Josef Čajka

Příspěvek k přibližnému řešení algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 5, 360–371

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102629

PŘÍSPĚVEK K PŘIBLIŽNÉMU ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC TŘETÍHO A ČTVRTÉHO STUPNĚ

JOSEF ČAJKA

(Došlo dne 6. května 1957.) DT: 512.393: 518.43

V článku je popsána metoda přibližného řešení numerických algebraických rovnic třetího a čtvrtého stupně. Jsou odvozeny funkce $A = F_1(B)$ a $A = F_2(B)$ (kde A a B jsou funkcemi koeficientů uvažované algebraické rovnice), jejichž graficko-početním řešením dostaneme hodnoty koeficientů kvadratických trojčlenů $p^2 + Ap + B$. Je ukázáno, že řešená algebraická rovnice je těmito trojčleny dělitelná beze zbytku, takže kořeny rovnice $p^2 + Ap + B = 0$ jsou současně kořeny řešené rovnice.

1. Úvod

V technické praxi často potřebujeme určit kořeny algebraické rovnice n-tého stupně ($n > 2$), která má obecně tvar

$$f(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0\,, \tag{1}$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a n je přirozené číslo.

Popíši graficko-početní metodu, která umožňuje určit přibližně hodnoty kořenů numerické rovnice (1) pro $n = 3$ a $n = 4$ s předepsanou přesností.

2. Rozklad polynomu $f(p)$

Napišme polynom n-tého stupně ($n > 2$)

$$f(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 \tag{2}$$

ve tvaru

$$f(p) = f_1(p)\, f_2(p) + f_3(p)\,, \tag{3}$$

kde

$$f_1(p) = p^2 + Ap + B \tag{4}$$

a

$$f_2(p) = p^{n-2} + b_{n-3}p^{n-3} + \ldots + b_1 p + b_0\,. \tag{5}$$

Vypočítáme-li z rovnice (3) zbytkový polynom $f_3(p)$ a položíme-li ho identicky rovným nule, dostaneme

$$f_3(p) = f(p) - f_1(p)\, f_2(p) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (a_{n-k} - b_{n-k-2} - b_{n-k-1}A - b_{n-k}B)\, p^{n-k} \equiv 0\,. \tag{6}$$

Zde je

$$b_{n-2} = 1$$

a

$$b_{n-1} = b_{-2} = b_{-1} = 0\,.$$

Z rovnice (6) dostaneme n vztahů

$$b_{n-k} = \frac{1}{B}\,(a_{n-k} - b_{n-k-2} - b_{n-k-1}A) \quad (k = n, n-1, \dots, 3)\,, \tag{7}$$

$$A = a_{n-1} - b_{n-3}\,, \tag{8}$$

$$B = a_{n-2} - b_{n-4} - b_{n-3}A\,. \tag{9a}$$

Uvažujeme zde, že $B \neq 0$. Případ $B = 0$ nemá význam, předpokládáme-li, že všechny kořeny rovnice (1) jsou od nuly různé.

Když z rovnice (8) dosadíme b_{n-3} do vztahu (9a), dostaneme

$$B = A^2 - a_{n-1}A + a_{n-2} - b_{n-4}\,. \tag{9b}$$

Rovnice (7), (8) a (9b) můžeme poměrně snadno postupnou eliminací upravit na dvě rovnice o dvou neznámých

$$A = G_1(A, B) \tag{10}$$

a

$$B = G_2(A, B)\,. \tag{11}$$

Hodnoty A a B, které dostaneme řešením rovnic (10) a (11), splňují zřejmě rovnici (6), tj. podmínku $f_3(p) \equiv 0$, takže rovnice (3) nabude tvaru

$$f(p) = f_1(p)\, f_2(p)\,.$$

Protože rovnice (1) je nyní dělitelná kvadratickým trojčlenem beze zbytku, jsou kořeny kvadratických rovnic

$$p^2 + A^{(k)}p + B^{(k)} = 0 \tag{12}$$

současně kořeny řešené rovnice (1). Jednotlivá řešení rovnic (10) a (11) jsme od sebe odlišili čárkami, tj. $A^{(k)}$ a $B^{(k)}$ je jejich k-té řešení.

