

Aplikace matematiky

Augustin Dítl

Amplituda a frekvence modulované nosné vlny

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 4, 275–288

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102623>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

AMPLITUDA A FREKVENCE MODULOVANÉ NOSNÉ VLNY

AUGUSTIN DITL

(Došlo dne 10. října 1957.)

DT: 621.396.619.11

Práce se zabývá otázkou definice amplitudy a frekvence modulované nosné vlny. Ukazuje na nedostatky běžné definice van der Polovy a navrhuje novou jednoznačnou definici, která dovoluje udat jednoduše skreslení signálu v soustavě s modulovanou nosnou vlnou, vliv rušivých signálů a pod.

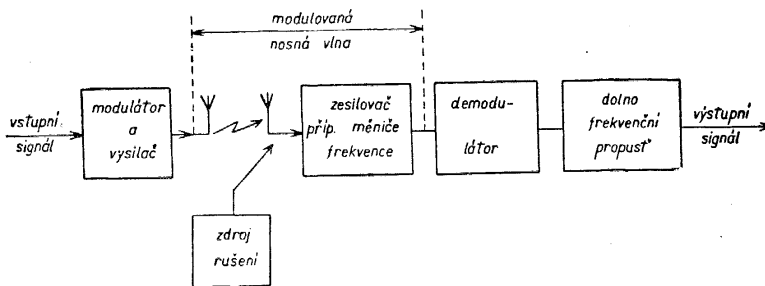
Označení

| | |
|--|---|
| $K(t)$ | impulsová odezva soustavy (lineárního zesilovače) |
| $K(t - x)^{(1)}$ | derivace funkce $K(t)$ podle proměnné; po derivaci je dosazeno za proměnnou $(t - x)$ |
| $S_s(\omega)$ | frekvenční přenosová charakteristika, t. j. Fourierova transformace časové závislosti $K(t)$ |
| $S_1(\omega) S_2(\omega)$ | spektrální hustota časových průběhů $f_1(t), f_2(t), \dots$ |
| ω, ω_0 | úhlové frekvence (obvykle jen „frekvence“) |
| $f_1(t) f_2(t)$ | libovolné časové průběhy |
| $f(t)$ | časový průběh signálu s nízkofrekvenčním (video-frekvenčním) pásmem |
| $F(t)$ | reálný časový průběh modulované nosné vlny (omezený na pásmo úzké kolem vysoké nosné frekvence ω_0) |
| $S_F(\omega) = \varrho(\omega) \exp [j\psi(\omega)]$ | spektrální hustota funkce $F(t)$ |
| $T(t)$ | komplexní časový průběh (podle rov. (6) a (7)) |
| $\text{Re } T, \text{Im } T, T $ | reálná část, imaginární část, modul T |
| $\varphi(t)$ | fázový úhel komplexního časového průběhu T |
| $\varphi(t)^{(1)}, R(t)^{(1)}, T(t)^{(1)}$ | derivace funkcí podle času |
| $Q(t), Q_1(t), Q_2(t)$ | „amplituda“ = modul časové funkce T |
| $\sigma(t), \sigma_1(t), \sigma_2(t)$ | (úhlová) frekvence závislá na čase (def. v rov. (5)) |
| μ | hloubka modulace při amplitudové modulaci |
| $\Delta\omega$ | frekvenční zdvih u frekvenční modulace |

- $R(t) = r(t) \exp(j\omega_0 t)$ komplexní časová funkce příslušná podle rov. (6) a (7) k rušivé nosné vlně s úzkým pásmem kolem ω_0
- $r(t)$ komplexní časová funkce s pásmem nízkofrekvenčním (videofrekvenčním)
- A konstanta
- $\overline{f(t)^2} = \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (f(t))^2 dt$ časová střední hodnota funkce $(f(t))^2$ (signál trvá od τ_1 do τ_2)

1. Úvod

Pro elektrický přenos zpráv se užívá kromě lineárních soustav (tj. kabelů, lineárních zesilovačů atd.) hojně též soustav s modulovanou nosnou vlnou (pro přenos od anteny k anteně ve volném prostoru — pro přenos vysoko-



Obr. 1.

frekvenčním kabelem a v nejnovější době i pro přenos vlnovodem). Za modulovanou nosnou vlnu budeme pokládat napětí nebo proud omezené frekvenčně na pásmo úzké proti střední hodnotě frekvence. Každý přijímač je opatřen na vstupu selektivními okruhy, které ze směsi složek různých frekvencí vstupujících do anteny vybírají úzké pásmo tj. právě takovou modulovanou nosnou vlnu. Selektivní okruhy skreslí zároveň lineárně žádanou nosnou vlnu; kromě toho se však k modulované nosné vlně, kterou žádáme přimíchávají jiná nežádoucí napětí a proudy pocházející od rušících stanic i od šumících zdrojů, které se selektivními okruhy omezí na úzké frekvenční pásmo, tj. na rušivou nosnou vlnu. Pro návrh takových soustav s modulovanou nosnou vlnou s jakostním přenosem signálu je třeba znát postup, podle kterého je možno početně zvládnout jednak skreslení původní zprávy způsobené průchodem nosné vlny selektivními okruhy, jednak vliv rušivých nosných vln na výstupní signál.

