Václav Doležal; Jaroslav Kurzweil; Zdeněk Vorel

O Diracově funkci v nelineárních diferenciálních rovnicích

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 5, 348–359

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102628`

O DIRACOVĚ FUNKCI V NELINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH

VÁCLAV DOLEŽAL, JAROSLAV KURZWEIL, ZDENĚK VOREL

(Došlo dne 29. listopadu 1957.) DT: 516.93: 621.3.001.2

V článku je uvedena věta o konvergenci posloupnosti řešení nelineárních diferenciálních rovnic v případě, kdy jejich pravé strany konvergují k Diracově funkci, přičemž je udán způsob, jak nalézt limitu posloupnosti řešení. Použití teorie je ilustrováno na typických příkladech z elektrotechniky, atomistiky a aeromechaniky.

Nechť na ohmický odpor $R > 0$ v serii s cívkou se železným jádrem působí impuls napětí $e(t)$, tj. o funkci $e(t)$ víme, že $e(t) \geqq 0$, $e(t) = 0$ pro $t \geqq \Delta > 0$ a pro $t \leqq 0$, kde Δ je dosti malé číslo, a

$$\int_0^\Delta e(t)\, \mathrm{d}t = e^* > 0 .$$

Jestliže magnetický tok Φ závisí na proudu i vztahem

$$\Phi = Li + \alpha \operatorname{arctg} \beta i , \quad L, \alpha, \beta > 0 ,$$

potom pro i platí diferenciální rovnice

$$e(t) = Ri + \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = Ri + \left(L + \frac{\alpha\beta}{1 + \beta^2 i^2}\right) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} ,$$

tj.

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = - \frac{Ri(1 + \beta^2 i^2)}{L + \alpha\beta + L\beta^2 i^2} + \frac{1 + \beta^2 i^2}{L + \alpha\beta + L\beta^2 i^2}\, e(t) , \tag{1}$$

přičemž počáteční podmínkou buď $i(0) = 0$.

Funkce $e(t)$ může mít rozmanitý průběh a vzniká otázka, zda řešení $i(t)$ může být podstatně ovlivněno průběhem funkce $e(t)$. Jinými slovy: Zvolme dvě funkce $e_1(t)$, $e_2(t)$ tak, aby splňovaly uvedené podmínky, při čemž $e_1^* = e_2^*$ Budou potom řešení $i_1(t)$, $i_2(t)$ blízká (a v jakém smyslu máme rozumět slovu blízká)?

Vezměme obecný případ soustavy rovnic

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) + g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, h(t) , \quad i = 1, 2, \ldots, n , \tag{2}$$

kde funkce f_i, g_i jsou spojité (a definované pro všechna $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$). Za funkci $h(t)$ dosazujeme postupně posloupnost spojitých funkcí $h_k(t)$, které splňují tyto předpoklady:

$$h_k(t) \geqq 0\,, \quad \int_{-t_1}^{t} h_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \quad \text{pro} \quad t < 0\,, \quad \int_{-t_1}^{t} h_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 1 \quad \text{pro} \quad t > 0\,,$$

$$t \in (-t_1, t_2),\ t_1 > 0,\ t_2 > 0.$$

Tak vznikne posloupnost soustav diferenciálních rovnic. Nechť $[x_{k1}(t), x_{k2}(t), \ldots, x_{kn}(t)]$ je řešení soustavy (2), kam jsme za $h(t)$ dosadili $h_k(t)$, splňující počáteční podmínku

$$x_{ki}(-t_1) = \bar{x}_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Naším cílem je dát odpověď na následující otázky:

1) Existují limity

$$\lim_{k\to\infty} x_{ki}(t) = x_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

nezávisle na průběhu funkcí $h_k(t)$?

2) Jakým způsobem můžeme přímo vypočítat limitní funkce $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ aniž bychom vyšetřovali celou posloupnost diferenciálních rovnic?