Funkce $A = G_1(A, B)$ a $B = G_2(A, B)$, vypočítané ze vztahů (7), (8) a (9b), jsou

pro $n = 3$

$$A = G_1(A, B) = a_2 - \frac{a_0}{B}\,, \tag{13}$$

$$B = G_2(A, B) = a_1 - a_0\frac{A}{B}\,, \tag{14}$$

pro $n = 4$

$$A = G_1(A, B) = a_3 - \frac{1}{B}\left(a_1 - a_0 \frac{A}{B}\right), \tag{15}$$

$$B = G_2(A, B) = A^2 - a_3A + a_2 - \frac{a_0}{B}. \tag{16}$$

3. Řešení rovnice třetího stupně

Pro rovnici třetího stupně ($n = 3$)

$$p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0 \tag{17}$$

upravíme vztahy (13) a (14) snadno na vhodnější tvar

$$A = F_1(B) = a_2 - \frac{a_0}{B} \tag{18}$$

a

$$A = F_2(B) = \frac{1}{a_0}(a_1B - B^2). \tag{19}$$

Rovnice (18) a (19), jež jsou vhodnou transkripcí vztahů (10) a (11), budeme řešit graficky. Nakreslíme-li na milimetrovém papíře grafy funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$, budou hodnoty A a B, jež odpovídají průsečíkům obou funkcí, splňovat rovnici (6). Kořeny rovnice (17) pak snadno vypočítáme podle vztahů (4) a (5) z rovnic

$$p^2 + Ap + B = 0 \tag{20}$$

a

$$p + b_0 = 0, \tag{21}$$

kde

$$b_0 = a_2 - A. \tag{22}$$

Graf funkce $A = F_1(B)$ [rovnice (18)] je rovnoosá hyperbola, jejíž asymptoty mají rovnice $B = 0$ a $A = a_2$. Je-li $a_0 > 0$, mají její vrcholy souřadnice $(\sqrt{a_0}; a_2 - \sqrt{a_0})$ a $(-\sqrt{a_0}; a_2 + \sqrt{a_0})$, je-li však $a_0 < 0$, jsou souřadnice vrcholů hyperboly $(\sqrt{-a_0}; a_2 + \sqrt{-a_0})$ a $(-\sqrt{-a_0}; a_2 - \sqrt{-a_0})$. Známe-li asymptoty a polohu vrcholů hyperboly, snadno sestrojíme další její body graficky [1]. Pro konstrukci můžeme místo vrcholů použít vhodně volených bodů, je-li to s ohledem na měřítko výhodnější.

Graf funkce $A = F_2(B)$ [rovnice (19)] je parabola, která prochází počátkem. Její hlavní osa má směr osy A a její vrchol má souřadnice $\left(\frac{a_1}{2}; \frac{a_1^2}{4a_0}\right)$. Je-li třeba pro konstrukci zakreslit další její bod, je výhodné volit bod $(ma_0; ma_1 - m^2a_0)$, kde m je libovolné reálné číslo. Známe-li vrchol, osu a jeden bod paraboly, můžeme další její body sestrojit rovněž graficky.

Když jsme určili *graficky* přibližně velikosti souřadnic průsečíku funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ (označme je B_1 a A_1), můžeme přesnější jejich hodnoty *vypočítat metodou iterací.*

Pro metodu iterací potřebujeme znát inversní funkce k funkcím $A = F_1(B)$ a $A = F_2(B)$, které pro uvažovaný případ jsou

$$B = F_1^{-1}(A) = \frac{a_0}{a_2 - A} \tag{23}$$

a

$$B = F_2^{-1}(A) = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 A}\,. \tag{24}$$

V rovnici (24) bereme znaménko plus, leží-li průsečík napravo od vrcholu paraboly $F_2(B)$ a znaménko minus, leží-li od vrcholu paraboly nalevo.

