

Апликace математикy

Ladislav Půst

Влияние свойств источника переменной силы на колебания механической системы

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 6, 428–450

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102636>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ ИСТОЧНИКА ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ НА КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

ЛАДИСЛАВ ПУСТ (Ladislav Půst)

(Поступило в редакцию 30/X 1957 г.)

DT: 621.8—752: 531.391

В статье дается теоретический анализ движения механической системы, которая приводится в колебательное движение источником периодической силы с конечной инерцией и с данной зависимостью мощности от числа оборотов.

1. Введение

На тихий ход многих машин, на напряженность и усталость их деталей, а тем самым и на их рабочую надежность и аварийность оказывает большое влияние величина амплитуд установившихся периодических колебаний, с которыми встречаемся практически у всех машин, как вращательных так и поршневых. Также и при расчетах оснований и рамных конструкций, как железных, так и бетонных, важно знать их поведение с точки зрения колебаний. В этих случаях расчет пока проводился при условии, что частота возбуждающей силы является постоянной и что она не зависит от величины амплитуды и от угла сдвига фаз колебательной системы. Также и устойчивость периодических колебаний, играющая важную роль в исследовании сложных и нелинейных систем, изучалась только в том случае, когда возбуждающая частота была постоянной.

Однако в действительности часто возбуждающую периодическую силу создает источник энергии с конечной инерцией и с определенной зависимостью мощности от числа оборотов. Итак, нельзя молча обойти то обстоятельство, что колебательная система будет в свою очередь оказывать влияние на источник энергии, обороты которого, а, следовательно, и частота возбуждающей силы будет меняться согласно состоянию колебательной системы в данный момент. Ясно, что у настоящих машин (двигатели внутреннего сгорания на упруго уложенном основании, колебания роторов больших вращательных машин и т. под.), где энергия колебаний составляет лишь несколько процентов общей мощности, это влияние не особенно велико.

Но при исследовании поведения машин и конструкций по моделям этот вопрос выступает на первый план. Например, производя по моделям испытания оснований машин, измеряя модели упругих муфт и демферов, определяя критические обороты и области неустойчивости на моделях ротора и т. д., пользуемся такими источниками энергии, максимальная мощность которых рассчитана только на то, чтобы покрыть, с определенным запасом, максимальное возможное потребление энергии в модели колебательной системы.

Итак, при испытаниях моделей бывает источник энергии и его инерция по сравнению с энергией колебательной системы гораздо меньшим, чем у настоящих машин. Также и в том случае, когда вызываем колебания настоящих конструкций, оснований машин и т. п. с помощью вибратора, бывает мощность и инерция последнего меньше общей мощности и инерции машины, воздействие которой заменяет вибратор.

В таких случаях может в большой мере сказаться влияние малой инерции источника энергии и влияние зависимости частоты от мощности, так что результаты испытаний моделей могут отличаться от поведения настоящей системы.

В предлагаемой работе проводится анализ влияния инерции источника энергии и его характеристики на резонансные амплитудовые кривые линейной системы с одной степенью свободы, на вид и устойчивость периодических колебаний. Линейная система была нами избрана потому, что ее расчет является наиболее простым и что на ней наиболее наглядно видно влияние свойств источника возбуждающей силы.

2. Составление основных уравнений для системы с одной степенью свободы

Большинство колебательных систем, с которыми встречаемся на практике, можно упростить и свести к системе с одной степенью свободы, приводящейся в колебания воздействием простой синусоидальной возбуждающей силы. Схема такой системы, поведением которой будем теперь заниматься, показана на рис. 1а. Колебательная система состоит из массы m [$\text{kgcm}^{-1}\text{s}^2$], которая посредством демфера с линейным коэффициентом затухания k [kgcm^{-1}s] и пружины жесткости c [kgcm^{-1}] прикреплена к бесконечно большой массе. Возбуждающая периодическая сила действует на массу посредством мягкой пружины жесткости c_1 ($c_1 \ll c$).

Нижний конец этой пружины приводится в периодическое движение x_1 кулачком или кривошипом, прикрепленным к валу мотора. Мотор имеет момент инерции I [kgcms^2] и может развить крутящий момент $M(\varphi, \alpha)$, о котором будем предполагать, что он зависит от числа оборотов,

т. е. от угловой скорости $\dot{\varphi} = d\varphi/dt$ ¹⁾ и от параметра α , определяющего положение регулирующего устройства, при помощи которого регулируем снабжение мотора энергией. Параметр α определяется, например, наладкой регулирующего трансформатора в случае электрической тяги, положением дроссельной заслонки у двигателей внутреннего сгорания и т. под.

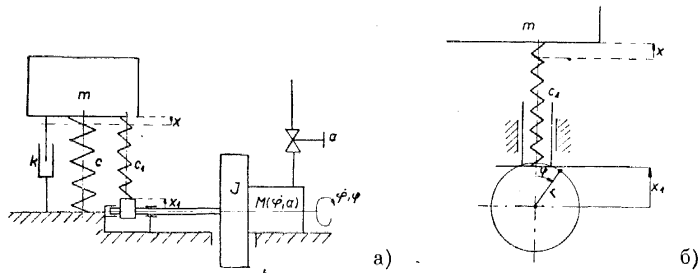


Рис. 1.

Исследуя движение колебательной системы, не будем принимать во внимание влияние собственного веса массы m , потому что система на рис. 1а может представлять настоящую систему, которая колеблется в горизонтальной плоскости, или крутильно-колебательную систему и, вообще, целый ряд других колебательных систем, у которых влияние земного притяжения на колебаниях не сказывается.

Приступим теперь к составлению уравнений движения. Сила пружины c_1 , действующая на массу m , равна

$$P = c_1(-x + x_1) = c_1(-x + r \cos \varphi); \quad (1)$$

движение массы m в таком случае описано дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + (c + c_1)x = c_1r \cos \varphi. \quad (2)$$

Но однако сила P (уравн. (1)) оказывает обратное влияние на вал мотора и вызывает на нем крутящий момент

$$M = Pr \sin \varphi = c_1r(-x + r \cos \varphi) \sin \varphi. \quad (3)$$

Вал мотора находится еще под воздействием момента инерции $-I\ddot{\varphi}$ и крутящего момента $M(\dot{\varphi}, \alpha)$, вызванного статором, так что условие равновесия моментов на вале мотора запишется в виде

$$-I\ddot{\varphi} + M(\dot{\varphi}, \alpha) + c_1r(-x + r \cos \varphi) \sin \varphi = 0. \quad (4)$$

Уравнения (2) и (4) описывают, следовательно, поведение всей системы с учётом свойств источника возбуждающей силы. Из этих уравнений видно,

¹⁾ Мы не считаемся здесь с зависимостью момента от угла φ . Когда имеем дело с коллекторными регулирующими моторами, которые чаще всего применяются для возбуждения колебаний модели, это предположение вполне обоснованно.

что угол поворота φ , или же угловая скорость $\dot{\varphi}$, в действительности определяется решением дифференциального уравнения (4). Предположение постоянной круговой частоты $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, с которым встречаемся практически во всех вышедших до сих пор работах, посвященных решению вынужденных колебаний, является, следовательно, крайним случаем, имеющим место только для бесконечно большого момента инерции I или для бесконечно твердого источника.²⁾ В остальных случаях следовало бы рассмотреть и уравнение (4), и тем скорее, чем источник колебаний меньше.