Předpokládejme na okamžik, že odpověď na otázku 1) je kladná. Abychom ukázali, jaké budou limitní funkce $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, zvolme posloupnost funkcí $h_k(t)$ takto:

$$h_k(t) = k \text{ pro } |t| \leqq \frac{1}{2k}$$

$$= 0 \text{ pro } |t| > \frac{1}{2k}\,,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Nechť funkce $u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou definované na intervalu $\langle -t_1, 0\rangle$ a splňují soustavu diferenciálních rovnic

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n, t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

a počáteční podmínky $u_i(-t_1) = \bar{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pro každé $\varepsilon > 0$ je $h_k(t) = 0$, jestliže $-t_1 \leqq t \leqq -\varepsilon$, $\frac{1}{2k} < \varepsilon$, a proto je $x_{ik}(t) = u_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jestliže $-t_1 \leqq t \leqq -\varepsilon$, $\frac{1}{2k} < \varepsilon$, a tedy platí

$$\lim_{k\to\infty} x_{ik}(t) = u_i(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

pro každé t, $-t_1 \leqq t < 0$.

Na intervalu $-\frac{1}{2k} \leqq t \leqq \frac{1}{2k}$ platí soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) + kg_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Proveďme substituci $\tau = kt$. Dostaneme

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{1}{k} f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\tau}{k}\right) + g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; -\tfrac{1}{2} \leqq \tau \leqq \tfrac{1}{2}\,. \tag{5}$$

Protože $k \to \infty$, nedopustíme se snad velké chyby, nahradíme-li rovnice (5) rovnicemi

$$\frac{dx_i}{d\tau} = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad -\tfrac{1}{2} \leqq \tau \leqq \tfrac{1}{2}\,. \tag{6}$$

Nechť $v_1(\tau), \ldots, v_n(\tau)$ pro $-\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$ je řešení autonomní soustavy (6) s počátečními podmínkami $v_i(-\frac{1}{2}) = u_i(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Protože $x_{ik}\left(-\frac{1}{2k}\right)$ je blízké k $u_i(0)$, $x_{ik}\left(\frac{\tau}{k}\right)$ bude blízké k $v_i(\tau)$ pro $-\frac{1}{2} \leqq \tau \leqq \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \ldots n$ a zejména bude $x_{ik}\left(\frac{1}{2k}\right)$ blízké k $v_i(\frac{1}{2})$, neboť řešení soustavy (6) závisí spojitě na pravé straně.

Konečně nechť $w_1(t), w_2(t), \ldots, w_n(t)$ pro $t \geqq 0$ je řešení soustavy (4) při počáteční podmínce

$$w_i(0) = v_i(\tfrac{1}{2})\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Protože $h_k(t) = 0$ pro $t > \frac{1}{2k}$, je pro $t > \frac{1}{2k}$ systém $x_{1k}(t), x_{2k}(t), \ldots, x_{nk}(t)$ řešením soustavy rovnic (4), a protože $x_{ik}\left(\frac{1}{2k}\right) \to w_i(0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, platí $x_{ik}(t) \to w_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ pro každé $t > 0$.

Tedy $x_{ik}(t) \to u_i(t) = x_i(t)$ pro $t < 0$

$$x_{ik}(t) \to w_i(t) = x_i(t) \quad \text{pro} \quad t > 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

To znamená, že limitní funkce $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ jsou pro $t \neq 0$ řešením soustavy (4), pro $t = 0$ pak dochází ke skokům velikostí $v_i(\frac{1}{2}) - v_i(-\frac{1}{2})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dá se skutečně dokázat, že naše intuitivní úvahy jsou oprávněné a že funkce $x_{1k}(t), x_{2k}(t), \ldots, x_{nk}(t)$ pro $t \neq 0$ a $k \to \infty$ se blíží k námi nalezeným limitním funkcím $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ nezávisle na průběhu funkcí $h_k(t)$[1]). Při tom stačí

[1]) Konvergence přirozeně není stejnoměrná; lze však dokázat, že pro všechna i, k platí $|x_{ik}(t)| < N$, $-t_1 \leqq t \leqq t_2$.

předpokládat, že funkce $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ a $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jsou spojité, že řešení soustav (4) a (6) jsou jednoznačně určena počátečními podmínkami a konečně že řešení $[u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)]$ soustavy (4) existují na intervalu $\langle -t_1, 0\rangle$, řešení $[v_1(\tau), v_2(\tau), \ldots, v_n(\tau)]$ soustavy (6) existují na intervalu $\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ a řešení $[w_1(t), w_2(t), \ldots, w_n(t)]$ soustavy (4) existují na intervalu $\langle 0, t_2\rangle$. Přitom „existencí" rozumíme, že uvedená řešení na daných intervalech neutekou do „nekonečna".