Schema soustavy s modulovanou nosnou vlnou kresleme podle obr. 1. Po-
kládáme za vstupní signál:

u telegrafních soustav: sled videofrekvenčních impulsů podle kodu přísluš-
ného té či oné soustavě;

u jednokanálové telefonie: mikrofonní napětí;

u vícekanálové impulsově modulované soustavy: sled videofrekvenčních
impulsů synchronizačních i kanálových;

u vícekanálové telefonní soustavy s frekvenčním tříděním: směs napětí,
ve kterém určitému frekvenčnímu pásmu odpovídá určitý telefonní kanál;

u soustavy pro přenos televizního obrazového signálu: videofrekvenční
obrazový signál s potřebnými synchronizačními impulsy, případně se zvuko-
vým signálem namodulovaným na pomocnou nosnou vlnu atd.

Podobné, jednodušší problémy nastávají i u přenosu zpráv lineárními sou-
stavami. Prochází-li signál lineární soustavou skreslí se lineárně. Je-li spektrální
hustota vstupního signálu $S_1(\omega)$, frekvenční přenosová charakteristika $S_s(\omega)$
a spektrální hustota výstupního signálu $S_2(\omega)$, platí vztah

$$S_2(\omega) = S_s(\omega) \cdot S_1(\omega) . \quad (1)$$

Přechod od časových průběhů ke spektrům nebývá vždy žádoucí. Spíše
potřebujeme vztah mezi vstupním signálem $f_1(t)$, výstupním signálem $f_2(t)$
a mezi nějakou vlastností lineární soustavy. Dostáváme formálně jednoduchý
vztah, když za charakteristickou vlastnost lineární soustavy zvolíme impulso-
vou odezvu soustavy $K(t)$ (tj. Fourierovu transformaci frekvenční charak-
teristiky). Pak lze psát shora uvedený vztah ve tvaru konvoluce

$$f_2(t) = \int_0^{\infty} K(x) \cdot f_1(t - x) \cdot dx . \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) jsou obsahově totožné. Vztah (2) je formálně velmi jednoduchý
a dává přesný obraz o skreslení signálu v lineární soustavě, tj. je-li průběh
vstupního signálu dosti přesně úměrný funkci $f_1(t)$ a impulsová charakteristika
dosti přesně úměrná funkci $K(t)$, pak $f_2(t)$ podle rov. (2) popisuje dosti přesně
výstupní signál. Slovy „dosti přesně“ vyjadřujeme skutečnost, že jmenované
funkce jsou úměrné příslušným napětím nebo proudům sice jen s přesností
danou dokonalostí měrných prostředků nebo potřebnou přesností, zvýšíme-li
však přesnost měření platí vztahy (1) a (2) stále pokud soustavu můžeme po-
kládat za lineární.

Účelem této práce je podat formálně jednoduché a přesné řešení problému,
jak vypočítat skreslení signálu v soustavě s modulovanou nosnou vlnou a jak
vypočítat vliv rušivých nosných vln na přenášený signál a jak udat přesnost,
se kterou platí tato řešení.

Modulovanou nosnou vlnu lze rozložit ve spektrum; každá frekvenční složka
spektra se zesílí a zpozdí lineární soustavou jinak; na výstupu soustavy dosta-

neme tedy jinou nosnou vlnu (i jinak modulovanou, např. amplitudově modulovaná nosná vlna se změní na vlnu modulovanou amplitudově i frekvenčně apod.). Časový průběh této skreslené nosné vlny můžeme vypočítat podle vztahů (1) a (2). Zbývá tedy najít početní prostředky, kterými by bylo možno stanovit „amplitudu“ a „frekvenci“ nosné vlny dosti přesně vztahem, který je podobný vztahům (1) a (2). Dále je nutno stanovit „amplitudu“ a „frekvenci“ nosné vlny tvořené součtem žádané nosné vlny a rušivé nosné vlny. Takto definované veličiny musí být dosti přesně realizovatelné amplitudovým a frekvenčním demodulátorem.