Для решения дифференциальных уравнений удобно ввести не имеющие размера величины:

$$y = \frac{x}{r}, \quad \tau = \Omega t,$$

$$\varepsilon\kappa = \frac{c_1}{c_1 + c}, \quad \varepsilon\delta = \frac{k}{m\Omega} = \frac{k}{\sqrt{(c_1 + c)m}},$$

$$\varepsilon\varrho = \frac{r^2}{k^2}, \quad \varepsilon\mu \left(\frac{d\varphi}{d\tau}, \alpha \right) = \frac{M \left(\frac{d\varphi}{dt}, \alpha \right)}{I\Omega^2} = \frac{M \left(\frac{d\varphi}{d\tau}, \Omega, \alpha \right)}{I\Omega^2}, \quad (5)$$

где

$$\Omega = \sqrt{\frac{c_1 + c}{m}}, \quad I = mR^2. \quad (5a)$$

Уравнения движения тогда примут вид

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + \varepsilon\delta \frac{dy}{d\tau} + y = \varepsilon\kappa \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = \varepsilon\mu \left(\frac{d\varphi}{d\tau}, \alpha \right) + \varepsilon^2\varrho \sin \varphi (\cos \varphi - y). \quad (6)$$

В уравнениях (5) и (6) символ ε означает малый параметр. Это значит, что коэффициент затухания k является малым по сравнению с критическим затуханием $k_k = \sqrt{(c_1 + c)m}$, что жесткость c_1 мала по сравнению с жесткостью $c + c_1$ ($c_1 \ll c + c_1$), что радиус кулачка r мал по сравнению с ра-

²⁾ У бесконечно твердого источника энергии малое изменение нагрузки (момента) не вызовет никакого изменения частоты. Если для разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $\dot{\varphi} = \omega$ будет

$$M(\dot{\varphi}, \alpha) = M(\omega, \alpha) + \frac{\partial M(\omega, \alpha)}{\partial \dot{\varphi}} (\dot{\varphi} - \omega) + \text{малые члены},$$

то твердый источник определяется соотношениями

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad M(\omega, \alpha) = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial \dot{\varphi}}(\omega, \alpha) = \infty.$$

диусом инерции R ($r \ll R$) и, далее, что внешний момент мотора $M(\dot{\varphi}, \alpha)$ мал по сравнению с моментом инерции $I\Omega^2$ ($M(\dot{\varphi}, \alpha) \ll I\Omega^2$).

Момент мотора μ можем с целью более наглядного вычисления³⁾ приближенно заметить линейной функцией

$$\mu(\dot{\varphi}, \alpha) \doteq \mu_0(\alpha) - \mu_1(\alpha) \dot{\varphi}, \quad (7)$$

т. е., как показано на рис. 2, заменить настоящий график функции μ касательными в точках $\dot{\varphi} = 0$.

Решение уравнений движения можно получить только приближенно. В данной статье покажем применение подходящим образом приспособленного приближенного вычислительного метода, опирающегося на асимптотические ряды. Мы не будем здесь ближе рассматривать чисто математические вопросы, касающиеся решения (например, существование периодического решения и т. под.); им будет посвящена подготовляемая статья д-ра Вейвуды.

Предположим, что мотор в системе на рис. 1 вращается все время в том же направлении. Следовательно, угол φ является монотонно возрастающей функцией времени

$$\varphi = \varphi(\tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} > 0. \quad (7a)$$

Монотонность функции $\varphi(\tau)$ позволяет ввести с большой выгодой для нас новую независимую переменную величину ϑ вместо времени τ . Если еще обозначим

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \vartheta, \quad (8a)$$

то

$$\frac{d}{d\tau} = \vartheta \frac{d}{d\varphi}, \quad \frac{d^2}{d\tau^2} = \vartheta^2 \frac{d^2}{d\varphi^2} + \vartheta \frac{d\vartheta}{d\varphi} \frac{d}{d\varphi} \quad (8b)$$

и уравнения (6) примут вид

$$\begin{aligned} \vartheta^2 y'' + \vartheta(\vartheta' + \varepsilon\delta) y' + y &= \varepsilon\kappa \cos \varphi, \\ \vartheta\vartheta' &= \varepsilon\mu_0 - \varepsilon\mu_1\vartheta + \varepsilon^2\kappa\rho \sin \varphi (\cos \varphi - y), \end{aligned} \quad (9)$$

где черточкой помечена производная по φ .

Итак, нам удалось понизить порядок второго дифференциального уравнения на единицу. Решение получим в виде $y(\varphi)$, $\vartheta(\varphi)$. При помощи соотношения (8a) найдем зависимость $\varphi(\tau)$, после подстановки которой в $y(\varphi)$, $\vartheta(\varphi)$ получим

$$y = y(\tau), \quad \vartheta = \vartheta(\tau). \quad (9a)$$

³⁾ Расчет системы с более общей функцией μ ничуть не труднее, но не является столь наглядным.

Решая уравнения (9), можем наблюдать за основными видами движения системы, зарисованной на рис. 1. Это, во-первых, — периодическое движение, при котором решение дано периодическими функциями $y(\tau)$ и $\vartheta(\tau)$, во-вторых, движение, при котором решение дано непериодическими функциями, которые мы получим, исследуя, например, переходные процессы, устойчивость движения, поведение системы, где со временем меняется привод энергии, определенный параметром α^4 . Здесь будем главным образом заниматься периодическим движением, об остальных сделаем лишь некоторые замечания.

3. Решение уравнений движения

Для решения нелинейных уравнений (9) можем применить асимптотический метод, приспособив его подходящим образом; этот метод позволяет находить решение уравнения движения как в резонансном, так и в нерезонансном случае. Этот метод в несколько упрощенной форме описан в литературе; см. [1], стр. 227.

При условии, что ε — малый параметр, можем решение искать в виде степенных рядов

$$\begin{aligned} y &= a \cos(\varphi - \psi) + \varepsilon u_1(a, \psi, w, \varphi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, w, \varphi) + \dots, \\ \vartheta &= w + \varepsilon v_1(a, \psi, w, \varphi) + \varepsilon^2 v_2(a, \psi, w, \varphi) + \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где новые неизвестные a, ψ, w определяются из дифференциальных уравнений первого порядка, которые (следуя работе [1]) составим так, чтобы их правые части не содержали независимой переменной φ :

$$\frac{da}{d\varphi} = \varepsilon A_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 A_2(a, \psi, w) + \dots,$$

4) До сих пор при теоретическом исследовании колебательной системы, при прохождении через резонанс и т. д. всегда предполагалось (см. напр., [3], [4], [6], [7]), что частота возбуждающей силы является наперед заданной функцией времени $\omega = \omega(t)$.

Но на самом деле в большинстве случаев мы можем определить или управлять только зависимостью привода энергии в систему от времени, данной соотношением $\alpha = \alpha(t)$, в то время как угловая частота устанавливается сама, а ее настоящая зависимость от времени определена решением уравнения (4). Разница между этими случаями является самой большой в окрестности резонанса, когда потребление энергии значительно повышается; см. например, [5], стр. 476.

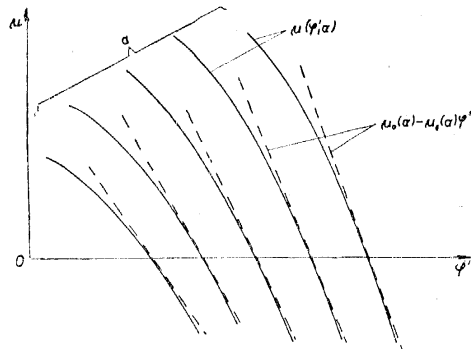


Рис. 2.

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{d\varphi} &= 1 - \frac{1}{w} + \varepsilon B_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 B_2(a, \psi, w) + \dots, \\ \frac{dw}{d\varphi} &= \varepsilon D_1(a, \psi, w) + \varepsilon^2 D_2(a, \psi, w) + \dots\end{aligned}\quad (11)$$

Члены в правых частях уравнений (11), не содержащие параметра ε , определены так, чтобы решение (10) при $a = \text{konst}$ с учетом уравнений (11) удовлетворяло системе (9) при $\varepsilon = 0$.