Poznámka 1. V případě, že soustava (2) má speciální tvar

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\, x_j + g_i h(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2'}$$

(g_i jsou konstanty), lze důkaz provésti elementárně. V obecném případě je důkaz proveden v práci [1].

Tentýž výsledek pro soustavu (2') lze odvodit pomocí teorie distribucí L. Schwarze. Touto metodou lze vyšetřiti i obecnější případ, kdy funkce $h(t)$ se blíží k derivaci (libovolného řádu) Diracovy funkce; je ovšem nutno předpokládat, že funkce $f_{ij}(t)$ mají spojité derivace dostatečně vysokého řádu. O distribucích lze najít nejpřístupnější poučení v brožuře [2].

Vraťme se nyní k rovnici (1). Abychom mohli použít dosažených výsledků, položíme v soustavě (2) $n = 1$,

$$x_1 = i, \qquad f_1(x_1, t) = -\frac{Ri(1 + \beta^2 i^2)}{L + \alpha\beta + L\beta^2 i^2}\,,$$

$$g_1(x_1) = \frac{1 + \beta^2 i^2}{L + \alpha\beta + L\beta^2 i^2}\, e^*\,.$$

Dosazujme nyní za $e(t)$ libovolnou posloupnost spojitých funkcí $h_k(t)$ tak, že $h_k(t) = 0$ pro $t \leqq 0$ a pro $t \geqq \Delta_k > 0$,

$$\Delta_k \to 0\,, \quad \int_0^{\Delta_k} h_k(t)\,\mathrm{d}t = 1\,,$$

a označme $i_k(t)$ to řešení této posloupnosti diferenciálních rovnic, pro které $i_k(-1) = 0$.

Řešení rovnic

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{-Ri(1 + \beta^2 i^2)}{L + \alpha\beta + L\beta^2 i^2}\,, \tag{7}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1 + \beta^2 i^2}{L + \alpha\beta + L\beta^2 i^2}\, e^*\,, \tag{7'}$$

jsou jednoznačně určena počáteční podmínkou. Hledejme limitu posloupnosti řešení $i_k(t)$. Podle výsledku, k němuž jsme dospěli, tato limita $\bar{i}(t)$ na intervalu $\langle -1, 0\rangle$ splňuje diferenciální rovnici (7) a počáteční podmínku $\bar{i}(-1) = 0$.

Lehko zjistíme, že řešením rovnice (7) na $\langle -1, 0\rangle$ při počáteční podmínce $\tilde{\imath}_1(-1) = 0$ je $\tilde{\imath}_1(t) \equiv 0$. V čase $t = 0$ dojde ke skoku $v(\frac{1}{2}) - v(-\frac{1}{2})$, kde funkce $v(\tau)$ splňuje rovnici

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1 + \beta^2 v^2}{L + \alpha\beta + L\beta^2 v^2} e^* \tag{8}$$

s počáteční podmínkou $v(-\frac{1}{2}) = \tilde{\imath}_1(0) = 0$.

Obecné řešení rovnice (8) má tvar

$$Lv + \alpha \operatorname{arctg} \beta v = e^* \tau + c\,.$$

Z podmínky $v(-\frac{1}{2}) = 0$ plyne $c = \frac{1}{2}e^*$. Označíme-li pro stručnost $\varrho = v(\frac{1}{2})$, je ϱ jediným řešením rovnice

$$L\varrho + \alpha \operatorname{arctg} \beta\varrho = e^*\,.$$

Konečně pro $t \geqq 0$, $\tilde{\imath}_2(t) = w(t)$ je opět řešením rovnice (7), určeným počáteční podmínkou $w(0) = \varrho$.