Máme-li totiž dvě funkce $F_1(B)$ a $F_2(B)$ a platí-li v okolí jejich průsečíku stále [2]

$$|F_1'(B)| < |F_2'(B)|\,, \tag{25}$$

vypočítáme přesnější hodnoty souřadnic jejich průsečíku z hodnot získaných graficky opakovaným dosazováním do rovnic

$$A_k = F_1(B_{k-1})\,, \tag{26a}$$

$$B_k = F_2^{-1}(A_k)\,, \tag{26b}$$

pro $k = 2, 3, 4, \ldots$

Je-li však v okolí jejich průsečíku

$$|F_1'(B)| > |F_2'(B)|\,, \tag{27}$$

počítáme přesnější hodnoty podle následujícího schematu

$$A_k = F_2(B_{k-1})\,, \tag{28a}$$

$$B_k = F_1^{-1}(A_k)\,, \tag{28b}$$

pro $k = 2, 3, 4, \ldots$

Ve vztazích (25) až (28) jsou $F_1'(B)$ a $F_2'(B)$ derivace funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ v okolí jejich průsečíku a $F_1^{-1}(A)$ a $F_2^{-1}(A)$ jsou *inversní* funkce k funkcím $F_1(B)$ a $F_2(B)$. Platí-li v okolí průsečíku nerovnost (25) anebo nerovnost (27), to je obvykle na první pohled patrno z grafu obou funkcí.

Konvergence posloupností $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_k$ a $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ je dokázána pro uvedené případy v literatuře [2].

Mají-li funkce $F_1'(B)$ a $F_2'(B)$ v okolí průsečíku funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ stejné znaménko, pak se k přesnějším hodnotám souřadnic tohoto průsečíku přibližujeme pouze z jedné strany, mají-li však $F_1'(B)$ a $F_2'(B)$ v okolí uvažovaného průsečíku různá znaménka, přibližujeme se k správným hodnotám střídavě z obou stran.

Je-li v okolí uvažovaného průsečíku $F'_1(B) \doteq - F'_2(B)$, konverguje počítaná posloupnost velmi pomalu. Její konvergenci značně urychlíme tím, že ze dvou po sobě následujících vypočítaných členů posloupnosti vezmeme jejich aritmetický střed jako další hodnotu posloupnosti. Možné schema výpočtu pak jest

$$A_k = F_1(B_{k-1}) , \tag{29a}$$

$$B_k = F_2^{-1}(A_k) , \tag{29b}$$

$$B_{k+1} = \frac{B_{k-1} + B_k}{2} , \tag{29c}$$

pro $k = 2, 4, 6, \ldots$

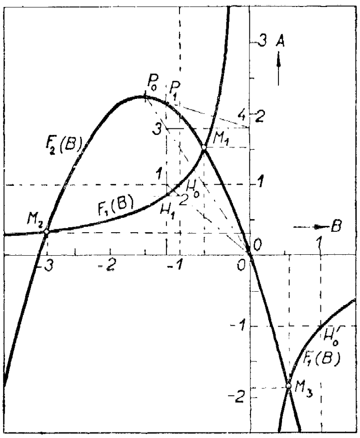
Hodnota B_k (případně A_k) je u metody iterací přesná na tolik míst, na kolika se shoduje B_k s B_{k-1} (případně A_k s A_{k-1}).

Jako příklad řešme kubickou rovnici

$$p^3 - 3p + 1 = 0 .$$

V uvažovaném případě je

$$A = F_1(B) = a_2 - \frac{a_0}{B} = - \frac{1}{B} .$$



Obr. 1. Grafy funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ pro kubickou rovnici $p^3 - 3p + 1 = 0$.