О функциях u_i, v_i, A_i, B_i, D_i ($i = 1, 2, \dots$) будем предполагать, что они являются аналитическими функциями всех своих аргументов, что они периодичны по φ и ψ с периодом 2π и что они разложимы в ряд Фурье; далее мы будем требовать, чтобы они после подстановки соотношений (10) и (11) в уравнения (9) удовлетворяли этим уравнениям с точностью до порядка ε^n , где n — определенное, наперед заданное целое число. По этим условиям удовлетворяет много функций u_i, v_i ; поэтому на функции u_i, v_i можем наложить еще некоторые дальнейшие условия. Обычно налагаем на них следующие условия: мы требуем, чтобы в u_i не содержалась первая гармоника, т. е. чтобы

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} u_i(a, \psi, w, \varphi) \sin \varphi \, d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} u_i(a, \psi, w, \varphi) \cos \varphi \, d\varphi &= 0,\end{aligned}\quad i = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

чтобы функции v_i не содержали постоянного члена и чтобы они были периодичными по φ и ψ , т. е. чтобы

$$\int_0^{2\pi} v_i(a, \psi, w, \varphi) \, d\varphi = 0, \quad (12a)$$

$$\int_0^{2\pi} v_i(a, \psi, w, \varphi) \, d\psi = 0. \quad (12b)$$

С физической точки зрения условия (12) выражают то обстоятельство, что a, ψ являются соответственно амплитудой и углом сдвига фаз основной гармоника движения. Из уравнений (12a) и (12b) видно, что w определяет среднюю угловую скорость, в то время как функции v_i выражают периодические члены, характеризующие колебание мгновенной угловой скорости около ее среднего значения w .

Дифференцируя выражения (10) с применением соотношений (11) и подставляя полученные производные в уравнения (9), получим дифференциальные уравнения, которые должны выполняться для всех достаточно малых значений параметра ε . Отсюда следует, что выражения при одинаковых степенях малого параметра ε в левой и правой частях упомянутых уравне-

ний должны равняться друг другу. Для членов порядка ε^0 получим соотношения

$$w^2 \left\{ -\frac{a}{w^2} \cos(\varphi - \psi) \right\} + a \cos(\varphi - \psi) = 0, \quad (13)$$

$$0 = 0,$$

которые выполняются тождественно при любых a и ψ . Согласно уравнениям (10) и (11) будет также

$$y = a \cos(\varphi - \psi), \quad a = \text{konst},$$

$$\vartheta = w, \quad \psi = \left(1 - \frac{1}{w}\right) \varphi + \psi_0,$$

$$w = \text{konst}, \quad \psi_0 = \text{konst}. \quad (13a)$$

Следовательно, для $\varepsilon = 0$ получим в качестве решения уравнений (9) выражения, описывающие „собственные незатухающие колебания“⁵⁾ системы $m, c + c_1$, так как из (13a), (5) и (8a) вытекает

$$y = a \cos \left[\varphi - \left(1 - \frac{1}{w}\right) \varphi - \psi_0 \right] = \cos \left(\frac{1}{w} \varphi - \psi_0 \right) =$$

$$= a \cos(\tau - \psi_0) = a \cos(\Omega t - \psi_0), \quad (14)$$

где $\Omega = \sqrt{\frac{c + c_1}{m}}$, ψ_0 — произвольная постоянная.

Подставив в уравнения (9) соотношения (10) и (11) и выбирая затем члены порядка ε^1 , получим:

$$w^2 \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + 2 \left(1 - \frac{1}{w}\right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi \partial \psi} + \left(1 - \frac{1}{w}\right)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} - \frac{2}{w} A_1 \sin(\varphi - \psi) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{w} B_1 a \cos(\varphi - \psi) + \left(1 - \frac{1}{w}\right) a \frac{\partial B_1}{\partial \psi} \sin(\varphi - \psi) + \left(1 - \frac{1}{w}\right) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} \cos(\varphi - \psi) + \right.$$

$$\left. + D_1 \frac{a}{w^2} \sin(\varphi - \psi) \right] - \frac{2v_1 a}{w} \cos(\varphi - \psi) -$$

$$- a \sin(\varphi - \psi) \left[\delta + D_1 + \left(1 - \frac{1}{w}\right) \frac{\partial v_1}{\partial \psi} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \right] + u_1 = z \cos \varphi,$$

$$w \left[D_1 + \left(1 - \frac{1}{w}\right) \frac{\partial v_1}{\partial \psi} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \right] = \mu_0 - \mu_1 w. \quad (15)$$

⁵⁾ Для движения системы на рис. 1 не можем непосредственно воспользоваться понятиями собственных и вынужденных колебаний в том смысле, в каком они применяются обычно в литературе. Движение этой системы в целом можно скорее всего рассматривать как случай самовозбужденных колебаний, потому что систему снабжаем энергией, которая может не быть периодической (например, постоянный электрический ток), а только в самой системе она становится периодической силой, приводящей в колебания одну ее часть, в данном случае массу m . Соответствующая частота колебаний w зависит только от параметров самой системы, аналогично, например, электрическому осциллятору.

Чтобы функция v_1 удовлетворяла условию (12а), должен свободный член функции v_1 равняться нулю, значит, согласно второму уравнению в (15) должно быть

$$D_1 = \frac{\mu_0 - \mu_1 w}{w}. \quad (16a)$$

Тогда функция v_1 определяется решением уравнения

$$\left(1 - \frac{1}{w}\right) \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial \psi} = 0 \quad (16b)$$

и условием, что она периодична по φ и ψ с периодом 2π . Этому требованию при всех w удовлетворяет решение⁶⁾

$$v_1 = 0. \quad (16c)$$

Первое уравнение в (15) можно рассматривать как дифференциальное уравнение в частных производных для определения функции u_1 и, учитывая (16а) и (16с), переписать его в виде

$$\begin{aligned} & w^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} + 2w(w-1) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi \partial \psi} + (w-1)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \psi^2} + u_1 = \\ & = \left[2wA_1 - w(w-1)a \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + a\delta \right] \sin(\varphi - \psi) + \kappa \cos \varphi + \\ & + \left[-2wB_1 a - w(w-1) \frac{\partial A_1}{\partial \psi} \right] \cos(\varphi - \psi). \end{aligned} \quad (17)$$

По условиям (12) члены при $\sin(\varphi - \psi)$ и $\cos(\varphi - \psi)$ в правой части уравнения (17) должны равняться нулю. Из этого можно определить A_1 и B_1 :

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\delta a}{2w} + \frac{\kappa \sin \psi}{w(w+1)}, \\ B_1 &= \frac{\kappa \cos \psi}{aw(w+1)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Считаясь с условием периодичности, получаем решение уравнения (17) в виде (см. также сноску ⁶⁾)

$$u_1 = 0. \quad (18a)$$

Итак, решение уравнений (9) с точностью до порядка ε^1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} y &= a \cos(\varphi - \psi), \\ \vartheta &= w, \end{aligned} \quad (19)$$

⁶⁾ Чтобы можно было произвести вычисление во всем интервале частот, надо ограничиться только частным решением $v_1 = 0$, хотя при некоторых значениях w уравнение (16b) и условию периодичности может удовлетворять и ненулевое решение.