Snadno nahlédneme, že obecné řešení rovnice (7) je

$$w^{L+\alpha\beta}(1 + \beta^2 w^2)^{-\frac{\alpha\beta}{2}} = Ke^{-Rt}\,.$$

Odtud plyne dosazením za $t = 0$, $w = \varrho$, že

$$K = \varrho^{L+\alpha\beta}(1 + \beta^2\varrho^2)^{-\frac{\alpha\beta}{2}}\,,$$

takže na $\langle 0, T\rangle$ bude $\tilde{\imath}_2(t)$ řešením rovnice

$$\tilde{\imath}_2^{L+\alpha\beta}(1 + \beta\tilde{\imath}_2^2)^{-\frac{\alpha\beta}{2}} = \varrho^{L+\alpha\beta}(1 + \beta^2\varrho^2)^{-\frac{\alpha\beta}{2}} \,.\, e^{-Rt}\,.$$

Pro úvahy, které hodláme provést na konci článku, definujme na celém intervalu $\langle -1, T\rangle$, $T > 0$ funkci $\tilde{\imath}(t)$ takto:

$$\begin{aligned} \tilde{\imath}(t) &= \tilde{\imath}_1(t) \quad \text{na} \quad \langle -1, 0\rangle\,, \\ &= \tilde{\imath}_2(t) \quad \text{na} \quad (0, T\rangle\,. \end{aligned}$$

Ukážeme použití vyloženého výsledku o limitním chování řešení diferenciálních rovnic ještě na dvou příkladech.

Příklad 1. V jaderné fysice se odvozuje, že pro vektor jaderné magnetisace látky platí tzv. Blochovy rovnice. Jsou-li X, Y, Z složky vektoru jaderné magnetisace látky, H_x, H_y, H_z složky intensity vnějšího magnetického pole, platí

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \gamma(YH_z - ZH_y) - \frac{X}{T_2}\,, \\ \dot{Y} &= \gamma(ZH_x - XH_z) - \frac{Y}{T_2}\,, \\ \dot{Z} &= \gamma(XH_y - YH_x) - \frac{1}{T_1}(Z - z_0)\,, \end{aligned} \tag{9}$$

kde $z_0 = \chi_0 H_z(0)$, χ_0 je susceptibilita (konstanta), γ je gyromagnetický poměr, T_1 longitudinální relaxační doba, T_2 transversální relaxační doba [3].

Hledáme řešení soustavy (9) pro případ, kdy $H_x(t)$ konverguje k Diracově funkci, při čemž $\int_{-1}^{1} H_x(t)\,\mathrm{d}t = h^*$, $H_y = 0$, $H_z = H_0 = $ konst., při počátečních podmínkách $X(0) = x_0$, $Y(0) = y_0$, $Z(0) = z_0$. Pišme soustavu (9) ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\frac{X}{T_2} + \gamma H_0 Y \\ \dot{Y} &= -\gamma H_0 X - \frac{Y}{T_2} + \gamma Z h^* h(t)\,, \\ \dot{Z} &= -\frac{1}{T_1} Z + \frac{1}{T_1} z_0 - \gamma Y h^* h(t)\,, \end{aligned} \tag{9'}$$

kde $h(t)$ má stejný význam jako v rovnici (2). Všimněme si, že rovnice (9') jsou sice lineární, ale příslušné limitní funkce nemůžeme stanovit na základě distribucí L. Schwarze, protože faktor u funkce $h(t)$ není konstantní (viz Pozn. 1).

Protože počáteční podmínky jsou dány v čase $t = 0$ a nezajímá nás tedy řešení soustavy (9') pro $t < 0$ můžeme se ihned zabývat rovnicemi (6), které v našem případě mají tvar

$$\frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}\tau} = 0\,, \quad \frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}\tau} = h^*\gamma Z_1\,, \quad \frac{\mathrm{d}Z_1}{\mathrm{d}\tau} = -h^*\gamma Y_1$$

pro $\tau \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ s počátečními podmínkami

$$X_1(-\tfrac{1}{2}) = x_0\,, \quad Y_1(-\tfrac{1}{2}) = y_0\,, \quad Z_1(-\tfrac{1}{2}) = z_0\,.$$

Odtud plyne $X_1(\frac{1}{2}) = x_0$,

$$\begin{aligned} Y_1(\tfrac{1}{2}) &= z_0 \sin \gamma h^* + y_0 \cos \gamma h^* = y_1\,, \\ Z_1(\tfrac{1}{2}) &= z_0 \cos \gamma h^* - y_0 \sin \gamma h^* = z_1\,. \end{aligned}$$

Pro $t \geqq 0$ platí rovnice (4), které zde napíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= -\frac{X_2}{T_2} + \gamma H_0 Y_2 \\ \dot{Y}_2 &= -\gamma H_0 X_2 - \frac{Y_2}{T_2} \\ \dot{Z}_2 &= -\frac{Z_2}{T_1} + \frac{z_0}{T_1} \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $X_2(0) = x_0$, $Y_2(0) = y_1$, $Z_2(0) = z_1$.