Je to rovnoosá hyperbola, jejíž asymptoty jsou osy B a A a jejíž vrcholy mají souřadnice $(1; -1)$ a $(-1; 1)$.

Funkce

$$A = F_2(B) = \frac{a_1}{a_0} B - \frac{B^2}{a_0} = - 3B - B^2$$

je parabola procházející počátkem. Její vrchol má souřadnice $(-1{,}5; 2{,}25)$.

Grafy obou funkcí jsou nakresleny na obr. 1, kde je též vyznačena konstrukce jednoho bodu hyperboly (H_1) i paraboly (P_1). Z obr. 1 je vidět, že v sledovaném případě se grafy obou funkcí protínají ve třech bodech (M_1, M_2, M_3). Pro další výpočet můžeme zvolit kterýkoliv z nich. Volme bod $M_1(-0{,}65; 1{,}5)$, pro jehož okolí zřejmě platí $F'_1(B) \doteq - F'_2(B)$. Budeme proto při výpočtu přesnějších hodnot souřadnic průsečíku počítat podle schématu (29abc). Dostaneme postupně tyto hodnoty:

$$\begin{aligned}
A_2 &= 1{,}5275 ; & B_2 &= -0{,}654664 ; & B_3 &= -0{,}652332 ; \\
A_4 &= 1{,}531459 ; & B_4 &= -0{,}652972 ; & B_5 &= -0{,}652652 ; \\
A_6 &= 1{,}532001 ; & B_6 &= -0{,}652741 ; & B_7 &= -0{,}652696 ; \\
A_8 &= 1{,}532062 ; & B_8 &= -0{,}652715 ; & B_9 &= -0{,}652705 .
\end{aligned}$$

Při výpočtu bylo použito sedmimístných logaritmických tabulek.

Reálný kořen řešené rovnice dostaneme ze vztahů (21) a (22)

$$p = - b_0 = A - a_2 = 1{,}5320 ,$$

zatím co zbývající dva kořeny (v uvažovaném případě rovněž reálné) dostaneme řešením kvadratické rovnice

$$p^2 + 1{,}5320p - 0{,}65270 = 0\,.$$

4. Řešení rovnice čtvrtého stupně

Pro rovnici čtvrtého stupně

$$p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0 \tag{30}$$

můžeme vztahy (16) a (15) také upravit na vhodnější tvar

$$A = F_1(B) = \frac{a_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - a_2 + B + \frac{a_0}{B}} \tag{31}$$

a

$$A = F_2(B) = a_3 + \frac{a_1B - a_0a_3}{a_0 - B^2}\,. \tag{32}$$

Polynom $f(p)$ v rovnici (30) můžeme podle odstavce 2 rozložit

$$p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = (p^2 + Ap + B)(p^2 + b_1p + b_0)\,. \tag{33}$$

V rovnici (33) platí mezi koeficienty vztahy

$$a_0 = Bb_0\,, \tag{34a}$$

$$a_1 = Bb_1 + Ab_0\,, \tag{34b}$$

$$a_2 = B + Ab_1 + b_0\,, \tag{34c}$$

$$a_3 = A + b_1\,. \tag{34d}$$

Uvažujme nyní zvláštní případ, kdy platí

$$B = b_0\,. \tag{35}$$

Potom dělením vztahu (34b) vztahem (34d) dostaneme

$$\frac{a_1}{a_3} = B\,. \tag{36}$$

Ze vztahu (34a) však plyne

$$B = \pm\sqrt{a_0}\,. \tag{37}$$

Dosadíme-li B z rovnice (37) do rovnice (36), dostaneme

$$\frac{a_1}{a_3} = \pm\sqrt{a_0}\,. \tag{38}$$

Platí-li předpoklad (35), vypočítáme hodnotu A (případně hodnotu b_1) ze vztahů (34c), (34d) a (36)