2. Amplituda a frekvence modulované nosné vlny

Čemu se obvykle říká „amplituda“ a „frekvence“ modulované nosné vlny? Modulovaná nosná vlna prochází nulou v okamžicích, sledujících po sobě přibližně v časových intervalech rovných půlperiodě (π/ω_0). Mezi průchody nulou dosahuje maximálních hodnot (amplitud) — jednou kladné, příště záporné. „Amplituda“ se tedy soustavou nepřenáší spojitě, nýbrž asi dvakrát za periodu. „Frekvenční demodulátor“ má na svém vstupu amplitudový omezovač, který potlačí amplitudové změny — pak jsou nositelem zprávy jen průchody nulou modulované nosné vlny. I „frekvence“ je tedy přenášena soustavou nespojitě jen dvakrát za periodu (při dvou průchodech nulou za periodu). Výstupní signál soustavy s modulovanou nosnou vlnou je však spojitý. Spojitým se stane dolnofrekvenční propustí, která musí být vždy na výstupu soustavy s modulovanou nosnou vlnu, aby potlačila vysokofrekvenční složky. Tato propustí vytvoří spojitý výstupní signál podle stejných zákonů jako vytvoří spojitý signál dolnofrekvenční propustí ze sledu amplitudově modulovaných impulsů. Naše definice „amplitudy“ a „frekvence“ musí proto dávat spojitě časové funkce, které vzniknou vhodnou interpolací diskretních hodnot „amplitudy“ a „frekvence“. Je nasnadě, že chyby způsobené interpolací budou tím menší, čím menší bude změna „amplitudy“ a „frekvence“ od jedné nespojitě hodnoty ke druhé tj. čím menší bude změna během jedné půlperiody. Dostatečným zvýšením nosné frekvence lze tedy dosáhnout dostatečně malé chyby vzniklé nesprávnou interpolací.

VAN DER POL [1] definuje amplitudu a frekvenci takto:

Každou nosnou vlnu $F(t)$ můžeme psát jako reálnou část komplexní časové funkce $T(t)$

$$F(t) = \operatorname{Re} T(t) \quad (3)$$

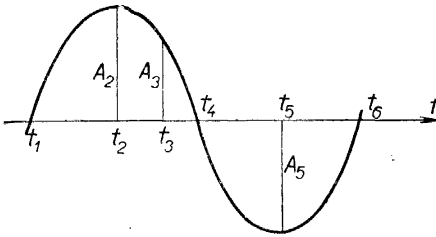
($\operatorname{Re} T$ označuje reálnou část komplexní funkce T). Amplitudou pak nazýváme absolutní hodnotu $|T|$ a (úhlovou) frekvenci nazýváme derivaci fázového úhlu podle času. Uvážíme-li, že

$$\ln T = \ln |T| + j\varphi, \quad (4)$$

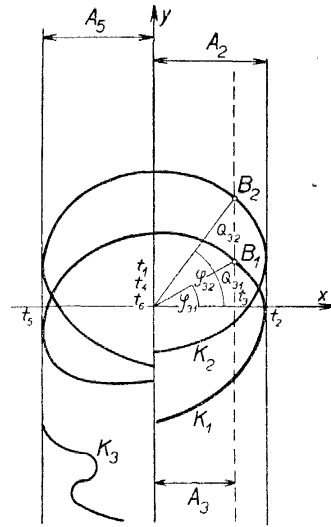
je $\varphi = \text{Im} \ln T$ ($\text{Im } x$ je imaginární část komplexního x) a frekvence je

$$\sigma = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi^{(1)} = \text{Im} \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dt}. \quad (5)$$

Vycházejíce z této představy frekvence podali Van der Pol [1] a jiní [11], [12], [13], [14], [15] přibližné rovnice pro výpočet skreslení frekvenčně modulovaných soustav a pro výpočet tzv. zákmitových charakteristik frekvenčně modulovaných soustav (viz např. [3], [7], [16]). Tyto výsledky však trpí jednou nejasností, na kterou poukázal J. SHEKEL [5]: Při volbě komplexní funkce T jsme zvolili imaginární část $\text{Im } T$ podle „citu“. Můžeme dostat velmi rozdílné výsledky pro „amplitudu“ a „frekvenci“ podle volby $\text{Im } T$. Určité omezení se zavede, když předpokládáme, že derivace fáze podle času je vždy kladná i že amplituda je vždy kladná (záporná amplituda a záporná frekvence nemají fyzikálního smyslu). Pišme tedy



Obr. 2.