Řešením dostaneme pro $t \geqq 0$

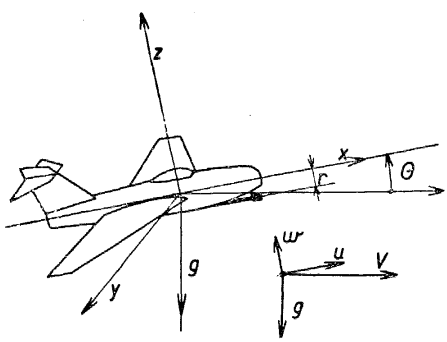
$$\begin{aligned} X_2(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{t}{T_2}} \{x_0 \cos \gamma H_0 t + y_1 \sin \gamma H_0 t\}\,, \\ Y_2(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{t}{T_2}} \{y_1 \cos \gamma H_0 t - x_0 \sin \gamma H_0 t\} \\ Z_2(t) &= z_0 + (z_1 - z_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Bude-li tedy trvání impulsu $H_x(t)$ dostatečně krátké, bude příslušný časový průběh složek vektoru jaderné magnetisace látky s libovolnou přesností dán vztahy (10).

Příklad 2. Uvažujme letadlo, letící vodorovným směrem konstantní rychlostí V, na kterém je ve směru letu namontováno dělo. Naším úkolem je zjistit vliv výstřelu na pohyb letadla, je-li nám známa hmota m_0 a rychlost v_0 střely po opuštění hlavně (nepřihlížíme k vnitrobalistickým vlivům).

V teorii dynamiky letadel se odvozuje, že pro pohyb letadla platí následující rovnice:

$$\begin{aligned} \dot{u} - uX_u - wX_w + g\Theta + F &= 0\,, \\ \dot{w} - uZ_u - wZ_w - V\dot{\Theta} &= 0\,, \\ -\, wM_w + k\ddot{\Theta} - M_q\dot{\Theta} + Fr &= 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$



Obr. 1.

kde u, w jsou přírůstky rychlosti ve směru os x resp. z (viz obr. 1), Θ je úhel, sevřený osou letadla s vodorovným směrem, $F(t)$ je časový průběh reakce děla redukovaný na jednotku hmoty letadla, r je vzdálenost osy děla od těžiště letadla, $X_u < 0$, $X_w > 0$ jsou redukované konstanty úměrnosti přírůstků sil ve směru osy x, vyvolaných rychlostmi v, w; Z_u, Z_w jsou podobné konstanty (pro síly ve směru osy z), M_w, M_q jsou redukované konstanty úměrnosti přírůstků momentů, k je gyrační poloměr a konečně g je zemské zrychlení. (Srv. [4].)

V našem případě bude $h^* = \dfrac{m_0 v_0}{\overline{m}}$, kde $\overline{m}$ je hmota letadla.

Abychom soustavu (11) uvedli na tvar (2), položme $\varphi = \dot{\Theta}$, takže pak bude

$$\begin{aligned} \dot{u} &= uX_u + wX_w - g\Theta - h^*h(t) \\ \dot{w} &= uZ_u + wZ_w + V\varphi \\ \dot{\varphi} &= w\frac{M_w}{k} + \varphi\frac{M_q}{k} - \frac{h^*r}{k}h(t) \\ \dot{\Theta} &= \varphi\,. \end{aligned}$$

Nechť před výstřelem je $u = w = \Theta = \dot{\Theta} = 0$. Stačí tedy zabývat se ihned rovnicemi (6).

Pro $\tau \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$ platí

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} = -h^*, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\tau} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{r}{k}h^*, \quad \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau} = 0,$$

$$u(-\tfrac{1}{2}) = w(-\tfrac{1}{2}) = \varphi(-\tfrac{1}{2}) = \Theta(-\tfrac{1}{2}) = 0.$$

Odtud plyne, že $u(\frac{1}{2}) = -h^*$, $w(\frac{1}{2}) = 0$, $\varphi(\frac{1}{2}) = -\frac{r}{k}h^*$, $\Theta(\frac{1}{2}) = 0$.

