficienty systému*

$$\sum_{k=1}^{r} (\alpha_{ik} w_k + \beta \dot{w}_k + \gamma_{ik} \int_0^t w_k \, d\tau) = f_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{25}$$

splňují podmínku P2. *Buďte* $f_i(t), f_i^{(n)}(t) \in S$, $i = 1, 2, \ldots, r$, $n = 1, 2, \ldots$, *přičemž* $\int_0^T |f_i(\tau) - f_i^{(n)}(\tau)| \, d\tau \to 0$ *pro každé* $T > 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. *Potom pro posloupnost zobecněných řešení* $w_1^{(n)}(t), w_2^{(n)}(t), \ldots, w_r^{(n)}(t)$ *systémů*

$$\sum_{i=1}^{r} (\alpha_{ik} w_k^{(n)} + \beta_{ik} \dot{w}_k^{(n)} + \gamma_{ik} \int_0^t w_k^{(n)} \, d\tau) = f_i^{(n)} \,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{26}$$

při počátečních podmínkách 0, 0, ..., 0 *platí*

$$\int_0^T |w_i(\tau) - w_i^{(n)}(\tau)| \, d\tau \to 0 \tag{26a}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, r$ *a každé* $T > 0$, *kde* $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_r(t)$ *značí zobecněné řešení* (25) *při počátečních podmínkách* 0, 0, ..., 0.

Důkaz: Podle (17) lze řešení (25) resp. (26) psát

$$\begin{aligned} w_i(t) &= \sum_{k=1}^{r} \mu_{ik} f_k(t) + a_{ik}(t) * f_k(t) \,, \\ w_i^{(n)}(t) &= \sum_{k=1}^{r} \mu_{ik} f_k^{(n)}(t) + a_{ik}(t) * f_k^{(n)}(t) \,, \quad i = 1, 2, \ldots, r \,. \end{aligned} \tag{27}$$

Snadno nahlédneme, že $a_{ik}(t) * f_k^{(n)}(t) \to a_{ik}(t) * f_k(t)$ stejnoměrně na každém konečném intervalu $\langle 0, T \rangle$. Vskutku, platí $|a_{ik}(t) * f_k(t) - a_{ik}(t) * f_k^{(n)}(t)| \leq \leq \max_{\tau \in \langle 0, T \rangle} |a_{ik}(\tau)| \int_0^T |f_k(\tau) - f_k^{(n)}(\tau)| \, d\tau \to 0$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$. Odtud však na základě (27) vyplývá, že $\int_0^T |w_k(\tau) - w_k^{(n)}(\tau)| \, d\tau \to 0$ c. b. d.

Z věty 5 bezprostředně vyplývá následující

Věta 6. *Splňují-li koeficienty systému* (25) *podmínku* P2, *pak jeho zobecněné řešení je limitou (ve smyslu konvergence podle* 26a) *posloupnosti klasických řešení systémů se stejnými koeficienty.*

Věta zřejmě bude dokázána, ukážeme-li, že ke každé $f \in S$ existuje posloupnost $f_n(t)$ v $\langle 0, \infty)$ spojitých funkcí, které mají v $(0, \infty)$ spojitou derivaci a splňují podmínku $f_n(0) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, přičemž $\int_0^T |f(\tau) - f_n(\tau)| \, d\tau \to 0$ pro každé $T < \infty$.

Buď tedy $f(t) \in S$. Definujme funkci $\Psi_h(t)$ předpisem

$$\Psi_h(t) = \{\int_0^h \xi_h(\tau) \, d\tau\}^{-1} \int_0^t \xi_h(\tau) \, d\tau ,$$

kde

$$\begin{aligned} \xi_h(t) &= \exp\left(-\frac{1}{t} - \frac{1}{h-t}\right) \quad &\text{pro } t \in (0, h) , \\ &= 0 \quad &\text{pro } t \geqq h \text{ a } t = 0 . \end{aligned}$$

Zřejmě $\psi_h(t)$ má v $\langle 0, \infty)$ všechny derivace, je $\Psi_h(0) = 0$ a $0 < \Psi_h(t) < 1$ pro $t \in (0, h)$, $\Psi_h(t) = 1$ pro $t \geqq h$.