где амплитуда a , угол сдвига фаз ψ и угловая скорость w определены соотношениями

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\varphi} &= \varepsilon \left[-\frac{\delta a}{2w} + \frac{\kappa \sin \psi}{w(w+1)} \right], \\ \frac{d\psi}{d\varphi} &= 1 - \frac{1}{w} + \varepsilon \frac{\kappa \cos \psi}{aw(w+1)}, \\ \frac{dw}{d\varphi} &= \varepsilon \frac{\mu_0 - \mu_1 w}{w}.\end{aligned}\tag{19a}$$

Для установившегося состояния будет

$$\frac{da}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dw}{d\varphi} = 0, \quad \varphi = \int_0^{\tau} \vartheta d\tau \doteq w\tau,$$

т. е. a , ψ , w — постоянные.

Угловая скорость источника энергии (мотора) в первом приближении определена одной его характеристикой. В случае линейной характеристики (7) угловая скорость

$$w = \frac{\mu_0}{\mu_1}.\tag{20}$$

Амплитуда и угол сдвига фаз установившихся колебаний массы даны соотношениями

$$\begin{aligned}a &= \frac{\varepsilon \kappa}{\sqrt{(1-w^2)^2 + \varepsilon^2 \delta^2 \left(\frac{w+1}{2}\right)^2}}, \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\varepsilon \delta \frac{w+1}{2}}{1-w^2},\end{aligned}\tag{20a}$$

которые определяют нормальную резонансную кривую линейной системы с одной степенью свободы, приводимой в колебательное движение твердым источником энергии.

Из уравнений (19a) можно также легко определить устойчивость периодических решений. Применяя известные методы, нетрудно установить, что система устойчива, когда

$$\delta > 0 \quad \text{и} \quad \mu_1 > 0,\tag{21}$$

т. е. когда сама колебательная система устойчива вследствие положительного коэффициента затухания и когда сам мотор устойчив вследствие отрицательного наклона его характеристики.

В этом результате еще не сказывается влияние обратного воздействия колебательной части системы на ее вращательную часть. Чтобы обнаружить это влияние необходимо произвести вычисление с точностью по-

рядка ε^2 . В уравнениях (9), в которые мы подставили ряды (10), будем считаться только с членами порядка ε^2 . Используя соотношения (16а), (16с), (18а), приведем полученные таким образом уравнения к такому виду, что в левой части каждого из них будут лишь неизвестные величины v_2 , или же u_2 . Из второго уравнения (9) таким образом получим соотношение

$$w \left[D_2 + \left(1 - \frac{1}{w} \right) \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} \right] = \kappa \rho \sin \varphi [\cos \varphi - a \cos (\varphi - \psi)]. \quad (22)$$

Согласно условиям (12а) и (12b) решением уравнения (22) будет

$$D_2 = - \frac{\kappa a \rho}{w^2} \sin \psi, \quad (23a)$$

$$v_2 = - \frac{\kappa \rho}{4w} \cos 2\varphi + \frac{\rho \kappa a}{2(1+w)} \cos (2\varphi - \psi). \quad (23b)$$

Аналогично можем и во втором уравнении (9) члены порядка ε^2 преобразовать при помощи соотношений (23а) и (23b), а также при помощи выше полученных результатов, таким образом, что в левой части останется только неизвестная u_2 , а в правой части — только A_2 и B_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + 2 \left(1 - \frac{1}{w} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi \partial \psi} + \left(1 - \frac{1}{w} \right)^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{w^2} u_2 = \\ & = - \left[- \frac{2}{w} A_2 + \left(1 - \frac{1}{w} \right) a \frac{\partial B_2}{\partial \psi} + 2A_1 B_1 + a \frac{\partial B_1}{\partial a} A_1 + a B_1 \frac{\partial B_1}{\partial \psi} + \right. \\ & \quad \left. + D_2 \frac{a}{w^2} + D_1 \frac{\partial B_1}{\partial w} a + (\mu_0 - \mu_1 w + \delta w) \frac{B_1 a}{w^2} \right] \sin (\varphi - \psi) - \\ & - \left[\frac{2}{w} B_2 a + \left(1 - \frac{1}{w} \right) \frac{\partial A_2}{\partial \psi} + \frac{\partial A_1}{\partial a} A_1 - a B_1^2 + B_1 \frac{\partial A_1}{\partial \psi} + D_1 \frac{\partial A_1}{\partial w} + \right. \\ & \quad \left. + (\mu_0 - \mu_1 w + \delta w) \frac{A_1}{w^2} \right] \cos (\varphi - \psi) + \\ & + \frac{a}{w^2} \cos (\varphi - \psi) \left[- \frac{\kappa \rho}{4w} \cos 2\varphi + \frac{\kappa a \rho}{2(1+w)} \cos (2\varphi - \psi) \right] \frac{2}{w} + \\ & + \frac{a \rho \kappa}{w^3} \sin (\varphi - \psi) \sin \varphi [\cos \varphi - a \cos (\varphi - \psi)]. \quad (24) \end{aligned}$$

Так как функция u_2 тоже не смеет содержать первую гармоническую составляющую, должно необходимо выполняться условие, что в правой части уравнения (24) выражения при $\cos (\varphi - \psi)$ и $\sin (\varphi - \psi)$ равны нулю. Из этого условия получим соотношения, позволяющие определить неизвестные функции A_2 и B_2 . После подстановки вместо A_1 , B_1 , D_1 , D_2 и подходящих преобразований получим

$$\begin{aligned}
 A_2 = & -\frac{\kappa}{w(w+1)^2} \left[-\frac{\delta}{2} + \frac{\mu_0 - \mu_1 w}{1+w} \right] \cos \psi + \frac{\kappa a^2 \varrho (1-w)}{4w^2(1+w)^2} \sin \psi - \\
 & - \frac{\kappa \varrho}{8w^3} \left[\frac{1}{w} - 1 \right] \sin 2\psi, \\
 B_2 = & \frac{\delta^2}{8w} + \frac{\kappa}{aw(1+w)^2} \left[-\frac{\delta}{2} + \frac{\mu_0 - \mu_1 w}{1+w} \right] \sin \psi + \\
 & + \frac{\kappa a \varrho (1-w)}{4w^2(1+w)^2} \cos \psi - \frac{\kappa \varrho}{8w^3} \left[\frac{1}{w} - 1 \right] \cos 2\psi. \quad (24a)
 \end{aligned}$$

Применив (24a), можем значительно упростить уравнение (24):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + 2 \left(1 - \frac{1}{w} \right) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi \partial \psi} + \left(1 - \frac{1}{w} \right)^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \psi^2} + \frac{1}{w^2} u_2 = \\
 & = \frac{\kappa a \varrho}{2w^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1+w} \right] \cos(3\varphi - 2\psi) - \frac{\kappa \varrho}{4w^3} \left[\frac{1}{w} + 1 \right] \cos(3\varphi - \psi). \quad (25)
 \end{aligned}$$

Его решением будет функция

$$u_2 = -\frac{a^2 \varrho \kappa (3+2w)}{4w(1+w)^2(w+3)} \cos(3\varphi - 2\psi) + \frac{a \varrho \kappa}{16w^3} \cos(3\varphi - \psi). \quad (26)$$

Мы могли бы таким образом продолжать наши вычисления и определить функции A_i, B_i, v_i, u_i, D_i до произвольного индекса i . Ограничиваясь вычисленными до сих пор величинами для $i=1$ и $i=2$, можем, подставив их в (10) и (11), написать решение уравнения (9) с точностью до порядка ε^2 :

$$\begin{aligned}
 y = & a \cos(\varphi - \psi) + \varepsilon^2 \frac{a \kappa \varrho}{16w^3} \cos(3\varphi - \psi) - \\
 & - \varepsilon^2 \frac{a^2 \varrho \kappa}{4w} \frac{3+2w}{(1+w)^2(w+3)} \cos(3\varphi - 2\psi), \\
 \vartheta = & w - \varepsilon^2 \frac{\kappa \varrho}{4w} \cos 2\varphi + \varepsilon^2 \frac{\kappa a \varrho}{2(1+w)} \cos(2\varphi - \psi), \quad (27)
 \end{aligned}$$