Pro $t \geq 0$ pak platí soustava:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= uX_u + wX_w - g\Theta, \\ \dot{w} &= uZ_u + wZ_w + V\varphi, \\ \dot{\varphi} &= w\frac{M_w}{k} + \varphi\frac{M_q}{k}, \\ \dot{\Theta} &= \varphi \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $u(0) = -h^*$, $w(0) = 0$,

$$\varphi(0) = -\frac{r}{k}h^*, \quad \Theta(0) = 0.$$

Řešení tohoto systému určíme již snadno známými metodami.

Závěrem ještě několik poznámek. V učebnicích diferenciálních rovnic se obvykle předpokládá, že pravá strana diferenciální rovnice je spojitá funkce svých argumentů. Tento rámec je však příliš úzký a my jsme jej překročili při úvahách o soustavě (2) (funkce $h_k(t)$ nejsou spojité). Důležité však je, že vyšetřovaným vztahům můžeme hlouběji porozumět, opustíme-li hledisko diferenciálních rovnic se spojitou pravou stranou.

Všimněme si za tím účelem rovnice (1), kde provedeme substituci $i = \Psi(\Phi)$, kde $\Psi(\Phi)$ je inversní funkcí k funkci $\Phi = Li + \alpha \operatorname{arctg} \beta i$, tedy

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_k}{\mathrm{d}t} = e_k(t) - R\Psi(\Phi_k). \tag{12}$$

Položme $E_k(t) = \int_0^t e_k(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Každé řešení diferenciální rovnice (12) je současně řešením rovnice

$$\Phi_k(t) - \Phi_k(0) = E_k(t) - E_k(0) - R\int_0^t \Psi(\Phi_k)\,\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

a naopak.

Definujme funkci $\tilde{E}(t)$ předpisem $\tilde{E}(t) = e^*$ pro $t > 0$, $\tilde{E}(t) = 0$ pro $t \leq 0$. Ukážeme, že potom platí též rovnice

$$\tilde{\Phi}(t) - \tilde{\Phi}(0) = \tilde{E}(t) - \tilde{E}(0) - R\int_0^t \Psi[\tilde{\Phi}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{14}$$

pro $t \in (-1, T)$, kde $\tilde{\Phi}(t) = \lim_{k\to\infty} \Phi_k(t)$.

Ukážeme nejprve, že tato limita existuje. Vskutku, platí

$$\Phi_k(t) = Li_k(t) + \alpha \operatorname{arctg} \beta i_k(t). \tag{15}$$

Poněvadž platí $i_k(t) \to \tilde{i}(t)$ a poněvadž pravá strana (15) spojitě závisí na $i_k(t)$, platí

$$\Phi_k(t) \to \tilde{\Phi}(t) = L\tilde{i}(t) + \alpha \operatorname{arctg} \beta\tilde{i}(t)\,.$$

Protože $\tilde{i}(0) = 0$ a $\tilde{i}(t)$ je řešení rovnice (7) splňující podmínku $\lim\limits_{t\to 0+} \tilde{i}(t) = \varrho$, platí $\tilde{\Phi}(0) = 0$ a pro $t > 0$ funkce $\tilde{\Phi}(t)$ splňuje rovnici

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\Phi}}{\mathrm{d}t} = -R\Psi(\tilde{\Phi})\,, \quad \lim_{t\to 0+} \tilde{\Phi}(t) = e^*\,.$$

Integrací poslední rovnice v mezích t_1, t plyne

$$\tilde{\Phi}(t) = \tilde{\Phi}(t_1) - R\int_{t_1}^{t} \Psi[\tilde{\Phi}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Přechodem k limitě obdržíme

$$\tilde{\Phi}(t) = \lim_{t_1\to 0+} \tilde{\Phi}(t_1) - R\int_{0}^{t} \Psi[\tilde{\Phi}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,,$$

což je rovnice (14).