Zvolme rostoucí posloupnost čísel $T_n \to \infty$ a klesající posloupnost $\varepsilon_n \to 0$. Podle zobecněné Weierstrassovy věty (viz [4], str. 46) existuje mnohočlen $P_n(t)$ tak, že $\int_0^{T_n} |f(\tau) - P_n(\tau)| \, d\tau < \frac{\varepsilon_n}{2}$. Definujme pro každé celé n funkci $f_n(t) = \Psi_{h_n}(t) \, P_n(t)$ pro $t \geqq 0$, kde $h_n = \dfrac{\varepsilon_n}{2 \max\limits_{\tau \in \langle 0,1 \rangle} |P_n(\tau)|}$. Zřejmě $f_n(t)$ mají v $\langle 0, \infty)$ všechny derivace a je $f_n(0) = 0$. Tvrdím, že $\int_0^T |f(\tau) - f_n(\tau)| \, d\tau \to 0$ pro každé $0 < T < \infty$. Vskutku, zvolme $T > 0$ a $\varepsilon > 0$. Potom pro všechna n, pro která je $T_n > T$ a $\varepsilon > \varepsilon_n$, platí $\int_0^T |f - f_n| \, d\tau < \int_0^{T_n} |f - P_n| \, d\tau + \int_0^{T_n} |P_n| |1 - \Psi_{h_n}| \, d\tau < \frac{\varepsilon_n}{2} + \max\limits_{\tau \in \langle 0,1 \rangle} |P_n(\tau)| \, h_n = \varepsilon_n < \varepsilon$, c. b. d.

Tvrzení vět 5,6 lze zesílit, jestliže funkce $f(t)$, $f_n(t)$ budou speciálnějšího charakteru. Všimněme si proto jednoho takového případu, který pro aplikace má největší důležitost. Zaveďme proto následující pojmy: řekneme, že funkce $f(t) \in S$ je *po částech spojitá*, jestliže $f(t)$ je v každém konečném intervalu $\langle 0, T \rangle$ ohraničená a přitom existuje v $\langle 0, T \rangle$ nejvýše konečný počet bodů, ve kterých $f(t)$ není spojitá.

Jsou-li $f(t)$, $f_n(t) \in S$, $n = 1, 2, \ldots$, po částech spojité, řekneme, že $f_n(t) \to f(t)$ *téměř stejnoměrně* na $\langle 0, T \rangle$, jestliže

a) $f_n(t)$ jsou vzhledem k n stejnoměrně ohraničené na $\langle 0, T\rangle$,

b) $f_n(t) \to f(t)$ stejnoměrně na každém intervalu $\langle a, b\rangle \subset (0, T)$, který neobsahuje body nespojitosti funkce $f(t)$.

Pak platí

Věta 7. *Jestliže $f_n(t) \to f(t)$ téměř stejnoměrně na $\langle 0, T\rangle$, pak*

$$\int_0^T |f(\tau) - f_n(\tau)| \, d\tau \to 0 .$$

Důkaz: Zvolme $\varepsilon > 0$. Buďte $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < T$ všechny body nespojitosti funkce $f(t)$ v $(0, T)$. Označme C ono číslo, pro které je $|f(t)| < C$, $|f_n(t)| < C$, $n = 1, 2, \ldots$ na $\langle 0, T\rangle$ a položme

$$h = \frac{1}{2} \min \left[\frac{\varepsilon}{4(k+1)\,C}\,;\, t_1;\, t_2 - t_1;\, t_3 - t_2;\, \ldots,\, t_k - t_{k-1};\, T - t_k\right]. \quad (28)$$

