

Aplikace matematiky

Ladislav Rieger

O teorii neuronových sítí

Aplikace matematiky, Vol. 3 (1958), No. 4, 243–274

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102622>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČLÁNKY

O TEORII NEURONOVÝCH SÍTÍ

LADISLAV RIEGER

(Došlo dne 26. února 1958.)

DT: 621.39.001

Referativní a kritický článek o empirických předpokladech a o základech matematicko-logické teorie tzv. neuronových sítí (jakožto představitelek abstraktních konečných automatů). Je pojednáno o analýze, synthese a o reprezentaci událostí neuronovými sítěmi.

1. Úvodní poznámky

V tomto článku jde o výklad některých pojmů teorie *diskrétních*¹⁾ *konečných automatů*, zvláště pak jejich typických představitelů, tzv. *neuronových sítí* v obecném (kybernetickém²⁾) smyslu tohoto slova (srov. níže). Nečiníme si nároku ani na původnost (až na odstavec o synthesi) ani na úplnost (zejména pokud jde o podrobnosti z nejnovější doby³⁾) v této teorii, která je v bouřlivém a nesnadno přehledném rozvoji, hlavně v USA a v SSSR. Zato bychom rádi předně ukázali (bez přeceňování a bez podceňování) pravou úlohu jistých pojmů, rozvinutých původně v matematické logice (včetně teorie množin) a aplikovaných v teorii diskrétních automatů. Přitom je třeba připomenout, že matematická logika je sama aplikací těchto matematických prostředků na výzkum logické stavby matematických teorií; základními prostředky tu jsou — vedle jisté části intuitivní teorie množin — teorie Booleových algeber a σ -algeber, konstruktivní (rekursivní) aritmetika a tři vzájemně velmi příbuzné teorie: obecně rekurentních funkcí (ve smyslu KLEENEHO), vyčíslitelných funkcí (ve smyslu TURINGOVĚ) a normálních algoritmů (ve smyslu

¹⁾ Na rozdíl od tzv. *modelujících*, zčásti, nebo výlučně *spojitě pracujících automatů*, jakými jsou např. servomotory.

²⁾ Tj. ve smyslu původní Wienerovy charakterisace kybernetiky jako obecné (matematické) teorie řízení a sdílení (control and communication). (Srov. N. WIENER, *Cybernetics*, J. Wiley, New York 1948.)

³⁾ Úplné sledování posledních výsledků je velmi nesnadné jednak pro roztržitost příspěvků po různých specializovaných časopisech hlavně z oborů slaboproudé elektrotechniky a automatiky, neurofysiologie a biofysiky. Kromě toho mnohé pokroky (ve zprávách výzkumných laboratoří či korporací) jsou z důvodů vojenských, nebo (na západě) také z konkurenčních nepřístupné — popřípadě se uvolní až po době několika let.

A. A. MARKOVA.) — Je pochopitelné, že mají-li modely neuronových sítí nahradit (ba dokonce ve smyslu spolehlivosti, rychlosti a objemu předčít) některé druhy činností lidského mozku, bude jejich teorie používat především týchž prostředků jako sama matematická teorie logického myšlení.

Druhou, zpravidla zanedbávanou stránkou věci, již chceme věnovat poměrně značnou pozornost, je co možno vyjasnit přechod od společných zákonitostí, podmiňujících chod skutečných modelů neuronových sítí v čase (— ať již jde o modely organické nebo anorganické) až k abstraktnímu ryze matematickému pojmu konečného diskrétního automatu ve smyslu MEDVE-
DĚVOVĚ (viz níže).

Pokud jde o terminologii teorie neuronových sítí (jakožto části kybernetiky), je přejata — což je jistě jev v matematické teorii nezvyklý — z neurofysiologie. Je to vlivem průkopnické práce amerického neurofysiologa W. S. McCULLOCHA a matematika W. PITTSE, (viz zejm. *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, *Bull. Math. Biophys.*, 5, 115—133 (1943)), kteří první definovali a vyšetřovali matematické schéma některých základních funkcí centrální nervové soustavy člověka pomocí Booleovy algebry. — Budeme užívat termínů, „neuron“, „synaps“, „vlákno“, „excitace“, „útlum“ a pod. v jejich přijatém obecně kybernetickém významu. Budeme-li mít speciálně na mysli objekty neurofysiologické, vytkneme to zvláště (např. přívlastkem „organický“), nebo to bude ze souvislosti zřejmé.

Pokud jde o české překlady dalších termínů (jež ostatně samy nejsou ještě ustálené), je třeba je chápat jen jako první návrhy našich termínů.

Nejpřístupnějším seriosním⁴⁾ pramenem hlavních informací o teorii konečných diskrétních automatů — resp. neuronových sítí, je v ruském překladu u nás rozšířený sborník *Automata Studies* (Princeton University Press 1956), tj. *Автоматы* (Изд. иностр. лит., Москва 1956), z něhož pod zn. [A] budeme hojně citovat.

Pokud jde o základní pojmy neurofysiologie (neuronová teorie,) možno se např. poučit v kompendiu *Lehrbuch der inneren Medizin*, Band V, Teil 1-*Allgemeine Neurophysiologie* (R. JUNG), IV. Aufl., Springer Berlin 1953.

Pokud jde o základní pojmy teorie elektrických diskrétních automatů (číslicových strojů), uvedme z rozsáhlé novější literatury alespoň knihu A. П. КИТОВ, *Электронные цифровые машины*, Советское радио, Москва 1956 a knihu R. K. RICHARDS, *Arithmetic operations in digital computers*, Van Nostrand Toronto — New York — London 1955, která v ruském překladu pod názvem *Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах* (Изд. иностр. лит., Москва 1957) je u nás přístupná. — Zvláštní vědomosti z těchto knih (z nichž autor čerpal), se však nepředpokládají.

⁴⁾ Vedle celé řady populárních brožurek a článků, jež — jak tomu ani jinak nemůže být — poučují více nebo méně zkresleně.