To znamená: $E_k(t)$ konverguje k $\tilde{E}(t)$ a řešení $\Phi_k(t)$ rovnice (13) konverguje k řešení $\Phi(t)$ rovnice (14). Náš výsledek neříká tedy nic jiného, než že řešení rovnic (13), (14) závisí spojitě na pravé straně.

Vraťme se nyní k rovnici (1), aniž provádíme nějakou substituci. Při zavedených označeních a za předpokladu spojitosti funkce $e(t)$ diferenciální rovnice (1) je ekvivalentní s rovnicí

$$i(t) - i(0) = \int_0^t G(i)\,\mathrm{d}E(\tau) - R\int_0^t iG(i)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{16}$$

$$G(i) = \frac{1 + \beta^2 i^2}{L + \alpha\beta + L\beta^2 i^2}\,,$$

kde integrál $\int_0^t G[i(\tau)]\,\mathrm{d}E(\tau)$ můžeme bráti ve smyslu Riemann-Stieltjesa[2]). Chceme-li do vztahu (16) dosadit $i(t) = \tilde{i}(t)$, $E(t) = \tilde{E}(t)$, snadno zjistíme, že Riemann-Stieltjesův integrál $\int_0^t G[\tilde{i}(\tau)]\,\mathrm{d}\tilde{E}(\tau)$ nemusí existovat[3]). Tuto obtíž

---

[2]) Tj. $\int_0^t G(i)\,\mathrm{d}E(\tau) = \lim\limits_{s\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{s} G(i(\alpha_j))\,[E(\tau_j) - E(\tau_{j-1})]$, kde bereme stále jemnější a jemnější rozdělení intervalu $\langle 0, t\rangle$.

[3]) Položíme-li např. $L = 0$, $\alpha = \beta = 1$, přesvědčíme se snadno, že částečné součty $(1 + \tilde{i}^2(\tau_1))(E(\tau_1) - E(0)) + \ldots$ a $(1 + \tilde{i}^2(0))(E(\tau_1) - E(0)) + \ldots$, (vytečkované členy volíme v obou případech stejným způsobem) se liší o $(\tilde{i}^2(\tau_1) - \tilde{i}^2(0))\,.\,(\tilde{E}(\tau_1) - \tilde{E}(0))$, což při $\tau_1 \to 0$ konverguje k hodnotě $\varrho^2 e^* \neq 0$.

odstraníme užitím vhodnější definice integrálu, než je definice Riemann-Stieltjesova, a potom rovnice (16) je splněna i tehdy, dosadíme-li $i(t) = \tilde{i}(t)$.

Abychom zjistili, že limita $\tilde{i}(t)$ řešení $i_k(t)$ rovnice (1) je řešením rovnice (16), museli jsme zavést funkci $E(t) = \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

Ukazuje se účelné vyšetřovat rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x, t)$$

se spojitou pravou stranou v souvislosti s funkcí $F(x, t) = \int_0^t f(x, \tau)\,\mathrm{d}\tau$. Právě funkce $F(x, t)$ umožňuje vyslovit a dokázat obecné věty o tom, kdy řešení dvou různých rovnic jsou blízká (spojitá závislost na parametru) a zavést vhodná zobecnění diferenciálních rovnic (speciální případy jsou rovnice (15), (16)) taková, že i nespojitá limita posloupnosti řešení diferenciálních rovnic v obvyklém slova smyslu jest řešením zobecněné rovnice.

Přirozeně tyto závěrečné poznámky platí i pro soustavy diferenciálních rovnic.

Na konec vyslovujeme tímto svůj dík magistrovi Stan. Šafratovi a Ing. Zd. Křesadlovi, kteří nám byli nápomocni při výběru příkladů.

SEZNAM LITERATURY

[1] *Kurzweil J.:* Generalized Differential Equations, Czechoslovak Math. Journal 8 (1958).

[2] *Галперин И.:* Введение в теорию обобщенных функций, Изд. иностр. лит., Москва, 1954.

[3] *Andrew E. R.:* Nuclear Magnetic Resonance, Cambridge of Univ. Press, 1955.

[4] *Milne-Thomson L. M.:* Theoretical Aerodynamics, Mc Millan, London, 1948.