Ježto $f_n(t) \to f(t)$ téměř stejnoměrně na $\langle 0, T\rangle$, existuje $N > 0$ tak, že pro každé $n \geqq N$ bude

$$|f(t) - f_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2T} \quad (29)$$

pro $t \in A = \langle h;\, t_1 - h\rangle \cup \langle t_1 + h, t_2 - h\rangle \cup \ldots \langle t_{k-1} + h;\, t_k - h\rangle \cup \cup \langle t_k + h;\, T - h\rangle$. Dále je $|f(t) - f_n(t)| \leqq 2C$ pro $t \in \langle 0, T\rangle$. Platí tedy pro každé $n \geqq N$: $\int_0^T |f - f_n| \, d\tau = \int_A |f - f_n| \, d\tau + \int_{\langle 0,T\rangle - A} |f - f_n| \, d\tau < \frac{\varepsilon}{2T} T + 4Ch(k+1) \leqq \varepsilon$ podle (28), (29), což jsme měli dokázat.

Jsou-li nyní funkce $f_i(t)$, stojící v rovnicích (25) po částech spojité, pak zřejmě zobecněné řešení (25), dané rovnicemi (27), je rovněž po částech spojité, přičemž funkce $w_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$ nemají jiné body nespojitosti než funkce $f_i(t)$. Nazveme-li toto řešení *základním*, vidíme, že platí:

Věta 8. *Buďte $f_i(t)$, $f_i^{(n)}(t) \in S$; $i = 1, 2, \ldots, r$; $n = 1, 2, \ldots$ po částech spojité a nechť $f_i^{(n)}(t) \to f_i(t)$ téměř stejnoměrně na každém konečném intervalu $\langle 0, T\rangle$. Je-li splněna* P2, *pak posloupnost základních řešení* (26) *konverguje k základnímu řešení* (25) *téměř stejnoměrně na každém konečném $\langle 0, T\rangle$.*

Poznámka 2. Podobným způsobem, jak jsme to činili při důkazu věty 6, lze snadno ukázat, že ke každé po částech spojité funkci $f(t)$ lze sestrojit posloupnost funkcí $f_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ tak, že $f_n(t)$ jsou spojité v $\langle 0, \infty)$, mají spojitou derivaci v $(0, \infty)$, je $f_n(0) = 0$ a $f_n(t) \to f(t)$ téměř stejnoměrně na každém konečném intervalu. Tato okolnost má jistý fysikální význam, na který upozorníme dále.

Upozorněme na tomto místě na následující fakt: má-li systém (8) při počátečních podmínkách $0, 0, \ldots, 0$ zobecněné řešení $w_1(t)$, $w_2(t)$, $\ldots$, $w_r(t)$ a existují-

-li $\lim_{t\to 0+} w_i(t)$, nemusí obecně platit, že $\lim_{t\to 0+} w_i(t) = 0$, tj. že řešení spojitě vyjde z daných počátečních podmínek. Z fysikálního hlediska je zajímavá otázka, kdy zobecněné řešení má v bodě $t = 0$ „skok", případně jaká je jeho velikost. K tomu cíli vyjděme od systému (5) a předpokládejme, že jeho koeficienty splňují podmínku P2 a rovnici (10) věty 1, a že existují $\lim_{t\to 0+} f_i(t) = \varphi_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, r$. Jak víme z věty 1, existuje pak jediné klasické řešení $v_1(t), v_2(t), \ldots$ $\ldots, v_r(t)$ příslušného systému (7), a jediné zobecněné řešení $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_r(t)$ systému (8) (věta 2); pro řešení systému (5) pak platí $x_i(t) = v_i(t) + w_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Vezměme za $w_i(t)$ ty funkce, které jsou dány rovnicemi (17). Zřejmě potom existují limity $\lim_{t\to 0+} w_i(t) = \sum_{k=1}^{r} \mu_{ik}\varphi_k$, $i = 1, 2, \ldots, r$ a ježto existují limity $\lim_{t\to 0+} v_i(t) = c_i$, existují též $\lim_{t\to 0+} x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Poněvadž funkce $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_r(t)$ splňují systém (6), a integrály v něm vystupující jsou spojitými funkcemi t na $\langle 0, \infty)$, obdržíme limitním přechodem pro $t \to 0+$ soustavu rovnic

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_{ik} \lim_{t\to 0+} x_k(t) - \beta_{ik}c_k = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, r\,. \tag{30}$$

Zavedeme-li vektor „skoků" $s = [\lim_{t\to 0+} x_i(t) - c_i]$, je soustava (30) ekvivalentní rovnici $Bs = 0$.