Obr. 3.

$$F(t) = \text{Re } T(t) = Q(t) \cdot \cos \varphi(t). \quad (6)$$

Známe $F(t)$; z této jediné časové funkce máme odvodit dvě časové funkce $Q(t)$ a $\varphi(t)$. To lze učinit se značnou libovůlí i když klademe požadavek $Q(t) > 0$ a $\varphi(t)^{(1)} > 0$. Mějme na př. časový průběh $F(t)$ podle obr. 2. Tento časový průběh můžeme pokládat za projekci bodu B na osu x (obr. 3). V čase t_3 je $F(t_3) = A_3$; tuto hodnotu můžeme znázornit bodem B_1 s amplitudou $Q_{3,1}$ a fází $\varphi_{3,1}$, ale i bodem B_2 s amplitudou $Q_{3,2}$ a s fází $\varphi_{3,2}$. I když žádáme, aby Q a $\varphi^{(1)}$ byly vždy kladné, může průběh $T(t)$ představit každá křivka K_1, K_2, \dots atd., která proběhne mezi amplitudami A_2 a A_5 , obíhá počátek souřadnic proti směru ruček hodinových a nikdy se nevrací jako např. křivka K_3 . Je tedy nutno stanovit ještě další podmínku, která by dovoľovala jednoznačnou volbu

$\text{Im } T$ a tím by i jednoznačně určila „amplitudu“ $Q(t)$ a „frekvenci“ $\varphi(t)$ ⁽¹⁾. Volba $\text{Im } T$ je daná volbou způsobu interpolace pro stanovení spojitě „amplitudy“ a spojitě „frekvence“.

V amplitudovém i frekvenčním demodulátoru výstupní dolnofrekvenční propust nedovolí velmi rychlé změny amplitudy a frekvence; připouští pomalé změny, které odpovídají dolnofrekvenčním nebo videofrekvenčním složkám. Při úzkém frekvenčním pásmu vzhledem k nosné frekvenci se extrémní nosné vlny mění málo tj. amplitudy A_2 a A_5 jsou si vždy velmi blízké. Interpolujeme proto tak, že křivku K necháme proběhnout přibližně kruhovou dráhu se středem v počátku. Jestliže se pak i úhlová rychlost vektoru mění během otáčky málo, dostáváme spojitou „amplitudu“ a spojitou „frekvenci“, které se mění s časem pomalu a vyhovují proto shora uvedeným požadavkům. Abychom dosáhli takové interpolace, zvolme $\text{Im } T(t)$ takto:

Pro $T(t)$ platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T(t) \exp(j\omega t) dt = 0 \quad \text{pro } \omega < 0, \quad (7)$$

tj. spektrum časové komplexní funkce $T(t)$ je pro záporné frekvence rovno nule. Zároveň však platí rov. (3); je proto $T(t)$ jednoznačně dáno vztahy:

Označme

$$S_F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \exp(-j\omega t) dt = \varrho(\omega) \exp[j\psi(\omega)], \quad (8)$$

pak je

$$T(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_F(\omega) \exp(j\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega=0}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{+\infty} F(x) \exp[j\omega(t-x)] dx d\omega. \quad (9)$$

Rovnicemi (8) a (9) se přiřkne každé funkci $F(t) = \text{Re } T$ funkce $\text{Im } T$, která je Hilbertovou transformací (konjugovaným integrálem) funkce $F(t)$, neboť

$$\text{Im } T(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \sin \omega(x-t) dx \quad (\text{viz [8], rov. 5.1.7}).$$

Proto lze též psát

$$\text{Im } T(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F(t+x) - F(t-x)}{x} dx.$$

$\text{Im } T(t)$ závisí hlavně na průběhu $F(t)$ v okolí času t ; při extrémních hodnotách $F(t)$ je $\text{Im } T$ blízké nule, když se $F(t)$ rychle mění nabývá $\text{Im } T$ extrémních hodnot.

Podle rov. (9) můžeme psát

$$\begin{aligned} |T|^2 &= T \cdot \bar{T} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty S_F(x) \overline{S_F(y)} \exp [j(x-y)t] dx dy = \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \varrho(x) \varrho(y) \cos [(x-y)t + \psi(x) - \psi(y)] dx dy, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{d|T|^2}{dt} = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \varrho(x) \varrho(y) \sin [(x-y)t + \psi(x) - \psi(y)] (x-y) dx dy, \quad (11)$$

$$\frac{d^2|T|^2}{dt^2} = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \varrho(x) \varrho(y) \cos [(x-y)t + \psi(x) - \psi(y)] (x-y)^2 dx dy.$$

Integrovaná funkce se tedy při vyšších derivacích násobí činitelem $(x-y)$, který může být nanejvýš roven šíři pásma. Proto se stává v průměru velmi malou relativní změna $|T|^2$ za půlperiodu

$$\frac{\pi}{2\omega_0} \cdot \frac{1}{|T|^2} \cdot \frac{d|T|^2}{dt},$$

kde $\overline{|T|^2}$ je časová střední hodnota $|T|^2$.