2. Obecná charakterisace neuronové sítě

Půjde nejprve o výchozí obecnou (na první pohled dosti složitou) charakterisaci „skutečné“ kybernetické neuronové sítě (tj. o popis její charakteristické zákonitosti v čase a prostoru). Tím se pokusíme stručně osvětlit a zdůvodnit v § 3 následující schematické matematické vystižení této zákonitosti, ukázat jeho meze správnosti a ukázat kdy a jak asi je třeba popřípadě první hrubou matematickou teorií nahradit jemnějšími a skutečností bližšími matematickými popisy.

Čtenář učiní dobře, promyslí-li si nikoliv čistě matematicky definovaný pojem neuronové sítě na následujících příkladech realizací neuronových sítí. Definice je totiž poněkud nedidakticky formulována tak, aby (v případě potřeby) byla připravena k axiomatické formulaci (a formalisaci).

2.1. Staticko-geometrický popis.

Každá neuronová síť sestává ze tří (oddělených) druhů základních prvků:

a) *Neuronů*. b) *Synapsí*; synapse se přitom dělí na b_1) *budící*, b_2) *tlumící*. c) *Vodících vláken* (mezi neurony a synapsemi). Geometrické vztahy mezi těmito prvky jsou následující:

1) *Na každé synapsi síť končí jediné vlákno sítě vycházející z jediného neuronu sítě, tzv. ovladatele synapse.*

2) *Mezi synapsemi a neurony je dán vztah tzv. přiléhání. Každá synaps sítě může přiléhat nejvýše k jednomu (popřípadě ale k žádnému) neuronu sítě. (K neuronu však může přiléhat více synapsí.)*

Neurony sítě, jež ovládají (ve smyslu synapse přiléhající k danému neuronu sítě) nazvějme (v této síti) *okolními k tomuto neuronu*; (nevylučuje se, že neuron je sám k sobě okolním).

Neurony sítě, jež nemají v síti k sobě okolních neuronů, nazveme *vstupními* neurony sítě (nemusí existovat).

Neurony sítě, ovládající aspoň jednu synaps, jež nepřiléhá k žádnému neuronu sítě, nazveme *výstupními* (nemusí existovat).

Neurony nikoli vstupní se nazývají *vnitřními* neurony sítě. — Je třeba zdůraznit, že jde o rozlišování relativní vzhledem k dané síti. Týž neuron výstupní v jedné síti může být vstupním v síti jiné.

Poznámka. Pojem vstupního neuronu zde souhlasí s pojmem vstupního neuronu např. u Kleeneho a j. autorů jenom pokud se výslovně vylučuje „spoluovládání vstupu zevnitř“, což ale např. na str. 38 v [A] není jasné. V případě, který má na mysli Kleene, (tam a podobně jinde) nejsou jeho neurony označené indexem + vstupní v našem smyslu, jsou však „vstupní“ v tom, že na počátku práce sítě mají být excitovány vlivy vnějšími (vzhledem k síti). Zdá se nám, že taková představa neodpovídá skutečnosti a teoreticky je zbytečná.

V teorii můžeme (bez újmy obecnosti) — a ve skutečnosti musíme — předpokládat, že excitace neuronů, označených u Kleeneho znakem $+$, byla na počátku děje způsobena neuronem (vzhledem k dané síti) vstupním v daném smyslu.

Doplňme zavedené termíny ještě touto důležitou konvencí: Budtež dány dvě konečné k -členné posloupnosti různých neuronů ${}^1N, {}^2N, \dots, {}^kN$ a různých synapsí ${}^1S, {}^2S, \dots, {}^kS$.

Nechť neuron 1N ovládá synaps 1S , která přiléhá k neuronu 2N , který zase ovládá synaps 2S , jež přiléhá k neuronu 3N , ... atd. — až neuron ${}^{k-1}N$ nechť ovládá synaps ${}^{k-1}S$, jež přiléhá k neuronu kN . Pak takové dvojici posloupnosti neuronů a synapsí — včetně příslušných vláken (spojujících neuron iN se synapsí iS pro $i = 1, \dots, k$) říkáme *neuronová dráha*. — Říkáme, že neuronová dráha je *jednoduše uzavřená*, čili tvoří *jednoduchou kličku*, připustíme li (pouze jednu) rovnost ${}^1N = {}^kN$ (zpětná vazba). — Ani v obecném ani v tomto posledním případě nevylučujeme $k = 1$ (u tzv. samobuzených, resp. samotlumených neuronů, jež jsou organicky nepravděpodobné, elektrotechnicky však snadno realizovatelné (srov. níže)).

Rozeznáváme dle toho pak *neuronové sítě bez kliček* (jež jsou teoreticky i funkčně velmi jednoduché) — a *s kličkami* (jež jsou podstatně složitější.)

Tím je ukončen poměrně jednoduchý popis „geometrie“ neuronové sítě. — Z hlediska teorie grafů ve smyslu D. KÖNIGA nejde o nic jiného, nežli o jistého druhu orientované grafy: Uzly grafu jsou neurony, vlákna jsou spoje mezi uzly a sice orientované tak, že vycházejí z neuronu ovládajícího jistou synaps přiléhající k dalšímu (nebo témuž) neuronu — a do tohoto dalšího vcházejí. (Autoru není však známo nějaké netriviální použití teorie konečných grafů na teorii neuronových sítí.)

2.2 Časový popis.

Obraťme se teď k druhé podstatné části charakterisace neuronové sítě, pokud jde o její činnost v čase. — Neuronová síť je dále charakterisována těmito požadavky (zákony):

I. Zákon „vše nebo nic“ pro každý jednotlivý neuron sítě.

Každý neuron v síti, sledován v čase, je schopen právě a jen dvou relativně stabilních stavů: tzv. stavu (úplné) excitace (podráždění, nabuzení, aktivity) a stavu (úplného) útlumu (nečinnosti).