Tento výsledek zároveň ukazuje, že je-li $\det B \neq 0$, pak ke skoku řešení nedojde. (Srovnej s větou 4!)

FYSIKÁLNÍ ZHODNOCENÍ

Přistupme nyní k zhodnocení dosažených výsledků z fysikálního stanoviska. Uvažujme nějaký lineární systém, jehož chování je popsáno soustavou rovnic (5), kde funkce $f_i(t)$ vyjadřují časový průběh přivedených vnějších sil, funkce $x_i(t)$ pak průběhy hledaných veličin. V souhlasu s terminologií technické praxe nazývejme dále vnější síly *popudy* (nebo poruchy), hledané veličiny pak *odezvy*. Přitom číslům $c_1, c_2, \ldots, c_r$ udělme význam předepsaných počátečních hodnot fysikálních veličin v čase $t = 0$ *zleva*, tj. hodnot, kterými je určen stav na systému než začnou působit popudy. Mimo to předpokládejme, že koeficienty příslušných rovnic (5) splňují podmínku P2, a čísla $c_1, c_2, \ldots, c_r$ spolu s čísly $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r$ splňují rovnici (10) věty 1. (To je v praxi obvykle splněno.)

Definujme nyní odezvy jako zobecněné řešení, v případě existence jako klasické řešení příslušné soustavy rovnic a podívejme se na to, co můžeme od tohoto pojetí problému očekávat. Předně vidíme, že pojem odezvy má smysl i tehdy, když popudy patří do dosti široké třídy funkcí. To má ten význam, že jsme schopni řešit též takové problémy, kdy popudy jsou statistického charakteru, tj. například otázky šumu a poruch v elektrických obvodech.

Budou-li popudy mít dobré vlastnosti, tj. vyhovují-li podmínkám věty 3, existuje klasické řešení a odezvy tedy vyjdou spojitě z daných počátečních podmínek. Sledujme nyní případ, kdy popudy jsou po částech spojitými funkcemi. Jak víme, obecně pak pro odezvy neplatí $\lim_{t \to 0+} x_i(t) = c_i$ a tedy spojitost přechodového děje může být porušena. Nabízí se tudíž otázka, zda můžeme fysikálně nějak zdůvodnit to, proč jsme definovali odezvy právě jako zobecněné řešení a ne jinak, tj. zda námi definované odezvy vystihují reálnou skutečnost. Odpověď je však poměrně jednoduchá. Jsou-li popudy $f_i(t)$ nespojité, myslíme si je v souhlasu s fysikálními představami nahrazeny nějakými popudy $f_i^{(n)}(t)$ dobrých vlastností, které jsou blízké daným $f_i(t)$, přesněji řečeno, každý popud $f_i(t)$ myslíme si nahražen nějakým členem téměř stejnoměrně konvergentní posloupnosti dosti vysokého indexu. Pak ovšem pro popudy $f_i^{(n)}(t)$ existuje klasické řešení $x_1^{(n)}(t)$, $x_2^{(n)}(t)$, ..., $x_r^{(n)}(t)$, (tedy „odezvy“ ve smyslu, na jaký jsme v praxi zvyklí), o kterém víme (věta 8 a poznámka 2), že je libovolně blízké definovaným odezvám na popudy $f_i(t)$ v každém intervalu, ve kterém jsou všechny $f_i(t)$ spojité. Tím je fysikální oprávněnost námi zavedeného pojetí problému prokázána.