Kdyby spektrum funkce T mělo hodnoty i pro záporné frekvence, byl by někdy činitel $(x-y)$ rovný asi dvojnásobku nosné frekvence $2\omega_0$ a uvedená změna $|T|^2$ za půlperiodu by již nebyla velmi malá proti jedničce. Podobně dostaneme pro „frekvenci“

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}|T|^2 &= |T|^2 \operatorname{Im} \frac{1}{T} \cdot \frac{dT}{dt} = \operatorname{Im} \bar{T} \cdot \frac{dT}{dt} = \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 j \int_0^\infty \int_0^\infty S_F(x) \overline{S_F(y)} \exp [j(x-y)t] x dx dy = \\ &= \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \varrho(x) \varrho(y) \cos [(x-y)t + \psi(x) - \psi(y)] x dx dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Při úzkém pásmu je

$$\varphi^{(1)}|T|^2 \doteq \omega_0 |T|^2, \quad \text{tj. } \varphi^{(1)} \doteq \omega_0.$$

Z rov. (12) plyne:

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{|T|^2} \left[(\varphi^{(1)}|T|^2)^{(1)} - \varphi^{(1)} \frac{d|T|^2}{dt} \right]$$

a relativní změna „frekvence“ za půlperiodu

$$\frac{\pi\varphi^{(2)}}{\omega_0^2} = \frac{2}{|T|^2} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \varrho(x) \varrho(y) \sin [(x - y) t + \psi(x) - \psi(y)] \frac{(x - y) (\omega_0 - x)}{\omega_0^2} dx dy. \quad (13)$$

Tedy i frekvence se mění během jedné periody velmi málo. Volbou T podle rov. (6) a (7) jsme dosáhli toho, že vektor T (obr. 3) obíhá téměř rovnoměrně ($\varphi^{(1)}$ se málo mění!) kolem počátku souřadnic a jeho konec opisuje téměř kružnici se středem v počátku ($|T|$ je téměř konstantní!). „Amplituda“ se dotýká všech extrémních hodnot (amplitud) modulované nosné $F(t)$, je spojitá a je omezena na složky nízké frekvence. „Frekvence“ je dána sledem průchodů nosné vlny $F(t)$ nulou (osou y v obr. 3) a je nepřímou úměrná délce intervalů mezi dvěma průchody nulou.

Absolutní hodnota $|T|$ podle rov. (9) a derivace fáze této komplexní funkce T podle rov. (5) nám tedy dávají pro každou modulovanou nosnou vlnu $F(t)$ „amplitudu“ a „frekvenci“, které — je-li $F(t)$ modulovaná nosná vlna s dosti úzkým pásmem vzhledem k nosné frekvenci — představují dosti dobře výstupní signál amplitudového a frekvenčního demodulátoru. Shoda je tím lepší, čím užší je pásmo vzhledem k nosné frekvenci.

Sledujeme-li signál po značnou dobu, nabývá $\varrho(\omega)$ značných hodnot a může proto pro určitý okamžik t nastat případ, že $\varphi^{(1)}$ nebo $\frac{d|T|}{dt}$ nabývají značných hodnot. Čím je však poměr šíře pásma k nosné frekvenci menší, tím řidčeji tento případ může nastat a můžeme proto pro úzké pásmo tyto okamžiky zanedbat.

Pro časové průběhy napětí nebo proudu, které nemají pásmo úzké proti nosné frekvenci lze také podle vztahů (6) a (7) odvodit „amplitudu“ a „frekvenci“, avšak obvyklé amplitudové nebo frekvenční demodulátory nedávají výstupní signál úměrný takto definované „amplitudě nebo frekvenci“.

Podle rov. (4) a (5) můžeme psát, známe-li amplitudu a frekvenci

$$\varphi = \int_{t_0}^t \sigma(z) dz$$

a je-li $f(t)$ přenášený signál s frekvenčním zdvihem $\Delta\omega$

$$\varphi = \omega_0 t + \Delta\omega \int_{t_0}^t f(z) dz, \\ T(t) = Q(t) \exp [j \int_{t_0}^t \sigma(z) dz] = Q(t) \exp j(\omega_0 t + \Delta\omega \int_{t_0}^t f(z) dz). \quad (14)$$

Je-li vlna modulovaná jen amplitudově je

$$Q(t) = A[1 + \mu f(t)].$$

Pak

$$T(t) = A[1 + \mu f(t)] \exp(j\omega_0 t). \quad (15)$$

Je-li vlna modulována jen frekvenčně, je

$$Q(t) = A \text{ (konstantní)}$$

a

$$T(t) = A \exp j \left(\omega_0 t + \Delta\omega \int_{t_0}^t f(z) dz \right). \quad (16)$$

Dostaneme tedy komplexní funkce shodné s komplexními funkcemi, které zavedl Van der Pol [1] podle „citu“. Je-li však vlna modulována amplitudově a frekvenčně (např. rušivá šumová vlna) pak nelze příslušnou komplexní funkci $T(t)$ volit podle „citu“ a je nutno použít přesnější rov. (9).