Přítom každý neuron má jistou „setrvačnost“ v tom smyslu, že jak stav excitovaný, tak stav utlumený trvá vždy nejméně po určitou (konstantní) dobu (tj. než tato minimální doba uplyne, nemůže se stav neuronu začít měnit za žádných okolností v síti; např. organický neuron po excitaci má tzv. refrakterní dobu, během níž nemůže být znova excitován sebe většími podněty).

Naproti tomu vlastní doba nestabilního přechodu ze stavu,⁵⁾ je (ve srovnání s trváním stavu) velmi krátká.

Rovností $N(t) = 0$, resp. $N(t) = 1$ značíme okolnost, že neuron N je v čase t utlumen, resp. excitován.

Zdůrazněme, že zákon „vše nebo nic“ je v organických sítích plně experimentálně potvrzen. Stav excitace je definován elektrickou (přesněji elektrochemickou) aktivitou neuronu a je možno jej přímo registrovat katodovým oscilografem. V neuronových sítích umělých je jeho zaručení prvním konstrukčním předpokladem; u „elektronkového⁶⁾ neuronu“ jest excitací přítomnost, útlumem nepřítomnost výboje v elektronece, u „elmg. reléového neuronu“⁶⁾) činný (nabuzený, přitažený) stav relé (pod proudem), resp. nečinný (odpadlý) stav relé, — atp. u dalších modelů (viz příklady níže).

II. Zákon excitačního prahu.

Tento zákon ve své matematické formulaci, zde uvedené, pochází od V. NEUMANNA (viz [A], str. 73) a sjednocuje všechny dosud uvážené podmínky excitace a útlumu neuronů v umělých sítích. V organických sítích je kvalitativně verifikován (kvantitativně neexistuje dosud experimentální metoda pro určení hypotetické prahové funkce $\varphi(x)$, viz níže).

Jak již bylo naznačeno (v „geometrii“ sítě), předpokládáme, že každé vlákno ve smyslu své orientace vede (přenáší) a prostřednictvím jedné synapse předává jednu jednotku množství excitačního (tlumicího) účinku z daného neuronu, který je právě excitován, na každý neuron k němuž se přimyká synapse, daným ovládaná.⁷⁾

⁵⁾ Tuto dobu přeskočení ze stavu do stavu jest nesměšovati s dobou potřebnou k vyvolání excitace daného neuronu na základě excitace neuronů okolních, čili s tzv. zpožděním, které není zanedbatelné, nýbrž naopak bývá považováno za důležitou časovou konstantu sítě (viz níže).

⁶⁾ Pozor však na správné chápání elektronky a relé jako neuronu! (Viz níže.)

⁷⁾ Aby bylo jasno: Jestliže např. neuron N_1 ovládá jednu synaps budící přiléhající k neuronu N_2 — a dvě synapse tlumící, rovněž přiléhající k neuronu N_2 , pak N_1 takto vyvolá na N_2 1 budící a 2 tlumící účinky — za předpokladu ovšem, že N_1 byl excitován; nebyl-li excitován, nevysílá k N_2 ani tlumící ani budící účinky. Zde je tedy rozdíl oproti vzájemnému ovládání obyčejných elmg. relé (s jediným vinutím). Jednak se ovládání daného relé „okolními relé“ děje prostřednictvím tzv. kontaktového mnohopólu, složeného ze spínacích, rozpínacích a ev. i přepínacích doteků, zapojených v popř. dosti složitým kontaktním ovládacím schematu (serioparalelním, nebo i obecném, můstkovém, srov. M. A. GAVRILOV: *Teorie reléově kontaktních schemat*, (překlad z ruštiny), SNTL 1953,) jednak relé, které odpadlo, může tím vlastně vyvodit — na rozdíl od utlumeného (nečinného) neuronu — aktivní účinek tlumící (rozpojením spínače), resp. budící (spojení rozpínače), což je dáno tou zvláštností že mechanický element (vzpružina) sám vrací dotek do původní polohy. (Rozdíl ve funkci mezi synapsí a doteky!).

Přes tento zásadní rozdíl *obyčejně reléově-kontaktní sítě mohou plně zastat funkci neuronových*, resp. i vhodné konfigurace relé jsou ekvivalentní jednotlivým neuronům sítě. (Jak, o tom ještě bude řeč.)

Předpokládáme dále, že každý vnitřní neuron N sítě má k sobě jednoznačně udánu tzv. *prahovou funkci* φ_N . Je to libovolná *neklesající funkce celistvého nezáporného argumentu s celistvými nezápornými hodnotami* (V. Neumann pro formální zjednodušení připouští i ∞ jako hodnotu, což není nutné vzhledem ke konečnosti sítě).

Nechť v čase t na počet x ze všech tlumících a k N přiléhajících synapsí právě došel účinek tlumící (od excitovaného příslušného ovladatele) a na počet y ze všech budících a k N přiléhajících synapsí právě došel účinek excitující. — Pak neuron N (teoreticky až po nepatrné době přeskočení, prakticky ihned, tj. v čase t) bude ve stavu excitovaném tehdy a jen tehdy, bude-li splněna nerovnost

$$y \geq \varphi_N(x),$$

tj. počet došlých excitačních účinků alespoň dostoupil tzv. *excitačního prahu* $\varphi_N(x)$, vyvolaného současně došlými tlumícími účinky.

Bude-li naopak $y < \varphi_N(x)$, bude neuron N (v čase t) utlumen (excitace nedostoupila potřebného prahu). — Toto je tedy obecná forma zákona excitačního prahu.