$$\left.\begin{matrix}A\\ b_1\end{matrix}\right\rangle = \frac{a_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - a_2 + 2\,\frac{a_1}{a_3}}\,, \tag{39}$$

kde A (případně b_1) budou reálná čísla pouze v případě, když bude

$$a_2 \leqq \left(\frac{a_3}{2}\right)^2 + 2\frac{a_1}{a_3}. \tag{40}$$

Z uvedeného můžeme udělat tento závěr: Jsou-li u rovnice čtvrtého stupně (30) náhodou splněny podmínky (38) i (40), vypočítáme $B = b_0$ z rovnice (36) a hodnoty A a b_1 z rovnice (39).

Jako příklad uvažujme rovnici

$$p^4 + 2p^3 - 4p^2 - 3p + 2{,}25 = 0\,,$$

která zřejmě splňuje podmínku (38) i podmínku (40). Bude proto

$$B = b_0 = \frac{a_1}{a_3} = -1{,}5$$

a

$$\left.\begin{matrix} A \\ b_1 \end{matrix}\right\rangle = \frac{a_3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - a_2 + 2\frac{a_1}{a_3}} = \left\langle\begin{matrix} 2{,}4142 \\ -0{,}4142 \end{matrix}\right. .$$

Kořeny řešené rovnice dostaneme v tomto případě z kvadratických rovnic

$$p^2 + 2{,}4142p - 1{,}5 = 0$$

a

$$p^2 - 0{,}4142p - 1{,}5 = 0\,.$$

Nejsou-li splněny podmínky (38) a (40) současně, nemůžeme při řešení postupovat právě popsaným způsobem, nýbrž tak, že nakreslíme grafy funkcí $F_1(B)$ [rovnice (31)] a $F_2(B)$ [rovnice (32)] na milimetrovém papíře, načež odečteme z grafu souřadnice jednoho jejich průsečíku (B_1; A_1). Hodnoty odečtené z grafu můžeme podle potřeby zpřesnit metodou iterací. Potřebné inversní funkce k funkcím $F_1(B)$ a $F_2(B)$ jsou

$$B = F_1^{-1}(A) = \frac{(A^2 - a_3A + a_2) \pm \sqrt{(A^2 - a_3A + a_2)^2 - 4a_0}}{2} \tag{41}$$

a

$$B = F_2^{-1}(A) = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0A(a_3 - A)}}{2(a_3 - A)}\,. \tag{42}$$

U inversních funkcí daných vztahy (41) a (42) bereme před odmocninou takové znaménko, aby vypočítaná hodnota B odpovídala hodnotě B_1 odečtené z grafu.

Známe-li souřadnice jednoho průsečíku s požadovanou přesností, můžeme hodnoty b_0 a b_1 snadno vypočítat z rovnic (34a) a (34d)

$$b_0 = \frac{a_0}{B}\,, \tag{43}$$

$$b_1 = a_3 - A\,. \tag{44}$$

Z rovnice (34a) rovněž vyplývá, že grafy funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ musejí mít jeden reálný průsečík v intervalu

$$-\sqrt{|a_0|} < B < \sqrt{|a_0|} \,. \tag{45}$$

Budeme proto jejich průběh vyšetřovat pouze v tomto intervalu.

Při vynášení grafů nemusíme jednotlivé body funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ počítat z rovnic (31) a (32), ale můžeme je zkonstruovat v pomocných grafech.