3. Skreslení signálu v soustavě s modulovanou nosnou vlnou

Přikročíme nyní k původnímu problému, který měl být touto teoretickou úvahou vyřešen: Hledáme početní vyjádření skreslení signálu namodulovaného (amplitudově nebo frekvenčně) na nosnou vlnu v lineární soustavě (anteny — zesilovače — případně lineární měniče frekvence — mezifrekvenční zesilovače).

Modulovaná nosná vlna budiž $F_1(t)$. Podle rov. (9) najdeme k ní příslušnou komplexní časovou funkci $T_1(t)$. Amplituda této nosné vlny je

$$|T_1| = Q_1. \quad (17)$$

Frekvence této nosné vlny je

$$\sigma_1 = \text{Im} \frac{1}{T_1} \frac{dT_1}{dt}. \quad (18)$$

Podle rov. (4) můžeme psát

$$T_1 = Q_1 \cdot \exp \left(j \int_{t_0}^t \sigma_1(z) dz \right). \quad (19)$$

Průchodem lineární soustavou se skreslí modulovaná nosná vlna podle rov. (2) na

$$F_2(t) = \int_0^\infty K(x) F_1(t-x) dx. \quad (20)$$

Chceme-li znát „amplitudu a frekvenci“ této nové nosné vlny musíme najít komplexní časovou funkci $T_2(t)$, která by podle rov. (9) (nebo podle rov. (3) a (7)) příslušela k $F_2(t)$. Tato funkce je

$$T_2(t) = \int_0^\infty K(x) T_1(t-x) dx, \quad (21)$$

neboť spektrum této funkce $T_2(t)$ je podle rov. (1)

$$S_{T_2}(\omega) = S_S(\omega) S_{T_1}(\omega).$$

Spektrum $S_{T_1}(\omega)$ je nulové pro záporné frekvence a proto i spektrum $S_{T_2}(\omega)$ je nulové pro záporné frekvence. Kromě toho je očividně

$$\operatorname{Re} T_2 = F_2 .$$

Podle rov. (6) a (7) je tedy T_2 komplexní funkcí příslušnou k modulované nosné $F_2(t)$.

Amplituda modulované nosné vlny za lineární soustavou je proto

$$Q_2 = \left| \int_0^{\infty} K(x) T_1(t-x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^t K(t-x) T_1(x) dx \right| \quad (22)$$

a frekvence je

$$\sigma_2 = \operatorname{Im} \frac{\int_0^{\infty} K(x) T_1(t-x)^{(1)} dx}{\int_0^{\infty} K(x) T_1(t-x) dx} = \operatorname{Im} \frac{\int_0^{\infty} K(x)^{(1)} T_1(t-x) dx}{\int_0^{\infty} K(x) T_1(t-x) dx} . \quad (23)$$

Známe-li amplitudu $Q_1(t)$ a frekvenci $\sigma_1(t)$ modulované nosné vlny je podle rov. (19) amplituda modulované nosné vlny za lineární soustavou

$$Q_2 = \left| \int_0^{\infty} K(x) Q_1(t-x) \exp \left(j \int_{t_0}^{t-x} \sigma_1(z) dz \right) dx \right| , \quad (24)$$

frekvence modulované nosné vlny za lineární soustavou je:

$$\sigma_2 = \operatorname{Im} \frac{\int_{-\infty}^t K(t-x)^{(1)} Q_1(x) \exp \left(j \int_{t_0}^x \sigma_1(z) dz \right) dx}{\int_{-\infty}^t K(t-x) Q_1(x) \exp \left(j \int_{t_0}^x \sigma_1(z) dz \right) dx} . \quad (25)$$

Rov. (22) a (23) nebo (24) a (25) jsou tedy uzavřenými výrazy pro signál na výstupu soustavy s modulovanou nosnou vlnou a dovolují všeobecné závěry o skreslení soustavou s modulovanou nosnou vlnou. Numerický výpočet v konkrétních případech je ovšem složitý (jako je obtížný výpočet skreslení v lineární soustavě) a je pro některé charakteristické signály v [2], [3], [4], [7], [9].

4. Vliv rušivého signálu

Dalším v praxi důležitým problémem je výpočet vlivu rušivého signálu (rušící vysilač, šum elektronek, tepelný šum anten a odporů). K rušivé nosné vlně, která vznikne z rušivých signálů selektivními okruhy na vstupu přijímače najdeme podle rov. (9) příslušnou komplexní časovou funkci $R(t)$. Komplexní funkce příslušná k žádané nosné vlně po průchodu selektivními okruhy budiž $T(t)$. Pak je „amplituda“ a „frekvence“ směsi žádané nosné vlny a rušivé nosné vlny

$$Q_3 = |T + R| , \quad \sigma_3 = \operatorname{Im} \frac{T^{(1)} + R^{(1)}}{T + R} . \quad (26)$$

Těmito rovnicemi je problém formálně vyřešen. Numerický výpočet může podle povahy rušivé nosné vlny a podle povahy žádané nosné vlny být velmi složitý.