где a, φ, w определены уравнениями

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{d\varphi} = & -\frac{\varepsilon \delta a}{2w} + \frac{\varepsilon \kappa \sin \psi}{w(w+1)} - \frac{\varepsilon^2 \kappa}{w(w+1)^2} \left[-\frac{\delta}{2} + \frac{\mu_0 - \mu_1 w}{1+w} \right] \cos \psi + \\
 & + \frac{\varepsilon^2 \kappa a^2 \varrho (1-w)}{4w^2(1+w)^2} \sin \psi - \frac{\varepsilon^2 \kappa \varrho}{8w^3} \left[\frac{1}{w} - 1 \right] \sin 2\psi, \\
 \frac{d\varphi}{d\varphi} = & 1 - \frac{1}{w} + \frac{\varepsilon \kappa \cos \psi}{aw(1+w)} + \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{8w} + \frac{\varepsilon^2 \kappa}{aw(w+1)^2} \left[-\frac{\delta}{2} + \frac{\mu_0 - \mu_1 w}{1+w} \right] \sin \psi + \\
 & + \frac{\varepsilon^2 \kappa \varrho (1-w)}{4w^2(1+w)^2} \cos \psi - \frac{\varepsilon^2 \kappa \varrho}{8w^3} \left[\frac{1}{w} - 1 \right] \cos 2\psi, \\
 \frac{dw}{d\varphi} = & \frac{\varepsilon \mu_0 - \varepsilon \mu_1 w}{w} - \frac{\varepsilon^2 \kappa a \varrho}{2w} \sin \psi. \quad (28)
 \end{aligned}$$

Выражения (27) совместно с уравнениями (28) характеризуют движение системы, зарисованной на рис. 1, причем не только периодическое движение, но с их помощью также можно установить и вид переходных процессов, а в случае надобности они могут служить в качестве исходных соотношений для определения устойчивости периодических колебаний.

Если будем условие (7а) считать выполненным, то можем однозначно определить зависимость между углом поворота φ и временем $\tau = \Omega t$. При помощи соотношения (8а), которое можно с точностью до порядка ε^2 записать в виде

$$\begin{aligned} d\tau = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} &= \frac{d\varphi}{w - \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho}{4w} \cos 2\varphi + \varepsilon^2 \frac{\kappa a \rho}{2(1+w)} \cos (2\varphi - \psi)} = \\ &= \frac{d\varphi}{w} \left\{ 1 + \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho}{4w^2} \cos 2\varphi - \varepsilon^2 \frac{\kappa a \rho}{2(1+w)w} \cos (2\varphi - \psi) \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

получим в случае установившегося движения, проинтегрировав последнее уравнение (w — постоянная),

$$\tau = \Omega t = \frac{1}{w} \left[\varphi + \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho}{8w^2} \sin 2\varphi - \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho a}{4w(1+w)} \sin (2\varphi - \psi) \right], \quad (30a)$$

а отсюда опять-таки с точностью ε^2 :

$$\begin{aligned} \varphi &= w\tau - \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho}{8w^2} \sin 2w\tau + \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho a}{4w(1+w)} \sin (2w\tau - \psi) = \\ &= w\Omega t - \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho}{8w^2} \sin 2w\Omega t + \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho a}{4w(1+w)} \sin (2w\Omega t - \psi). \end{aligned} \quad (30b)$$

Подставив соотношение (30b) в уравнения (27) и преобразовав полученное, можем зависимость отклонения y и мгновенной угловой скорости $\dot{\varphi}$ от времени t записать в виде

$$\begin{aligned} y &= a \cos (w\Omega t - \psi) + \varepsilon^2 \frac{a\kappa \rho}{16w^2} \cos (w\Omega t - \psi) - \\ &- \varepsilon^2 \frac{a^2 \kappa \rho}{8w(1+w)} \cos w\Omega t + \varepsilon^2 \frac{a\kappa \rho}{16w^2} \left(\frac{1}{w} - 1 \right) \cos (3w\Omega t - \psi) + \\ &+ \varepsilon^2 \frac{a^2 \kappa \rho}{8w(1+w)^2} (w^2 - 3) \cos (3w\Omega t - 2\psi), \end{aligned} \quad (31a)$$

$$\dot{\varphi} = w - \varepsilon^2 \frac{\kappa \rho}{4w} \cos 2w\Omega t + \varepsilon^2 \frac{\kappa a \rho}{2(1+w)} \cos (2w\Omega t - \psi). \quad (31b)$$

Уравнения (30) и (31) имеют место только в случае установившегося движения. В случае неустановившегося движения, например, у переходных процессов, нельзя при интегрировании соотношения (29) считать среднюю

угловую скорость постоянной, но надо рассматривать ее как функцию времени (или же угла φ), которую можем найти, решив уравнение (28).

Рассматривая обе системы уравнений, как уравнения (31), где a и ϑ представлены в виде функций времени t , так и уравнения (27), где a и ϑ представлены в виде функций угла φ , нетрудно заметить, что виды колебаний в случае системы с источником энергии с конечной инерцией и в случае источника энергии в бесконечной инерцией ($q \neq 0$ и $q = 0$) отличаются друг от друга.

После подстановки $q = 0$ уравнения (27), (30) и (31) примут вид

$$\begin{aligned} y &= a \cos (w\Omega t - \psi), \\ \vartheta &= w, \quad \varphi = w\Omega t. \end{aligned} \quad (32)$$

Влияние конечной инерции источника колебаний сказывается в том, что в колебаниях имеются еще дальнейшие гармонические составляющие, порядок величины которых равен ε^2 , и эта величина прямо пропорциональна параметру q ($q \approx \frac{1}{I}$). Амплитуда первой гармоники изменится со временем на члены порядка ε^2 (ур. 31)), амплитуда первой гармоники относительно угла поворота φ не изменится. В колебании содержатся еще гармоники трехкратной частоты, порядок амплитуды которых равен также ε^2 и величина которых опять зависит от того, производим ли мы разложение колебаний по времени t или по углу φ . Остальные гармоники высшего порядка умножены на малое значение ε^k ($k = 3, 5, \dots$) и отсутствуют поэтому в приведенных выше формулах.

Мгновенная угловая скорость ϑ неравномерна, но, кроме основного медленно меняющегося члена w , содержит вторую гармоническую составляющую с двукратной частотой $2w$ и амплитудой порядка ε^2 . Величина этой гармоники возрастает линейно с параметром q .

Продолжая наши вычисления, можем легко показать, что в отклонении y содержатся только нечетные гармоники (частота $w, 3w, 5w, \dots$), в угловой скорости ϑ — только четные гармоники (частота $0, 2w, 4w, \dots$).

4. Расчет резонансных кривых

Помимо вида колебаний, которым мы занимались в предыдущей главе, в технической практике еще важно знать графики резонансных кривых периодических колебаний и их искажение, вызванное малой инерцией источника возбуждающей силы.