Upozorněme zde ještě na jeden fakt. Jak jsme se přesvědčili výše, platí pro obrazy zobecněného řešení soustavy (8) vztah $W_i(p) = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}(p)\, F_k(p)$. Funkce $A_{ik}(p)$ nazývají se v technické praxi *přenosové funkce* a jsou známy metody, kterak je možno tyto funkce stanovit přímo ze struktury a hodnot prvků lineárního systému, aniž bychom sestavovali soustavu (8). Z této okolnosti plyne, že pomocí zavedené teorie jsme zároveň dali přesný smysl v technické literatuře obvyklému pravidlu, že *obraz odezvy systému při nulových počátečních podmínkách je dán součinem přenosové funkce a obrazu popudu.*

ZÁVĚR

Nakonec si všimněme ještě několika drobností, které jsou užitečné při praktickém výpočtu zobecněného řešení. Existuje-li zobecněné řešení (5), lehko z (5) a (6) vidíme, že soustavu rovnic pro $X_i(p)$, kterou dostaneme aplikací Laplaceovy transformace na (6), lze obdržet též tak, že aplikujeme Laplaceovu transformaci přímo na (5), jako kdyby funkce $x_i(t)$ měly derivaci, přičemž formálně klademe $pX_i(p) - c_i$ za obraz $x_i'(t)$. Lze tedy v konkrétních případech výpočtu postupovat asi takto:

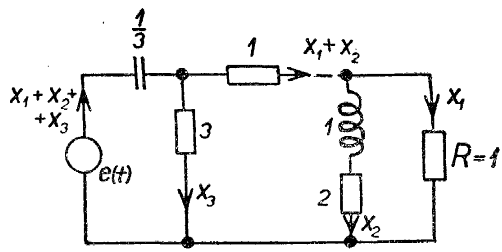
1) Formálně transformujeme soustavu (5) a vypočteme neznámé $X_i(p)$ (podmínka P1 bývá obvykle splněna).

2) Z nalezených výrazů pro $X_i(p)$ je ihned vidět, je-li splněna podmínka P2 nebo oslabená podmínka (viz poznámku 1.). Pro $X_i(p)$ nalezneme totiž výrazy tvaru

$$X_i(p) = \sum_k R_{ik}(p)\, F_k(p) + V_i(p)\,, \tag{31}$$

kde $R_{ik}(p)$, $V_i(p)$ jsou racionální funkce v p, a stačí tedy pouze kontrolovat, zda $R_{ik}(p)$ jsou regulární v bodě $p = \infty$.

3) Abychom zjistili, zda je splněna rovnice (10) věty 1, zaručující kompatibilitu počátečních podmínek, zřejmě stačí v (31) klást na okamžik $F_k(p) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, r$, (to odpovídá „zkrácenému" systému (7)) a zjistit, zda jsou splněny vztahy $c_i = \lim\limits_{p\to\infty} pV_i(p)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Poznamenejme, že někdy čísla c_i nejsou předepsána pro všechny indexy 1, 2, ..., r. Potom vyšetření splnění rovnice (10) dovoluje rozhodnout, zda takto předepsaný počáteční stav je úplně určen a v kladném případě stanovit zbývající čísla c_i.



Obr. 2.

Závěrem vypočtěme jednoduchý příklad, na kterém vysvitnou všechny podrobnosti. Naším úkolem je určit průběh napětí na odporu $R = 1\ \Omega$ obvodu z obr. 2., je-li na generátoru napětí $e(t) = 0$ pro $t \leq 0$, $e(t) = 1$ V pro $t > 0$. Pro počáteční stav obvodu je udáno, že náboj na kondensátoru je 2 C, napětí na odporu R je 1 V. Mimo to máme rozhodnout, zda těmito údaji je určen nějaký počáteční fysikální stav a zda je jediný.

Označme $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ průběhy proudů (jak je to vyznačeno na obr. 2), c_1, c_2, c_3 jejich počáteční hodnoty a q náboj na kondensátoru. Poněvadž $R = 1\ \Omega$, je hledaný průběh napětí na odporu R roven $x_1(t)$. Na základě Kirchhoffových zákonů můžeme psát soustavu:

$$\begin{aligned} 3\int_0^t (x_1 + x_2 + x_3)\,\mathrm{d}\tau + 3q + 3x_3 &= e(t)\,, \\ x_1 + 3x_2 + \dot{x}_2 - 3x_3 &= 0\,, \\ x_1 - \dot{x}_2 - 2x_2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Aplikujeme-li formálně Laplaceovu transformaci na (32), dostaneme (klademe $E(p)$ za obraz $e(t)$):