Je-li žádaná nosná vlna amplitudově modulovaná a demodulátor je amplitudový, je

$$T = A[1 + \mu f(t)] \exp(j\omega_0 t),$$

kde $f(t)$ je přenášený modulující signál, μ je hloubka modulace. Rušivá modulovaná nosná vlna má též složky jen v okolí ω_0 (dík selektivním okruhům přijímače) a píšme proto

$$R = r \exp(j\omega_0 t),$$

kde r je komplexní funkce nízkofrekvenční (videofrekvenční).

Pak je při dosti malé rušivé nosné vlně

$$Q_3 = |T + R| = A \left| 1 + \mu f(t) + \frac{r}{A} \right| \doteq A \left(1 + \mu f(t) + \frac{\operatorname{Re} r}{A} \right). \quad (27)$$

Je-li žádaná nosná frekvenčně modulovaná a demodulátor je frekvenční, je

$$T = A \exp j \left(\omega_0 t + \Delta\omega \int_{t_0}^t f(z) dz \right), \quad (28)$$

a proto:

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= j(\omega_0 + \Delta\omega f(t)) \cdot T, \\ R^{(1)} &= j\omega_0 R + r^{(1)} \exp(j\omega_0 t) \end{aligned}$$

a výstupní signál je

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{T^{(1)} + R^{(1)}}{T + R} &= \omega_0 + \Delta\omega f(t) + \operatorname{Im} \frac{r^{(1)}}{A \exp(j\Delta\omega \int_{t_0}^t f(z) dz) + r} - \\ &- \Delta\omega f(t) \operatorname{Re} \frac{r}{A} \exp(-j\Delta\omega \int_{t_0}^t f(z) dz). \end{aligned} \quad (29)$$

Druhý sčítanec je žádaný signál, třetí sčítanec je rušení málo závislé na signálu, které se projeví i když signál je roven nule; čtvrtý sčítanec je rušení, které se přidružuje k signálu, které však mizí je-li signál nulový.

Obvykle měříme poměr signálu k rušení tak, že změříme střední hodnotu rušení, když modulační signál je nulový ($f(t) = 0$) a signál, když $f(t)$ je maximální.

V soustavě s amplitudovou modulací je tedy poměr signálu k rušení

$$\frac{A^2 \mu^2 \overline{f(t)^2}}{(\operatorname{Re} r)^2}, \quad (30)$$

kde $\overline{f(t)^2}$ a $(\operatorname{Re} r)^2$ jsou časové střední hodnoty $f(t)^2$ a $(\operatorname{Re} r)^2$. V soustavě s frekvenční modulací je

$$\frac{A^2 (\Delta\omega)^2 \overline{f(t)^2}}{(\operatorname{Im} r^{(1)})^2}, \quad (31)$$

střední hodnota $\overline{(\text{Im } r_r^{(1)})^2}$ je řádově rovna $\Omega^2 \overline{(\text{Re } r)^2}$, kde Ω je nízká frekvence; $\Delta \omega f(t)$ můžeme obvykle zvětšit na značnou hodnotu, $\mu \cdot f(t)$ musí být menší než 1; proto lze dostatečně velkým modulačním indexem $\frac{\Delta \omega}{\Omega}$ dosáhnout u frekvenční modulace lepšího poměru signálu k rušení než u amplitudové modulace. Tyto vztahy platí však jen pokud je stále $|R| < |T|$. Není-li tento požadavek splněn, pak je diskuse rovnic (24) a (25) obtížnější.

Ze vztahů (30) a (31) lze odvodit zlepšení poměru signálu k šumu při přechodu od amplitudové modulace k frekvenční modulaci i přehlušení slabšího signálu silnějším při frekvenční modulaci.

5. Závěr

Rov. (6) a (7) udávají způsob, jak vypočítat „amplitudu“ a „frekvenci“ libovolného časového průběhu. Je-li frekvenční pásmo tohoto časového průběhu úzké proti střední hodnotě frekvence (tzv. modulovaná nosná vlna), odpovídají „amplituda“ a „frekvence“ definované rovnicemi (6) a (7) dobře výstupnímu signálu amplitudového případně frekvenčního demodulátoru. Takto definovaná „amplituda“ spojuje hladkou křivkou vrcholky extrémů modulované nosné vlny. „Frekvence“ odpovídá rychlosti sledu průchodů nulou modulované nosné vlny za velmi krátký časový interval.