Příklady nejčastějších prahových funkcí (a příslušných zákonů excitačního prahu):

$$1) \varphi_N(x) = \begin{cases} p \text{ (= prahová konstanta) pro } x = 0 \\ m_N + 1 \text{ (= } \infty) \text{ pro } x > 0 \text{ (kde } m_N (\geq p) \text{ je maximální počet excitačních účinků, jež mohou být neuronu } N \text{ předány, tj. počet všech budících synapsí, přiléhajících k } N; \text{ (V. Neumann pro jednoduchost klade } \infty \text{ místo čísla } m_N + 1, \text{ jež může být prakticky neznámo.)} \end{cases}$$

Toto je původní Mc Cullochova (a Kleenem užívaná) prahová funkce „absolutního utlumení“ jediným tlumícím účinkem (viz [A], str. 9) — a přítom neměnného prahu. (Poznámka v ruském překladu na str. 73 není v tomto bodě správná.)

$$2) \varphi_N(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \leq x < h, \text{ kde } h \text{ je pevná konstanta} \\ m_N + 1 \text{ (= } \infty) \text{ pro } x \geq h \text{ (s jinak stejným významem znaků, jako v 1).} \end{cases}$$

Toto je V. Neumannem (viz [A], str. 73) používaná prahová funkce jiného druhu „absolutního“ tlumení: méně než h tlumících účinků nestačí k vyvolání útlumu (ať jsou excitační účinky jakékoli, třeba i nulové, dojde k excitaci) — a aspoň h tlumících účinků vždy vyvolá dokonalý útlum (ať excitace jsou jakékoli).

$$3) \varphi_N(x) = x + u_N \text{ (kde } u_N > 0 \text{ je pevná konstanta).}$$

Toto je prahová funkce, udávající zákon excitace tak, že n. i p. p. excitace je přebytek excitačních účinků oproti tlumícím alespoň o číslo u_N ; je užívána

CULBERTSONEM (viz [A], str. 142). Každá z těchto prahových funkcí představuje neurofysiologicky přípustnou (hypotetickou) variantu zákona excitačního prahu; je však pravděpodobné, že skutečná neurofysiologická prahová funkce se poněkud mění v časové závislosti na činnosti neuronů, prozatím neznámým způsobem. (Pokud jde o elektrotechnické realizace, viz níže.)

4) Nejjednodušší a původní neurofysiologickou představu podmínky excitace a útlumu dává prahová funkce $\varphi_N(x) = p$ (= prahová konstanta) — nezávisle na (aktivním) tlumení, jež se pak ani nepředpokládá. — Tzn., že neuron N se nikdy neexcituje méně než p excitačními účinky (nýbrž tlumí se jimi „pasivně“), zatím co aspoň p excitačních účinků jej vždy excituje. Je třeba připomenout, že jen takto prostě řízenými neurony možno vytvořit pouze sítě pro logické (Booleovské) součiny a součty, ne však pro inverzi (doplňek, negaci). Proto tato dřívější představa jen pasivního tlumení je, zdá se, nevyhovující.

Zákon „vše nebo nic“ a zákon excitačního prahu samy nestačí k vysvětlení resp. zaručení pravidelné práce neuronové sítě (organické resp. umělé), která *spočívá především v tom, že na daný druh sledu stavů, objevivších se postupně na vstupních neuronech, čili na „událost“, síť odpovídá vždy stavem vnitřních (resp. ev. jen výstupních) neuronů jistého druhu — po určitém zpoždění.* (Reakce na stimul, resp. zpracování informace, odezva.) K tomu je třeba další hypotézy o pravidelné součinnosti všech neuronů sítě, čili tzv.

III. zákona synchronisace (čili základního rytmu sítě).

Neurofysiologická formulace tohoto zákona je posud předmětem dohadů a sporů. Jsou sice již déle známy rozmanité druhy pravidelných rytmů (elektrických kmitů) vydávaných v neustále nezměněné frekvenci centrální nervovou soustavou člověka, předně tzv. pomalé (elektroencefalografické) Δ -vlny (frekvence asi 10 kmitů/sec.), které pravděpodobně se synchronisací činností mozkových neuronů souvisejí — ale tato souvislost není dobře známa. Je však na druhé straně také známo, že tzv. sensorické nervy, drážděné zvenci ve smyslových orgánech a předávající podráždění dovnitř nervové soustavy, vysílají své podněty v řadě více méně pravidelných pulsů. (Ty pak modulují amplitudu Δ -vln, ne však jejich frekvenci.)

Jde o to, aby na základě znalosti stavů v čase t neuronů, okolních k neuronu danému M byl jednoznačně určen stav $M(t + \Delta t)$ neuronu M v čase o jisté známé zpoždění Δt pozdějším, tj. aby v době $t + \Delta t$ se přes synapse v neuronu M projevil výsledek přestupu excitačních i tlumících účinků okolních neuronů — tak, jak to bylo výše popsáno (v zákoně o excitačním prahu).

Je tedy — s přihlédnutím ke klíčkám — nejjednodušší předpokládat *zákon synchronisace v tomto tvaru: Existují společné intervaly stejných délek pro relativně stabilní stavy všech neuronů sítě, oddělené od sebe kratičkými společnými*

intervalu přeskoků (vždy několika) neuronů sítě ze stavu do stavu, při čemž začátek jednoho společného intervalu stability resp. pulsu, je vzdálen od následujícího vždy o stejnou dobu Δt — o tzv. zpoždění, či takt. Tento takt je zároveň doba, již potřebují podněty, vyslané v daný okamžik k danému neuronu sítě z okolních neuronů sítě — k tomu, aby určily (ve smyslu zákona o excitačním prahu) stav daného neuronu sítě. — Vyslovený zákon synchronisace se v elektrických modelech neuronových sítí splňuje zpravidla tak, že proud, kterým jsou napájeny elektrické elementy sítě, má podobu vhodně pravidelně přerušovaných pulsů (tzv. základní rytmus, resp. „hodiny“ stroje). Vzhledem ke stanovení doby jednoho taktu (doby zpoždění) se však chovají elektrické neurony poněkud jinak (jednodušeji), než neurony organické — pokud je to o posledních vůbec známo. Zatím co při téměř okamžitém přenosu elektrického napjetí naprostou většinu doby zpoždění Δt určuje setrvačnost elektrického neuronu (zejm. elmg. relé), zpoždování v sítích organických neuronů je dáno podstatně samým vedením podráždění v nervových vláknech. To se děje rychlostí, zhruba nepřímou úměrnou průměru vlákna a kolísající asi od 1 m/sec v tenkých vláknech (jež však zase bývají obvykle krátká, např. tzv. dendrity) až do více než 150 m/sec v tlustých (a zpravidla ale zase dlouhých vláknech, např. v neuritech (axonách)). Poznamenejme, že dendritům se v poslední době právě podkládá šíření tlumícího účinku pod vlivem excitace je vysílajícího neuronu (vedle další úlohy tzv. „zpětného hlášení“), — kdežto neuritům se připisuje spíše přenos účinku excitačního. Obecně kyberneticky nerozlišujeme ovšem vlákna, nýbrž jen úlohu jejich zakončení (synapse budící a tlumící). Otázka morfologické existence specificky tlumících organických synapsí není dosud jasná, což však na principu funkčního modelu organické neuronové sítě nic nemění.