Для этой цели мы должны определить амплитуду a , угол сдвига фаз

ψ первой гармонической составляющей и среднюю угловую скорость w . Эти величины определим из уравнений (28), подставив туда

$$\frac{da}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dw}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\psi}{d\varphi} = 0.$$

В преобразованных таким образом соотношениях выступают в качестве неизвестных величины a , ψ , w и параметр α , определяющий [см. уравн. (7) и рис. 2] рабочую характеристику мотора, т. е. значения μ_0 , μ_1 . Вместо того, чтобы при данном α искать значения a , ψ , w , оказывается более выгодным фиксировать среднюю угловую скорость w и вычислить остальные неизвестные a , ψ , α . Находя из третьего уравнения (28) выражение

$$\frac{\mu_0 - \mu_1 w}{w}$$

и подставляя его в два первых уравнения, освобождаемся тем самым от зависимости этих уравнений от параметра α и можем решать их самостоятельно. Получим

$$0 = -\frac{\varepsilon \delta a}{2w} + \left[\frac{\varepsilon \kappa}{w(w+1)} + \frac{\varepsilon^2 \kappa \rho a^2 (1-w)}{4w^2(1+w)^2} \right] \sin \psi + \frac{\varepsilon^2 \delta \kappa}{2w(1+w)^2} \cos \psi + \left[\frac{\varepsilon^2 a \kappa \rho}{8w^4} (w-1) - \frac{\varepsilon^3 \kappa^2 \rho a}{4w(1+w)^3} \right] \sin 2\psi, \quad (33)$$

$$0 = \left(1 - \frac{1}{w} \right) a + \frac{\varepsilon^2 \delta^2 a}{8w} + \frac{\varepsilon^3 \kappa^2 \rho a}{4w(w+1)^3} - \frac{\varepsilon^2 \delta \kappa}{2w(1+w)^2} \sin \psi + \left[\frac{\varepsilon \kappa}{w(w+1)} + \frac{\varepsilon^2 \kappa \rho a^2 (1-w)}{4w^2(1+w)^2} \right] \cos \psi + \left[\frac{\varepsilon^2 \kappa \rho a}{8w^4} (w-1) - \frac{\varepsilon^3 \kappa^2 \rho a}{4w(1+w)^3} \right] \cos 2\psi.$$

Производя элементарные преобразования, можем еще из уравнений (33) исключить угол ψ и тогда получим соотношение

$$a^2 [g^2 + h^2 - f^2]^2 = [bg + e(h+f)]^2 + [ge + b(f-h)]^2, \quad (34)$$

где положено

$$\begin{aligned} g &= \varepsilon \frac{\delta}{2} (w+1), \\ b &= \varepsilon \kappa \left[1 + \frac{\varepsilon \rho a^2 (1-w)}{4w(1+w)} \right], \\ e &= \varepsilon^2 \kappa \frac{\delta}{2} \frac{1}{w+1}, \\ f &= \left[\frac{\varepsilon^2 \kappa \rho}{8w^3} (w^2-1) - \frac{\varepsilon^3 \kappa^2 \rho}{4(w+1)^2} \right], \\ h &= \left[w^2 - 1 + \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{8} (w+1) + \varepsilon^3 \frac{\kappa^2 \rho}{4(w+1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (34a)$$

Учитывая (34а), видим, что соотношение (34) является функцией только двух неизвестных a и w . Итак, им определена резонансная кривая данной системы. Так как из соотношения (34) невозможно непосредственно определить влияние инерции источника, сравним резонансные кривые для различных ϱ с кривой для $\varrho = 0$.

С этой целью преобразуем уравнение (34) к виду

$$a = \frac{\sqrt{[(\bar{b} + \varepsilon\varrho z_3)g + e(\bar{h} + \varepsilon\varrho z_1)]^2 + [ge + (\bar{b} + \varepsilon\varrho z_3)(-\bar{h} - \varepsilon\varrho z_2)]^2}}{g^2 + (\bar{h} + \varepsilon\varrho z_1)(\bar{h} + \varepsilon\varrho z_2)}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \varepsilon\kappa, \\ \bar{h} &= w^2 - 1 + \frac{\varepsilon^2\delta^2}{8}(w + 1), \\ z_1 &= \frac{\varepsilon^2\kappa^2(w^2 - 1)}{8w^3}, \\ z_2 &= \frac{\varepsilon^2\kappa^2}{2(w + 1)^2} - \frac{\varepsilon\kappa(w^2 - 1)}{8w^3}, \\ z_3 &= \varepsilon^3\kappa^3 \frac{1 - w}{4w(1 + w)} \frac{1}{(1 - w^2)^2 + \varepsilon^2\delta^2} \frac{(1 + w)^2}{4}. \end{aligned}$$

При этом, выражая b или z_3 , мы a^2 заменили приближенным соотношением (20а).

Считая $\varepsilon\varrho$ малым, можем в правой части уравнения (35) воспользоваться разложением в степенные ряды по степеням $\varepsilon\varrho$. Принимая во внимание только члены до порядка $(\varepsilon\varrho)^1$ и пренебрегая остальными, получим после преобразований

$$a_* = a_0 \left\{ 1 + \varepsilon\varrho \left[\frac{(g\bar{b} + e\bar{h})(gz_3 + ez_1) - (ge - b\bar{h})(\bar{b}z_2 + \bar{h}z_3)}{(g\bar{b} + e\bar{h})^2 + (ge - b\bar{h})^2} - \frac{\bar{h}(z_1 + z_2)}{g^2 + \bar{h}^2} \right] \right\},$$

где

$$a_0 = \frac{\sqrt{(bg + e\bar{h})^2 + (ge - b\bar{h})^2}}{g^2 + \bar{h}^2}$$

есть амплитуда колебаний при $\varepsilon\varrho = 0$.

Относительное изменение амплитуды Δa , вызванное малой инерцией источника, равно

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a_0}{a_0} &= \frac{a - a_0}{a_0} = \\ &= \varepsilon\varrho \left[\frac{(g\bar{b} + e\bar{h})(gz_3 + ez_1) - (ge - b\bar{h})(\bar{b}z_2 + \bar{h}z_3)}{(g\bar{b} + e\bar{h})^2 + (ge - b\bar{h})^2} - \frac{\bar{h}(z_1 + z_2)}{g^2 + \bar{h}^2} \right]. \quad (36) \end{aligned}$$

Из уравнения (36) видно, что относительное изменение амплитуды $\frac{\Delta a}{a_0}$ для малых $\varepsilon \rho$ пропорционально этой величине. Следовательно, выражение

$$\frac{\Delta a}{a_0} \frac{1}{\varepsilon \rho} \quad (37)$$

зависит только от частоты ω , затухания $\varepsilon \delta$ и величины возбуждающей силы εk . График величины $\frac{\Delta a}{a_0}$ для различных εk и $\varepsilon \delta$ приведен на рис.

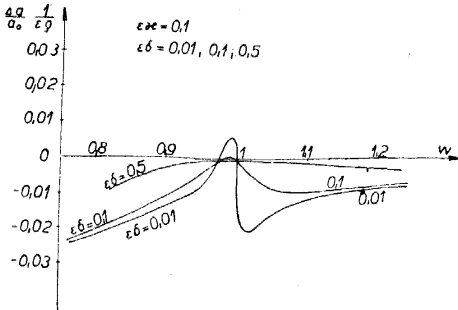


Рис. 3.

3 и 4. Из этих рисунков видно, что под влиянием малой инерции источника амплитуда колебаний уменьшается почти во всем интервале частот ω , за исключением узкой области, расположенной непосредственно перед резонансным максимумом, где вследствие малого затухания относительное изменение амплитуды положительно. Наоборот, непосредственно за максимумом резонансной кривой ($\omega = 1$), график внезапно падает. Его ха-

рактер в окрестности резонанса будет, следовательно, таким, как показано на рис. 5.

С ростом затухания $\varepsilon \delta$ влияние малой инерции источника возбуждающей силы на форму резонансной кривой уменьшается, как видно из рис. 3 и 4, на которых кривая $\frac{\Delta a}{a_0} \frac{1}{\varepsilon \rho}$ при $\varepsilon \delta = 0,5$ переходит в выпрямляющуюся линию, примыкающую к оси $\frac{\Delta a}{a_0} = 0$ и находящуюся целиком под этой осью.