Napíšeme-li rovnici (31) ve tvaru

$$A = F_1(B) = \frac{a_3}{2} \pm \sqrt{g_1(B) - g_2(B)} \,, \tag{46}$$

můžeme snadno na milimetrovém papíře nakreslit grafy pomocných funkcí (kreslíme je ve stejném měřítku)

$$y = g_1(B) = B + \left(\frac{a_3}{2}\right)^2 - a_2 \,, \tag{47}$$

což jest rovnice přímky a

$$y = g_2(B) = -\frac{a_0}{B} \,, \tag{48}$$

což je rovnice rovnoosé hyperboly, jejímiž asymptotami jsou osy souřadné a jejíž vrchol má souřadnice

$$(\sqrt{a_0};\ -\sqrt{a_0}) \text{ a } (-\sqrt{a_0};\ \sqrt{a_0}) \,,$$

je-li $a_0 > 0$, ale

$$(\sqrt{-a_0};\ \sqrt{-a_0}) \text{ a } (-\sqrt{-a_0};\ -\sqrt{-a_0}) \,,$$

je-li $a_0 < 0$.

V intervalu daném vztahem (45), omezeném však s ohledem na rovnici (46) jen na úseky, kde $g_1(B) > g_2(B)$, odpíchneme z grafu pro několik hodnot B vzdálenost mezi $g_1(B)$ a $g_2(B)$. Takto získané hodnoty odmocníme na logaritmickém pravítku. Hodnotu odmocniny přičteme na hlavním grafu k přímce $A = a_3/2$ a tutéž hodnotu od ní odečteme. Dostaneme tak graf funkce $F_1(B)$, pro niž zřejmě platí $F_1(0) = \infty$.

Položíme-li analogicky v rovnici (32)

$$A = F_2(B) = a_3 + \frac{g_3(B)}{g_4(B)} \,, \tag{49}$$

můžeme na milimetrovém papíře nakreslit grafy pomocných funkcí (tentokrát mohou být kresleny i v různých měřítkách)

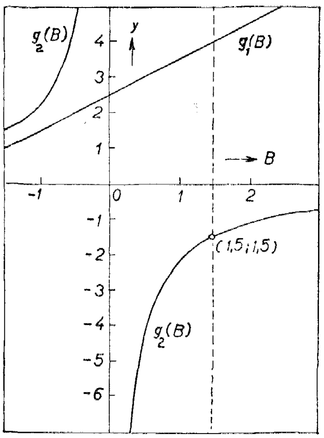
$$y = g_3(B) = a_1 B - a_0 a_3 \,, \tag{50}$$

což jest rovnice přímky a

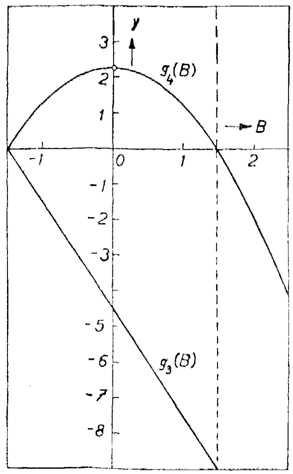
$$y = g_4(B) = a_0 - B^2 \,, \tag{51}$$

což jest rovnice paraboly, jejíž osa je rovnoběžná s osou y, jejíž vrchol má souřadnice $(0; a_0)$ a která prochází bodem $(\pm\sqrt{a_0}; 0)$, je-li $a_0 > 0$, anebo bodem $(\pm\sqrt{a_0}; 2a_0)$, je-li $a_0 < 0$.

Z grafu odečteme pak pro několik hodnot B (v intervalu, v němž má $F_1(B)$ reálnou hodnotu) hodnoty $g_3(B)$ a $g_4(B)$. Jejich podíl $g_3(B)/g_4(B)$ (vypočítaný na logaritmickém pravítku) přičteme potom v hlavním grafu k přímce $A = a_3$. Dostaneme tím graf funkce $F_2(B)$, pro niž platí $F_2(0) = 0$.



Obr. 2. Grafy pomocných funkcí $g_1(B)$ a $g_2(B)$ pro rovnici $p^4 + 2p^3 - 1,5p^2 - 3p + 2,25 = 0$.



Obr. 3. Grafy pomocných funkcí $g_3(B)$ a $g_4(B)$ pro rovnici $p^4 + 2p^3 - 1,5p^2 - 3p + 2,25 = 0$.