Celkem lze však říci vzhledem k právě uvedenému a ke zhruba vždy téže malé době přeskoků⁸⁾ neuronu ze stavu do stavu, že zákon synchronisace činnosti centrální nervové soustavy člověka zdá se být zhruba týž jako zákon synchronisace chodu umělé neuronové sítě. Lze předpokládat konstantní dobu Δt zpoždění v činnosti organického neuronu vůči neuronům okolním v centrální nervové soustavě, jež dává základní rytmus její práce. I když v organickém případě Δt je (prozatím) hypotetická a neznámá časová konstan-

⁸⁾ Přeskok z útlumu do excitace u elektronkových i organických neuronů je zpravidla ve skutečnosti rychlejší než přechod opačný — a to u organických neuronů výrazně. Velmi krátká (ale nikoli principiálně zanedbatelná) je rovněž doba přenosu podnětu z přílehlající synapse na organický neuron (0,5—0,9 m sec, dle Junga). Působení podnětů ze synapsí přenesených na různá místa povrchové blány neuronové buňky nemusí být přesně současně, aby ještě bylo stejně účinné co do způsobené excitace (útlumu). Stačí, aby k přenesení z různých synapsí došlo k časovému rozmezí 4—5 m sec (dle Junga) — aby šlo o podněty efektivně současně. To vše komplikuje výklad způsobu skutečné synchronisace centrální nervové soustavy (nebo zjevu jí ve výsledku ekvivalentního), nečiní však tento výklad nemožným.

ta, (snad zlomek pomalého α -rytmu),⁹⁾ užití takové hypotézy o synchronisaci nervové soustavy vedlo až dosud k přijatelným kvalitativním výsledkům a až překvapujícím analogiím v chování se umělých a organických (lidských) neuronových sítí. (Např. v některých zjevech nenormální činnosti: parazitické zpětné vazby jako „fixní ideje“, stroje, „halucinace“ stroje a pod.) — Aby přiblížil svoji matematickou teorii konečných automatů skutečným, zejména nejspíše jen statisticky průměrnému splnění zákona prahu a zákona synchronisace v nervové soustavě, zavedl V. Neumann předpoklad, že každý vnitřní neuron M sítě může (za podmínek, určujících jeho stav) selhat — a to s pravděpodobností ε_M , kde $0 \leq \varepsilon_M < \frac{1}{2}$ (tj. s touto pravděpodobností být ve stavu opačném, než by dle striktní zákonitosti měl).

Případ $\varepsilon_M = \frac{1}{2}$ se nejprve vylučuje — je to případ neuronu, který nemůže plnit ani zhruba žádnou určitou úlohu — a byl by dobrý leda k tomu, aby uskutečňoval náhodný výběr z alternativy se stejnými možnostmi; případ ε_M s $\frac{1}{2} < \varepsilon_M \leq 1$ nedává nic zásadně nového, protože takový neuron M je ekvivalentní neuronu M^* ve stavu vždy inverzním (opačném) ke stavu neuronu M — a to s pravděpodobností selhání $\varepsilon_M^* = 1 - \varepsilon_M < \frac{1}{2}$.

Von Neumann pak ukázal (viz [A], str. 67), že vhodným zmnohonásobením neuronů a vláken možno docílit, aby i síť z dostatečného počtu nespolehlivých neuronů fungovala jak chceme spolehlivě, tj. málo odlišně od dané ideálně pravidelně fungující sítě. V. Neumann však sám považuje svůj přístup k věci za ne zcela uspokojivý (alespoň pro neurofysiologii) — snad proto, že neformuluje samu statistickou povahu zákona synchronisace¹⁰⁾.

Tím jsme skončili popis společné (kybernetické) zákonitosti „skutečných“ neuronových sítí.

Obraťme se ještě k několika příkladům realizací (modelů) uvažovaných pojmů — než na daném podkladu přejdeme k matematicko logické teorii.

2.3. Příklady neuronových sítí.

A. Na mnoha místech předchozího textu byla zmíněna síť centrální nervové soustavy člověka: schéma její činnosti (jistého druhu) bylo vlastně východiskem obecné teorie. Připomeňme k tomu přehledně model (interpretaci) kybernetických pojmů fyziologickými:

neuron nervová buňka (řádové v počtu asi 10^{10});

synapse $\left\{ \begin{array}{l} \text{budící} \\ \text{tlumící} \end{array} \right\} \dots \text{skutečná synapse} \left\{ \begin{array}{l} \text{neuritu} \\ \text{dendritu (?)} \end{array} \right\}$

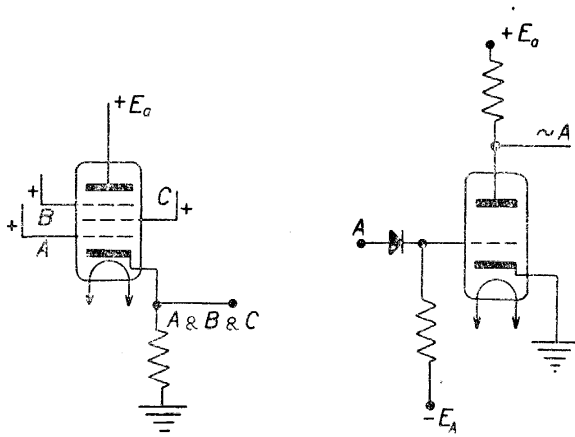
⁹⁾ Poznamenejme, že α -rytmus není pro vyšší nervové funkce specifický — téměř týž α -rytmus jako u člověka byl zaznamenán např. u potápníka (Diphthicus) — viz Jung, loc. cit. str. 80.