Резюме

О ФУНКЦИИ ДИРАКА В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

ВАЦЛАВ ДОЛЕЖАЛ, ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛ, ЗДЕНЕК ВОРЕЛ
(Václav Doležal, Jaroslav Kurzweil, Zdeněk Vorel)

(Поступило в редакцию 29/XI 1957 г.)

В статье рассматривается поведение систем, описанных нелинейными дифференциальными уравнениями (2), которые находятся под действием достаточно короткого импульса.

О функциях $h_k(t)$ предполагается, что они определены, непрерывны и неотрицательны на отрезке $\langle -t_1, t_2 \rangle$, $\int\limits_{-t_1}^{t} h_k(\tau)\,d\tau \to 0$ для $t < 0$, $\int\limits_{-t_1}^{t} h_k(\tau)\,d\tau \to 1$ для $t > 0$. О функциях $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ предполагается, что они являются непрерывными функциями своих аргументов и что решения уравнений (2) однозначно определены начальным условием.

Показывается, что решения $x_{ik}(t)$ уравнений (2) стремятся для $t \neq 0$ к предельным функциям $x_i(t)$, которые не зависят от выбора последовательности $h_k(t)$. Для $t < 0$ функции $x_i(t)$ являются решениями уравнений (4), для $t = 0$ функции $x_i(t)$ имеют скачок, равный $v_i(\frac{1}{2}) - v_i(-\frac{1}{2})$, где $v_i(t)$ являются решением системы (6) при начальном условии $v_i(-\frac{1}{2}) = \lim\limits_{t \to 0-} x_i(t)$. Для $t > 0$ функции $x_i(t)$ являются опять решением уравнений (4), для которого справедливо равенство $\lim\limits_{t \to 0+} x_i(t) = v_i(\frac{1}{2})$.

Применение изложенных результатов пояснено на примере цепи, состоящей из омического сопротивления и дросселя со стальным сердечником, на вход которой действует импульс напряжения.

В качестве дальнейшего примера решены уравнения Блоха для спина в случае, когда один компонент внешнего магнетического поля является импульсом.

В качестве третьего примера рассматривается движение самолета, равномерное движение которого нарушается реакцией выстрела из пушки.

В заключение показан путь, по которому возможно строго математически доказать результаты, изложенные в этой статье только наглядно.

Summary

THE DIRAC FUNCTION IN NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

VÁCLAV DOLEŽAL, JAROSLAV KURZWEIL, ZDENĚK VOREL

(Received 29 November 1957.)

The paper treats the behaviour of a dynamical system described by the non-linear differential equations (2) to which a short disturbing term is applied.

The functions $h_k(t)$ are assumed non-negative continuous on $\langle -t_1, t_2 \rangle$, and with

$$\int\limits_{-t_1}^{t} h_k(\tau)\,d\tau \to 0 \quad \text{for} \quad t < 0\,, \quad \int\limits_{-t_1}^{t} h_k(\tau)\,d\tau \to 1 \quad \text{for} \quad t > 0\,,$$

$t \in (-t_1, t_2)$ and every k. The $f_i(x_1, \ldots, x_n, t)$, $g_i(x_1, \ldots, x_n)$ are continuous; finally it is assumed that the solutions of (2) are uniquely determined by suitable initial conditions.

It is shown that the solutions $x_{ik}(t)$ of (2) tend with $k \to \infty$ (for $t \neq 0$) to limit-functions $x_i(t)$ independent of the form of the functions $h_k(t)$. For $t < 0$ the functions $x_i(t)$ are solutions of (4); for $t = 0$ they have a discontinuity equal to $v_i(\frac{1}{2}) - v_i(-\frac{1}{2})$, where $v_i(t)$ is the solution of (6) with initial conditions $v_i(-\frac{1}{2}) = \lim_{t \to 0-} x_i(t)$; for $t > 0$ the $x_i(t)$ are solutions of (4) such that $\lim_{t \to 0+} x_i(t) = v_i(\frac{1}{2})$.

The application of these results is illustrated, first, by a series circuit consisting of an ohmic resistance and an iron core coil to which a pulse of voltage is applied. In the second example Bloch's equations for spin are solved when one component of the external magnetic field has the form of pulse. The third example considers the motion of an airplane whose flight is disturbed by a cannon shot recoil.

The paper concludes with a sketch of the manner in which these intuitively presented results may be proved strictly.