$$\begin{aligned} X_1\frac{1}{p} + X_2\frac{1}{p} + X_3\left(1 + \frac{1}{p}\right) &= \frac{E(p)}{3} - \frac{q}{p}\,, \\ X_1 + X_2(3 + p) - 3X_3 &= c_2\,, \\ X_1 - X_2(p + 2) &= -c_2\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Snadným výpočtem nalezneme

$$X_1(p) = \frac{1}{2p^2 + 10p + 14}\{p(p+2)E(p) - 3q(p+2) - c_2(p+4)\},$$

$$X_2(p) = \frac{1}{2p^2 + 10p + 14}\{p\,E(p) - 3q + c_2(5+2p)\}, \tag{34}$$

$$X_3(p) = \frac{1}{2p^2 + 10p + 14}\{p(2p+5)E(p) - q(5+2p) - c_2\}.$$

Z těchto výrazů je zřejmé, že je splněna oslabená podmínka.

Stanovme nyní vztahy, které musí platit mezi hodnotami c_1, c_2, c_3, q, aby platila rovnice (10) věty 1. Klademe-li v (34) na okamžik $E(p) = 0$, vidíme, že $pX_1(p) \to -\frac{3}{2}q - \frac{1}{2}c_2$; $pX_2(p) \to c_2$; $pX_3(p) \to -q$ pro $p \to \infty$. Musí tedy platit $-\frac{3}{2}q - \frac{1}{2}c_2 = c_1$; $c_2 = c_2$; $-q = c_3$.; Odtud vyplývá, že předepsané hodnoty $c_1 = 1$, $q = 2$ jsou kompatibilní a je $c_2 = -8$, $c_3 = -2$. Daný počáteční stav je tedy určen jednoznačně. Dosadíme-li za c_2, q a $E(p) = \frac{1}{p}$ do (34), obdržíme pro obraz hledaného napětí $x_1(t)$ vztah $X_1(p) = \frac{3p + 22}{2p^2 + 10p + 14}$, odkud plyne $x_1(t) = e^{-\frac{5}{2}t}\left\{\frac{3}{2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{29\sqrt{3}}{6}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\}$ pro $t > 0$.

Literatura

[1] *Doetsch:* Handbuch der Laplace-Transformation I., Verl. Birkhäuser, Basel 1950.
]2] *Ditkin—Kuzněcov:* Příručka operátorového počtu, NČSAV, Praha 1954.
[3] *Jarník:* Integrální počet II., NČSAV, Praha 1955.
[4] *Achijezer:* Teorie aproximací, NČSAV, Praha 1955.

Резюме

О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ (Václav Doležal)

(Поступило в редакцию 25/II 1958 г.)

Статья посвящена теории систем линейных интегро-дифференциальных уравнений (5). К системе такого типа приводит нас исследование переходных процессов в линейных физических системах, например, в электрических, механических или акустических цепях.

В введении показано, каковы недостатки формального толкования проблемы, которое обычно встречается в технической литературе, посвященной этим вопросам. Затем вводятся понятия „обобщенного" и „классического" решения системы (5), и доказываются некоторые теоремы существования. Кроме того, показано, что каждое обобщенное решение (5) является пределом (в определенном смысле) последовательности классических решений систем с теми же коэффициентами.

Затем полученные результаты подробнее оцениваются с физической точки зрения, и в заключение решается численный пример.

Summary

SYSTEMS OF ORDINARY LINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

VÁCLAV DOLEŽAL

(Received February 25th 1958.)

The article treats systems of ordinary linear integro-differential equations (5). Such equations occur when one studies transient phenomena of linear physical systems, viz. electrical, mechanical or acoustical circuits.

First it is shown that the formal treatment of these problems, so usual in technical publications, soon leads to difficulties. The notion of generalised and classical solution of the system (5) is then defined; some existence theorems proved. It is also shown that every generalised solution of (5) is a type of limit of classical solutions of systems with the same coefficients.

Finally, these results are interpreted physically; concluding with a numerical example.