Итак, в случае системы с большим затуханием, не настанет никакого повышения амплитуды, но, наоборот, под влиянием малой инерции источника амплитуда колебаний понизится, правда, в незначительной степени, но зато во всем интервале частот ω .

На величину изменения амплитуд оказывает существенное влияние параметр $\varepsilon k = \frac{c_1}{c + c_1}$, характеризующий отношение жесткости пружины, посредством которой механическая система возбуждается, к общей жесткости этой системы. При этом с возрастанием εk возрастает также и изменение амплитуд $\frac{\Delta a}{a_0}$. Например, после увеличения εk в пять раз (с $\varepsilon k = 0,1$ на $0,5$) склонение увеличилось приблизительно в 10 раз.

5. Устойчивость периодических колебаний

Теперь хоть вкратце остановимся на устойчивости периодического решения уравнений (9), или же соответствующего решения $a = \text{konst}$, $\psi = \text{konst}$, $w = \text{konst}$ уравнений (28). В этих уравнениях выражены первые производные по φ , и в их правых частях содержатся только зависимые переменные a , ψ , w , а не содержится в них независимая переменная φ . Установить условия устойчивости такой системы — это, в сущности, очень простая задача, не представляющая серьезных затруднений. Дело заключается в нахождении характеристических значений определителя третьего порядка, элементами которого служат частные производные правых частей уравнений (28) по a , ψ , w .

Однако для анализа влияния отдельных параметров (напр., ρ , κ , δ) на устойчивость колебаний

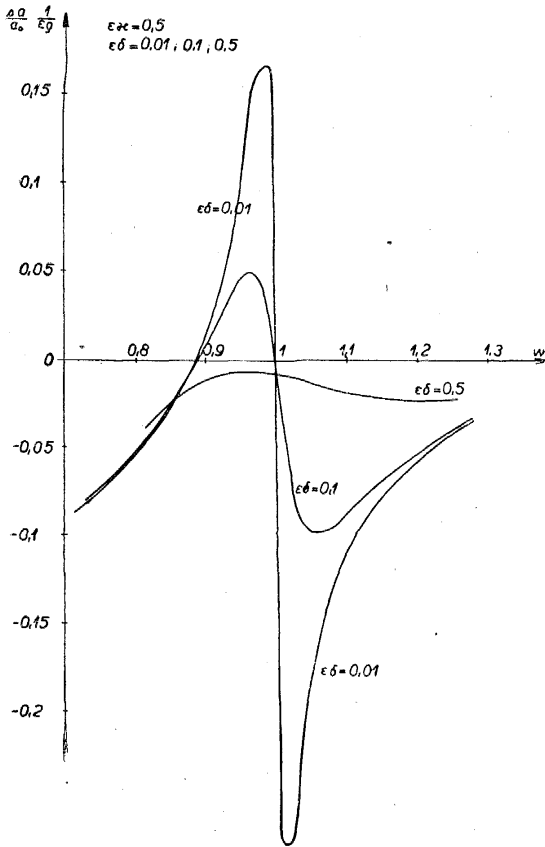


Рис. 4.

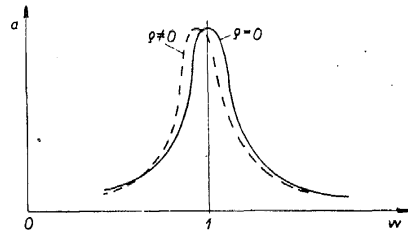


Рис. 5.

этот метод не пригоден, потому что полученные выражения очень сложны.

Поэтому мы произведем здесь только частичный анализ,⁷⁾ который приведет нас к простым результатам, причем его правильность можем проверить сравнением с экспериментальными данными. Рассмотрим энергию, которая в двигателе превращается в крутящий момент, и энергию, которая от мотора передается колебательной системе посредством пружины C_1 .

⁷⁾ На возможность произвести частичный анализ указал автору проф. В. О. Кононенко, доктор техн. наук из АН СССР.

Энергия, возникающая в результате одного оборота, т. е. работа, которую можем при данных оборотах и при данной паладке параметра α получить от мотора, равна

$$W_m = \int_0^{2\pi} M(\dot{q}, \alpha) d\varphi = I\Omega^2 \int_0^{2\pi} \varepsilon\mu(\theta\alpha) d\varphi. \quad (38)$$

С точностью до порядка ε можно писать

$$W_m = I\Omega^2 \varepsilon\mu(w, \alpha) 2\pi \quad (38a)$$

или же, учитывая условие (7),

$$W_m = I\Omega^2 [\varepsilon\mu_0(\alpha) - \varepsilon\mu_1(\alpha) w] 2\pi. \quad (38b)$$

Аналогично работа, полученная колебательной системой посредством пружины C_1 , равна

$$\begin{aligned} W_s &= \int_0^{2\pi} c_1(-x + r \cos \varphi) dx = c_1 r^2 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - y) \frac{dy}{d\varphi} d\varphi = \\ &= c_1 r^2 \int_0^{2\pi} [\cos \varphi - a \cos(\varphi - \psi)] [-a \sin(\varphi - \psi)] d\varphi = \\ &= c_1 r^2 \pi a \sin \psi = I\Omega^2 \pi \varepsilon^2 \kappa \varrho a \sin \psi. \end{aligned} \quad (39)$$

Последнее уравнение (28) можно представить в виде

$$w \frac{dw}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi I\Omega^2} [W_m - W_s].$$

Из этого уравнения видно, что уравновешенное состояние обусловлено равенством между работой, получаемой от мотора, и работой, затраченной в колебательной системе. Для определения устойчивости выгодно еще в выражении для W_s представить величины a и ψ в виде функции от угловой скорости w :

$$W_s = I\Omega^2 \pi \varepsilon^2 \kappa \varrho \frac{\varepsilon^2 \delta \kappa \frac{w+1}{2}}{(w^2 - 1)^2 + \frac{\varepsilon^2 \delta^2 (w+1)^2}{4}}.$$

График этой кривой приведен на рис. 6. На том же рисунке приведены характеристики мотора W_m при различной паладке параметра α .

Из уравнения (40) уже можем легко вывести условия устойчивости. Так как правая часть этого уравнения является только функцией от w (с точностью до порядка ε^2 и при постоянных параметрах $\alpha, \delta, \kappa, \varrho$), то решение $w = \text{konst} > 0$ будет устойчивым, как только будет

$$\frac{d}{dw} (W_m - W_s) < 0, \quad (40)$$

и неустойчивым, как только

$$\frac{d}{dw}(W_m - W_s) > 0.$$

Итак, если производная $\frac{dW_m}{dw}$, являющаяся в случае характеристики мотора, данной соотношением (7а), величиной, пропорциональной μ_1 , больше производной $\frac{dW_0}{dw}$, то движение неустойчиво. Графически можно

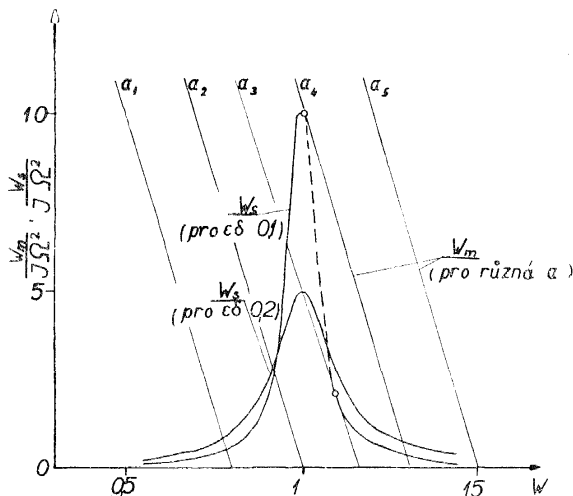


Рис. 6.