Jako příklad řešme rovnici

$$p^4 + 2p - 1,5p^2 - 3p + 2,25 = 0\,.$$

Koeficienty této rovnice splňují sice podmínku (38), nesplňují však podmínku (40). Určíme proto přibližné hodnoty kořenů nejdříve graficky.

Na milimetrovém papíře nakreslíme graf pomocné přímky podle vztahu (47)

$$y = g_1(B) = B + 2,5$$

a do týchž os souřadných nakreslíme ve stejném měřítku graf rovnoosé hyperboly podle vztahu (48)

$$y = g_2(B) = -\frac{2,25}{B}\,.$$

Její vrcholy mají souřadnice $(1,5; -1,5)$ a $(-1,5; 1,5)$. Oba grafy jsou nakresleny na obr. 2. Z obrázku je vidět, že funkce $F_1(B)$ bude mít reálnou hodnotu pouze pro kladná B. Sestrojíme proto z pomocných grafů na obr. 2

dříve popsaným způsobem graf funkce $F_1(B)$ pouze v intervalu $0 < B < 1,5$ (obr. 4).

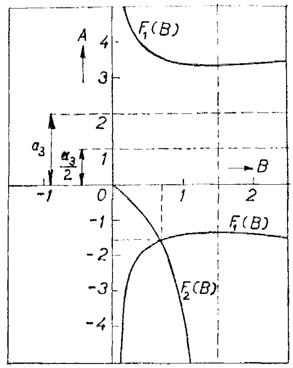
Potom do jiného obrázku nakreslíme graf pomocné přímky podle vztahu (50)

$$y = g_3(B) = -3B - 9$$

a graf pomocné paraboly podle vztahu (51)

$$y = g_4(B) = 2,25 - B^2 .$$

Parabola prochází bodem (1,5; 0) a její vrchol má souřadnice (0; 2,25). Grafy funkcí $g_3(B)$ a $g_4(B)$ jsou nakresleny na obr. 3. Z těchto křivek nakreslíme popsaným způsobem graf funkce $F_2(B)$ na obr. 4.



Obr. 4. Grafy funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ sestrojené pomocí funkcí $g_1(B)$ a $g_2(B)$ z obr. 2 a funkcí $g_3(B)$ a $g_4(B)$ z obr. 3.

Grafy funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ se protínají v bodě (obr. 4):

$$B_1 = 0,65 \text{ a } A_1 = -1,53 .$$

Z obrázku je vidět, že v okolí průsečíku platí stále

$$|F_1'(B)| < |F_2'(B)| .$$

Hodnoty odečtené z grafu zpřesníme proto metodou iterací podle vztahů (26ab)

$$A_k = F_1(B_{k-1}) = 1 - \sqrt{2,5 + B_{k-1} + \frac{2,25}{B_{k-1}}}$$

a

$$B_k = F_2^{-1}(A_k) = -1,5 \frac{A_k}{2 - A_k}$$

pro $k = 2, 3, 4, \ldots$

U funkce $F_1(B)$ bereme před odmocninou znaménko minus, neboť z obrázku 4 je vidět, že průsečík leží na spodní části grafu funkce $F_1(B)$. U inversní funkce $F_2^{-1}(A)$ bereme před odmocninou znaménko plus, aby vypočítaná hodnota B_k souhlasila s hodnotou B_1 odečtenou z grafu.