Formálně je snadné vypočítat skreslení modulované nosné vlny v lineární soustavě (obvykle hlavně mezifrekvenční zesilovač). Podle rov. (6) a (7) je možno vypočítat „amplitudu“ a „frekvenci“ skreslené modulované nosné vlny. Je proto snadné vypočítat formálně skreslení signálu v soustavě s modulovanou nosnou vlnou a vypočítat vliv rušivých nosných vln na výstupní signál takové soustavy. Numerický výpočet a závěry pro konstrukci radiových spojů jsou v pracích [4], [7], [9].

Literatura

- [1] B. Van der Pol: Journ. IEE, 1946, 95, Part III, str. 153—158.
- [2] A. Dittl: Slaboproudý obzor, 1955, VII, 16, č. 7, str. 345—350.
- [3] A. Dittl: Slab. Obz., 1955, X, 16, č. 10, str. 511—516.
- [4] A. Dittl: Slab. Obz., 1956, XI, 17, č. 11, str. 609—617.
- [5] J. Shekel: PIRE, 1953, IV, č. 4, str. 548.
- [6] A. Dittl: Slab. Obz., 1954, X, 15, č. 10, str. 476—482.
- [7] A. Dittl: Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 1956, V, 64, č. 6, str. 184—193.
- [8] E. C. Titchmarsh: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Clarendon Press, 1937.
- [9] A. Dittl: Systeme mit modulierter Trägerwelle, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig. (V tisku.)
- [10] A. Dittl: Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, 1957, I, 65, č. 4, str. 136—148.

- [11] *F. Assadourian*: PIRE, 1952, II, č. 2, str. 172—176.
 [12] *D. A. Bell*: Wireless Engineer, 1943, V, 20, str. 233—242.
 [13] *D. A. Bell*: Philos. Mag., 1944, III, 35, č. 242, str. 143—158.
 [14] *E. F. Brown*: Proc. IEE, 1957, I, Part B, č. 104, str. 52—62.
 [15] *R. G. Medhurst*: PIRE 1956, XI, 44, č. 11, str. 1608—1612.
 [16] *R. E. Mc Coy*: PIRE, 1954, III, 42 č. 3, str. 574—579.

Резюме

АМПЛИТУДА И ЧАСТОТА МОДУЛИРОВАННОЙ НЕСУЩЕЙ ВОЛНЫ

АУГУСТИН ДИТЛ (Augustin Ditzl)

(Поступило в редакцию 10/X. 1957 г.)

Обычные определения „амплитуды“ и „частоты“ модулированной несущей волны [1] в случае волн, подвергающихся амплитудной и одновременно частотной модуляции, неоднозначны. Несущие волны, прошедшие через избирательные контуры приемника, и мешающие волны подвергаются всегда амплитудной и частотной модуляции. И на практике больше всего интересуют нас именно проблемы искажения сигнала при прохождении несущей волны через избирательные контуры и влияние мешающих волн.

В настоящей работе даются определения „амплитуды“ и „частоты“ известной несущей волны, которые в случае узкого диапазона несущей волны по отношению к несущей частоте представляют собой весьма хорошее приближение выходного напряжения хороших амплитудных и частотных демодуляторов. Формулы для искажения в системах с модулированной несущей волной принимают очень простой вид. Численный расчет искажения имеется в работах [4], [7], [9].

Zusammenfassung

DIE AMPLITUDE UND DIE FREQUENZ EINER MODULIERTEN TRÄGERWELLE

AUGUSTIN DITL

(Eingegangen am 10. Oktober 1957.)

Die üblichen Definitionen der Amplitude und der Frequenz einer modulierten Trägerwelle [1] sind bei amplituden- und zugleich frequenzmodulierten Trägerwellen nicht eindeutig. Trägerwellen, die die Selektivkreise eines Empfän-

gers passierten sowie Störträgerwellen sind immer amplituden- und frequenz-moduliert. In der Praxis sind jedoch gerade die Probleme der Verzerrung der übertragenen Signale durch Selektivkreise und der Einfluss von Störwellen von grösster Bedeutung.

In der vorliegenden Arbeit werden Definitionen der Amplitude und der Frequenz einer bekannten Trägerwelle gegeben, die bei engem Frequenzband der Trägerwelle im Verhältnis zur Trägerfrequenz eine sehr gute Annäherung an die Ausgangsspannungen guter Amplituden- resp. Frequenzmodulatoren bilden. Die Ausdrücke für Verzerrungen in Systemen mit modulierter Trägerwelle nehmen dann eine formal sehr einfache Gestalt an. Die numerische Berechnung der Verzerrungen wurde in den Arbeiten [4], [7], [9] gegeben.