определять устойчивость по диаграмме на рис. 6. Часть кривой W_s , соответствующая устойчивому движению, отмечена сплошной линией, неустойчивому движению соответствует часть, отмеченная прерываемой линией. Граница между ними образована точками касания, в которых кривая W_s касается некоторой кривой, принадлежащей системе кривых W_m .

Уравнение (40) и рис. 6 дают возможность сделать вывод о влиянии характеристики мотора на устойчивость периодических колебаний. Чем наклон характеристики больше (т. е. μ_1 больше — тверже источник энергии), тем область неустойчивости меньше, а может случиться, что она совсем исчезнет.

Исследуя еще влияние затухания собственной колебательной системы на величину области неустойчивости, мы видим, что область неустойчивости в случае системы с малым затуханием больше, чем в случае системы с большим затуханием. Это обусловлено тем, что система с большим за-

туханием имеет более выпрямленную резонансную кривую (меньший наклон $\frac{dW_s}{dw}$), чем система с малым затуханием.

Итак, чтобы достоверно рассчитать и построить резонансные кривые колебательной системы, надо пользоваться твердым источником энергии, характеристика которого должна иметь тем больший наклон, чем меньше затухание рассматриваемой системы.

Заключение

В настоящей работе анализируется влияние свойств источника возбуждающей силы (вибратора) на характер движения возбужденной системы для случая механической колебательной системы с одной степенью свободы. В качестве источника взят вращательный двигатель, который при помощи кулачка и пружины приводит упомянутую механическую систему в колебания.

В статье показано, что малая инерция источника возбуждающей силы влияет не только на поведение самого источника, но и на поведение всей колебательной системы. Вследствие малой инерции источника последний вращается неравномерно, что сказывается в наличии высших четных гармонических составляющих, которые складываются с основным равномерным вращательным движением.

Колебания возбужденной системы уже не носят чисто синусоидальный характер, но опять-таки содержат высшие гармоники; на этот раз они все имеют нечетный порядок. Их величина зависит от величины возбуждающей силы (параметр $\epsilon\varrho$) и является обратно пропорциональной инерции источника, значит, прямо пропорциональной параметру $\epsilon\varrho$. Далее, она является также функцией частоты w и амплитуды первой гармоники a .

Амплитуду a можно при помощи выведенных соотношений вычислить как в случае переходных, так и установившихся колебаний. В случае установившихся колебаний проводится еще более подробный анализ вида резонансных кривых, из которого видно, что разница между резонансными кривыми для конечной и для бесконечной инерции источника является функцией угловой скорости w и что эта разница возрастает, если возбуждающая сила $\epsilon\varrho$ возрастает и затухание убывает.

На характер колебаний и на вид резонансных кривых влияет главным образом инерция источника. Характеристика же мотора оказывает большое влияние на устойчивость периодических колебаний. Малый наклон характеристики мотора является причиной неустойчивости движения, которому соответствует часть резонансной кривой, расположенная непосред-

ственно за максимумом резонанса. Область неустойчивости тем больше, чем меньше загрузка колебательной системы и чем меньше наклон характеристики мотора.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Боголюбов Н. И., Митропольский П. А.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва 1955.
- [2] Klotter K.: Technische Schwingungslehre, Berlin 1951.
- [3] Корпівка В., Турек Р.: Резонанční kmitání konstrukcí při rychlém přejíždění kritických otáček, Strojírenství 9, 1955, str. 652.
- [4] Lewis F. M.: Vibration during acceleration through a critical speed, Trans. ASME, sv. 54, 1932, str. 253.
- [5] Лоуциский Л. Г., Лурье А. И.: Курс теоретической механики, Москва 1948.
- [6] Митропольский П. А.: Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Киев 1955.
- [7] Pöschl Th.: Das Anlaufen eines einfachen Schwingers, Ing.-Archiv IV, 1933, str. 98.
- [8] Půst L.: Vliv vlastností zdroje střídavé síly na kmitání mechanického systému, Výzkumná zpráva č. 51/57, ÚVS — ČSAV, Praha 1957.

Souhrn

VLIV VLASTNOSTÍ ZDROJE STŘÍDAVÉ SÍLY NA KMITÁNÍ MECHANICKÉHO SYSTÉMU

LADISLAV PŮST

(Došlo dne 30. října 1957.)

V článku je proveden rozbor vlivu vlastností zdroje budící síly (vibrátoru) na průběh pohybu rozkmitávaného systému o jednom stupni volnosti. Zdroj je uvažován jako rotační motor, který pomocí vačky a přídatné pružiny rozkmitává zmíněný mechanický systém.

V práci je prokázáno, že malá setrvačnost zdroje budící síly má vliv nejen na vlastní chování zdroje, ale ovlivňuje i chování oscilačního systému. Malá setrvačnost zdroje má za následek jeho nerovnoměrné otáčení, což se projevuje přítomností vyšších sudých harmonických složek, které se skládají se základním rovnoměrným rotačním pohybem.

Průběh kmitů oscilačního systému není již čistě sinusový, nýbrž opět obsahuje vyšší harmonické složky, tentokrát však vesměs liché řádu. Jejich velikost závisí na velikosti budící síly (parametr ϵz) a je nepřímo úměrná setrvačnosti zdroje, tj. přímo úměrná parametru ϵq . Dále je také funkcí frekvence w a amplitudy první harmonické složky a .

Amplitudu a lze na základě odvozených vztahů vypočítat pro případ přechodových i ustálených kmitů. Pro ustálené kmity je proveden ještě podrobnější rozbor průběhu rezonančních křivek, z něhož je patrné, že rozdíl mezi rezonanční křivkou pro konečnou a nekonečnou setrvačnost zdroje je funkcí úhlové rychlosti ω a že pro větší budící sílu εx a menší tlumení tento rozdíl vzrůstá. Průběh kmitů a tvar rezonančních křivek ovlivňuje hlavně malá setrvačnost zdroje. Charakteristika motoru naproti tomu má značný vliv na stabilitu periodických kmitů. Malá strmost charakteristiky motoru způsobuje nestabilitu části rezonanční křivky, těsně za rezonančním vrcholem. Nestabilní oblast je tím větší, čím je kmitající soustava méně tlumená a čím menší je strmost charakteristiky motoru.

Zusammenfassung

WIRKUNG DER EIGENSCHAFTEN DES WECHSELKRAFTERREGERS AUF DIE SCHWINGUNGEN EINES MECHANISCHEN SYSTEMS

LADISLAV PŮST

(Eingegangen am 30. Oktober 1957.)

In diesem Artikel ist die Bewegung des Schwingungssystems, das mit Hilfe der Feder und der exzentrischen Scheibe, die auf der Welle des Motors befestigt ist, erregt wird.

Durch die theoretische Analyse ist ersichtlich, dass der kleine Massenträgheitsmoment des Motors ein unregelmässiges Umdrehen verusacht. Die Winkelgeschwindigkeit des Rotors enthält noch gerade harmonische Bestandteile. Auch der Verlauf der Schwingungen des Systems ist nicht mehr eine reine Sinuskurve, sondern der Verlauf enthält noch weitere ungerade harmonische Bestandteile.

Die Resonanzkurve des Systems ist auch ein wenig verzerrt, und der Grösstwert der Resonanzkurve liegt bei etwas kleinerer Frequenz.

Der Verlauf der Arbeitscharakteristik des Motors, insbesondere ihre Neigung, beeinflusst dagegen die Stabilität der Resonanzkurve. Der instabile Teil liegt direkt hinter dem Grösstwert der Resonanzkurve und ist umso grösser, je kleiner die Dämpfung und der Kraftserreger weicher ist (die Neigung der Charakteristik ist kleiner).