¹⁰⁾ K těmto otázkám, jež již jsou mimo rámec tohoto článku, se hodláme příležitostně vrátit.

(1 neuron c. n. s. jich ovládá snad průměrně 100);
 vlákna nervová vlákna (neurity, dendrity) vysílaná z těla
 nervové buňky.

Prahové funkce: snad jako v 1) 2) 3) shora, možná složitější prahové funkce.

Poznámka. Skutečnou synapsí se rozumí mezera mezi zakončením vlákna v blízkosti blány těla další nervové buňky — a tím místem blány, na něž se z vlákna přenáší (excitační nebo tlumící) účinek. Tím je vysvětleno i „skutečné přiléhání“. Termín „ovládání synapse neuronem vysílajícím do vlákna rozruch“ je tu rovněž jasný.



Obr. 1ab.

B. Čistě elektrický model.

neuron elektronka;

synaps $\left\{ \begin{array}{l} \text{budící} \\ \text{tlumící} \end{array} \right\}$... mřížka $\left\{ \begin{array}{l} \text{brzdící} \\ \text{urychlující} \end{array} \right\}$;

vlákna vodiče (včetně potřebných pomoc. indukci, kapacit, odporů);

stav $\left\{ \begin{array}{l} \text{excitace} \\ \text{útlumu} \end{array} \right\}$ neuronu stav $\left\{ \begin{array}{l} \text{výboje} \\ \text{klidu} \end{array} \right\}$ v elektronce;

neuron N ovládá synaps S z okruhu lampy N je (potenciometricky) odvozeno předpětí mřížky S ;

synaps S přiléhá k neuronu M .. mřížka S je uvnitř lampy M .

Prahové funkce: Opět nejspíše typu 1), 2) nebo 3) shora.

Poznámka: Tento model je nepraktický pro drahost a (k danému účelu) nedostatečnou spolehlivost (ve splnění zákona prahu) elektronek s mnoha

mřížkami. Ve skutečných automatech se používá nejvíce diod (ventilů) někde triod (obr. 1b) — a snad výjimečně i pentod (obr. 1a). (Srov. Котоб, str. 62.) Čím dále tím hojněji se používají ventily a „triody“ polovodičové (germaniové, kuproxidové) a elementy ferritové, kde je interpretace poněkud jiná (srov. Котоб, 62—68).

C. Elektromagneticko-reléový model (částečně mechanický).

neuron $\left\{ \begin{array}{l} \text{elektromagnetické relé s několika pozitivními a ně-} \\ \text{kolika negativními vinutími — a s permanentně} \\ \text{magnetickou kotvou na vzpružině;} \end{array} \right.$

synaps $\left\{ \begin{array}{l} \text{budicí} \\ \text{tlumicí} \end{array} \right\}$ spinač $\left\{ \begin{array}{l} \text{pro pozitivní} \\ \text{pro negativní} \end{array} \right\}$ vinutí;

vlákna vodiče;

stav $\left\{ \begin{array}{l} \text{excitace} \\ \text{útlumu} \end{array} \right\}$ relé $\left\{ \begin{array}{l} \text{přitahuje} \\ \text{odpadlo resp. odpuzuje;} \end{array} \right.$

neuron N ovládá synaps S relé N ovládá dotek S (prostřed. kotvy);

synaps S přiléhá k neuronu M ... spinač S je (v serii) v okruhu vinutí na relé. Prahové funkce: nejspíše jako prve. — Také tento model má sotva praktickou cenu (srov. pozn. na str. 11). (Ve skutečnosti se pracuje s relé s jediným vinutím.)

D. Čistě mechanický model (princip automatického ovládání pomocí tlakové kapaliny).

neuron nádoba s tlakovou regulační kapalinou;

synaps $\left\{ \begin{array}{l} \text{budicí} \\ \text{tlumicí} \end{array} \right\}$ píst ovládající záklopku $\left\{ \begin{array}{l} \text{vtoku} \\ \text{odtoku} \end{array} \right\}$ tlakové kapaliny;

vlákno trubka (vyvádějící tlakovou kapalinu z nádoby a zakončená válcem a pístem);

stav $\left\{ \begin{array}{l} \text{excitace} \\ \text{útlumu} \end{array} \right\}$ stav kapaliny v nádobě $\left\{ \begin{array}{l} \text{pod tlakem} \\ \text{bez tlaku;} \end{array} \right.$

neuron M ovládá synaps S nádoba M (prostřednictvím pístu na konci trubky) ovládá záklopku S (na další nádobě).

Prahové funkce: opět jako shora.

Je zřejmé — a v praxi k tomu dochází, že jednotlivé modely možno vzájemně kombinovat.

Vůbec je třeba si uvědomit, že to, co nazýváme neuronovou sítí, resp. jejím modelem, je třeba obecně považovat za součást („jednotku“) celého automatu — a že zpravidla vstupní neurony jedné (díličí) sítě jsou výstupními neurony jiné (díličí) sítě, na níž prvá navazuje.

3. Matematicko-logická analýza a syntéza ideálních neuronových sítí

3.1 Diskretní časová proměnná

Ve smyslu předchozího § můžeme nazvat ideální neuronovou sítí takovou, která splňuje dokonale všechny charakteristické požadavky tam uvedené, zejména zákon I („vše nebo nic“) zákon II (prahu) a zákon III (synchronisace). Později budeme zpravidla přivlastek ideální vynechávat, protože o jiných sítích v tomto článku nebude řeč.