Vypočítané hodnoty posloupnosti jsou:

$$\begin{aligned}
A_2 &= -1,5713 \;; & B_2 &= 0,65997 \;; \\
A_3 &= -1,56301 \;; & B_3 &= 0,658015 \;; \\
A_4 &= -1,56466 \;; & B_4 &= 0,658405 \;; \\
A_5 &= -1,564323 \;; & B_5 &= 0,6583354 .
\end{aligned}$$

Souřadnice průsečíku tudíž jsou $B = 0,6583$ a $A = -1,564$. Hodnoty b_0 a b_1 vypočítáme nyní ze vztahů (43) a (44): $b_0 = 3,4179$ a $b_1 = 3,564$. Kořeny řešené rovnice dostaneme proto ze dvou kvadratických rovnic

$$p^2 - 1,564p + 0,6583 = 0$$

a

$$p^2 + 3,564p + 3,4179 = 0 .$$

5. Závěr

I když popsaná metoda vychází ze stejného předpokladu jako metoda KRYŽANOVSKÉHO [3] anebo metoda SHIH-NGE LINOVA [4], tj. z dělení polynomu $f(p)$ kvadratickým trojčlenem $p^2 + Ap + B$ beze zbytku, stala se pro rovnice třetího a čtvrtého stupně zavedením vhodných funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ na rozdíl od obou zmíněných metod úplně obecnou. Další její výhodou je, že hodnoty funkcí $F_1(B)$ a $F_2(B)$ můžeme určit graficky, takže grafické řešení je velmi rychlé. Výhodou metody iterací při zpřesňování graficky získaných výsledků pak je, že případná chyba ve výpočtu se při dalších početních operacích automaticky opraví.

LITERATURA

[1] *Čuřík F.:* Technický průvodce MATEMATIKA, Česká matice technická, Praha 1944, str. 293—297.

[2] *Láska V., Hruška V.:* Teorie a praxe numerického počítání, Jednota českoslov. matematiků a fysiků, Praha 1934, str. 277—283.

[3] *Крыжановский О. М.:* Об итерационном методе определения приближенных значений корней уравнений, Автоматика и телемеханика 11 (1950), No 5, str. 347—360.

[4] *Shih-Nge Lin:* A Method of Successive Approximations of Evaluating the Real and Complex Roots of Cubic and Higher Order Equations, Journal of Mathematics and Physics 20 (1941), č. 3, str. 231—242.

Резюме

ВКЛАД В ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

ИОСЕФ ЧАЙКА (Josef Čajka)

(Поступило в редакцию 6/V 1957 г.)

В предлагаемой статье речь идет о методе приближенного решения численных алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Основная идея работы состоит в делении алгебраического полинома с вещественными коэффициентами $f(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1p + a_0$ на квадратный трехчлен $p^2 + Ap + B$ без остатка.

Приведены функции $A = F_1(B)$ и $A = F_2(B)$, графическое решение которых дает приближенные значения коэффициентов квадратного трехчлена. Точнее можно эти коэффициенты определить итерационным методом.

Корни решаемого уравнения можно потом легко получить из квадратных уравнений $p^2 + Ap + B = 0$ или из дополнительных соотношений. Применение метода иллюстрировано на нескольких примерах.

Zusammenfassung

BEITRAG ZUR LÖSUNG DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN DRITTEN UND VIERTEN GRADES

JOSEF ČAJKA

(Eingegangen am 6. Mai 1957.)

In der vorliegenden Abhandlung wird eine Methode zur Lösung der numerischen algebraischen Gleichungen dritten und vierten Grades beschrieben. Der Grundgedanke dieser Arbeit beruht auf der Division des Polynoms n-ten Grades $f(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1p + a_0$ durch ein Polynom zweiten Grades $p^2 + Ap + B$ ohne Restbetrag.

Es werden zwei Funktionen $A = F_1(B)$ und $A = F_2(B)$ abgeleitet. Die graphisch ermittelten Koordinaten der Schnittpunkte dieser Funktionen geben die Näherungswerte der Beiwerte A und B. Diese Werte lassen sich durch Iterationsverfahren verbessern.

Die Wurzeln der zu lösenden Gleichung sind dann leicht aus der quadratischen Gleichung $p^2 + Ap + B = 0$ zu berechnen. Die beschriebene Methode wird an einigen Beispielen illustriert.