Ve smyslu zákona III pak časovou proměnnou t omezíme na celá čísla — počty taktů, resp. indexy společných intervalů relativní stability (ve smyslu jejich časového sledu), čili klademe $\Delta t = 1$ (ve vhodné časové jednotce). — Dosti obšírně a nejednotně bývá tu diskutována (zejména ve spojitosti s neurofysiologickou interpretací, srov. např. Kleene v [A], str. 31—41) 1. otázka „času automatu vůbec“ a pojmy „minulost“ a „přítomný čas“ ($p = \text{present}$) zvláště, 2. otázka časové nuly jako „okamžiku narození sítě“, resp. naopak 3. otázka teoretického (a praktického) smyslu připouštění „nekonečné minulosti“ sítě (automatu), tj. rozšíření časové proměnné t i na všechna celá záporná čísla — vše ve spojení s pojmem „události“ (viz níže).

K tomu jen několik objasňujících poznámek: Především k pojmu „čas“, „přítomný čas“, „minulost“ a „budoucnost automatu“ (neuronové sítě).

a) Majíce na mysli matematickou teorii neuronových sítí (třebas i centrální nervové soustavy člověka) musíme chápat čas ve smyslu matematicko-fyzikální proměnné t , tedy ne snad ve smyslu „psychologickém“. To ovšem vede nutně k libovolné volitelnosti časové nuly — a k neomezenosti časové proměnné „do minula“ i „do budoucna“. Za „přítomný“ možno tak považovat kterýkoli právě uvažovaný časový údaj $p = t$ spadající do vyšetřovaného intervalu a všechny menší časové údaje značí pak relativně „minulé“, větší (relativně) „budoucí“.

Teoreticky zajímavé a prakticky důležité je však právě spojení předpokladu konečnosti sítě s neomezeností časové osy. Ani neurofysiologické neuronové sítě nemůžeme zde považovat za „jedinečná a (ve svém vzniku, vývoji a zániku) neopakovatelná individua“ nýbrž za typy, vyskytující se v různých časových intervalech v mnoha exemplářích. Na tom ničeho nemění rozdíl mezi organickými a umělými (anorganickými) exempláři neuronových sítí, z nichž prvé mají jen jeden život a od zrození do zániku bez přestání fungující pamět, kdežto druhé můžeme kdykoli „usmrtit“ (zastavit), vymazat vše z jejich „paměti“ a nechat je opět ve zvoleném okamžiku „znovuzrodit“ — a to ještě v předepsaném novém počátečním stavu. Tato okolnost jen znesnadňuje experimentální výzkum lidské centrální nervové sítě (na rozdíl od umělých automatů), pro matematickou teorii však nezakládá žádného rozdílu mezi oběma.

b) Na přítomný čas“ p se můžeme dívat také jako na *konec vyšetřovaného intervalu časové proměnné t* , který (během vyšetřování) se nemění (dále si nesledujeme — do budoucna), takže časový údaj můžeme počítat také od $p = \text{konst.}$ zpět — (jako od časové nuly) — a udávat jej celými čísly $p, p - 1, p - 2, \dots$; pak ovšem není $p \equiv t$ ale může být nanejvýše $t = p$ — a časový údaj úvahy postupuje zpět — až ev. do záporných hodnot — popřípadě bez předem daného omezení.

c) *Rozšiřování časového intervalu* na obě dvě strany neomezeně, resp. *přímý a obrácený sled časových údajů nejsou však rovnocenné*, protože daným stavem vstupních i vnitřních neuronů sítě je ve smyslu § 2 jednoznačně určen následující stav vnitřních neuronů; obráceně však nebývá daným stavem neuronů určen předchozí stav — na rozdíl např. od popisu děje diferenciální rovnicí s časovou nezávisle proměnnou. — „Okrajová podmínka“ (stav) určující jednoznačně chod sítě, tedy musí být počáteční podmínkou (stav neuronů na počátku), nikoli „konečnou“ podmínkou.

Proto počítání času „do minula“ ve smyslu b) se jeví být méně vhodným¹¹⁾ a nebudeme ho uvažovat (přes to, že např. tak činí Kleene v [A]).

Budeme tedy čas zpravidla důsledně počítat vzhůru od nuly, kterou klademe do okamžiku nástupu činnosti právě sledované sítě (sledujeme-li ji samotnou) — a časová proměnná t probíhá celá nezáporná čísla $t = 0, 1, 2, \dots$ (omezení na nezápornou časovou poloosu podobně jako na př. v operátorovém počtu MIKUSIŇSKÉHO, ale přirozenější). t udává nějaký počet taktů v činnosti sítě, p nechť udává poslední (dosud uvažovaný) takt (s možností jíti dále).

3.2 Charakteristická Booleovská funkce neuronové sítě

Jak již bylo řečeno, ideální neuronová síť dovoluje jednoznačně určit příští stav vnitřních svých neuronů na základě daného stavu všech neuronů — ve smyslu zákonů I, II, III.

Je-li n počet vstupních neuronů, m počet vnitřních neuronů, máme 2^n možností kombinací stavů vstupních neuronů, krátce: 2^n *vstupů* (rozumíme-li vstupem příslušnou n -člennou posloupnost nul a jednotek) — podobně 2^m současných stavů vnitřních neuronů, stručně: *vnitřních stavů* — a 2^{n+m} současných stavů všech neuronů sítě, stručně: *stavů sítě*.

Nechť $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n)$ ($\bar{\sigma}_i = 0, 1; i = 1, \dots, n$) je libovolný vstup v daném taktu t ; dále nechť $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ je libovolný vnitřní stav v témže taktu —

¹¹⁾ Uvažme však, že mohou být úlohy, při nichž toto stanovisko b) k času automatu je nutné — např. jestliže jsme studovali po jistý počet taktů práci neuronové sítě aniž bychom věděli jak dlouho (kolik taktů) již před tím síť běžela. — Zeela jiný pohled na věc by pak přinesla myslitelná možnost neuronové sítě s nerovnoměrně synchronizovaným (zrychlovaným) chodem, tj. se schopností uskutečnit nekonečně mnoho taktů práce v konečném čase.

a $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_m^*)$ je takto jednoznačně určený vnitřní stav v následujícím taktu $t + 1$. Pak celá činnost sítě se dá popsat globálně jedinou tzv. *charakteristickou* (Booleovskou¹²⁾) *funkcí* Φ o $m + n$ nezávisle a m závisle proměnných, tj.

$$\Phi(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \dots, \bar{\sigma}_n; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m) = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_m^*)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_i &= N_i(t) & (i = 1, \dots, n) & \text{ pro vstupní neurony } N_i \\ \sigma_j &= M_j(t) & (j = 1, \dots, m) & \\ \sigma_j^* &= M_j(t + 1) & (j = 1, \dots, m) & \end{aligned} \right\} \text{ pro vnitřní neurony } M_j$$

chceme-li pomocí Φ popsat činnost sítě).

Zkráceně lze psát $\Phi(\bar{\sigma}, \sigma) = \sigma^*$, anebo raději se dívat na charakteristickou funkci Φ jako na *jednoperametrický systém* $\Phi_{\bar{\sigma}}(\sigma)$ *funkcí* na „ m -rozměrných Booleovských vektorech“ σ s hodnotami rovněž takovými „vektory“ σ^* a s parametrem $\bar{\sigma}$, probíhajícími „ n -rozm. Booleovské vektory“ (vstupy)¹³⁾, jež označme po řadě ${}^1\bar{\sigma}, {}^2\bar{\sigma}, \dots, {}^r\bar{\sigma}; r = 2^n$. Pro zjednodušení psaní označme teď k -tou funkci charakteristického systému sítě, odpovídající k -tému vstupu ${}^k\bar{\sigma}$ jako $\Phi_k = \Phi_{{}^k\bar{\sigma}}$. Necht pak σ° je daný tzv. *počáteční vnitřní stav* (v čase $t = 0$) a necht postupně prošla posloupnost vstupů ${}^{k_0}\bar{\sigma}, {}^{k_1}\bar{\sigma}, {}^{k_2}\bar{\sigma}, \dots, {}^{k_p}\bar{\sigma}$. Pak výsledný vnitřní stav (v čase $p + 1$) σ jako hodnota složené funkce z funkcí char. soustavy sítě je dán takto:

$$\sigma = \Phi_{k_p} \Phi_{k_{p-1}} \dots \Phi_{k_1} \Phi_{k_0}(\sigma^\circ)$$

Každé posloupnosti $p + 1$ po sobě následujících vstupů (v taktech $0, 1, \dots, p$) čili $p + 1$ člennému podnětu čili *stimulu* tedy *odpovídá vzájemně jednoznačně „součin“* (ve smyslu *superposice*) $p + 1$ *funkcí charakteristické soustavy, převádějící počáteční vnitřní stav* σ° *ve vnitřní stav* σ *výsledný* (v taktu $p + 1$) — čili v tzv. *ozvu* (reakci) σ na daný *stimul* ${}^{k_0}\bar{\sigma}, {}^{k_1}\bar{\sigma}, \dots, {}^{k_p}\bar{\sigma}$. (Charakteristickou funkci soustavy možno ovšem (známe-li ji explicitně) úplně udat příslušnou tabulkou.)

Dvě sítě, mající též počet vstupních a též počet vnitřních neuronů, považujeme za ekvivalentní, mají-li shodné charakteristické funkce.

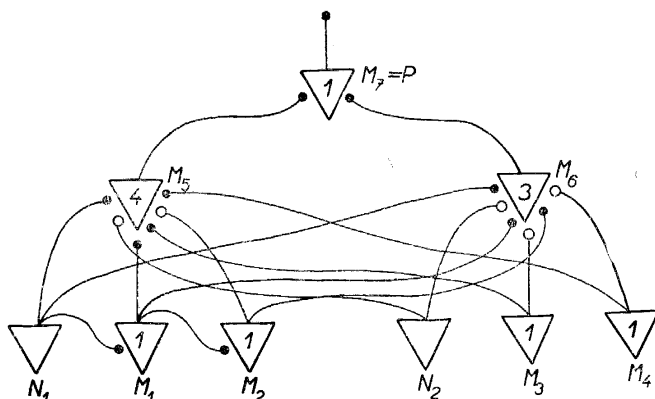
3.3 Schemata; ovládací Booleovské polynomy — analiza

Charakteristická funkce nedává dobrou představu o tom ani jak síť „vypadá“, ani jak funguje (jaké jsou vzájemné časové i prostorové závislosti neuronů

¹²⁾ Tzn. o hodnotách závisle i nezávisle proměnných omezených na čísla 0 a 1.

¹³⁾ Místo „Booleovských vektorů“ $\bar{\sigma}, \sigma, \sigma^*$ si můžeme myslet odpovídající celá nezáporná čísla v dvojkové soustavě, chceme-li; jejich pevné očíslování necht se vždy rozumí např. dle jejich velikostí. — Mohli bychom je však také považovat např. za prvky Galoisova konečného tělesa $GF(2^n)$ (resp. $GF(2^m)$); (viz v. d. Waerden. *Moderne Algebra I*, str. 121).

sítě). Tu je nejlépe užít (pokud to složitost dovoluje a pokud papír stačí¹⁴⁾) názorného strukturního schematu, do něhož kreslíme neurony jako stejné (zpravidla na vrchol postavené) rovnostranné trojúhelníky — do vnitřních neuronů vepisujeme prahovou funkci (resp. jen práh, je-li konstantní ve smyslu 1) v 2.2, sub. II shora); příslušné synapsi tlumící značíme prázdným, budící plným kolečkem, jež kreslíme zevně neuronu podél jeho dvou (dolních) stran, zatím co z třetí (horní) strany necháváme vycházet vlákna vedoucí k synapsím.



Obr. 2.

Je-li schéma úplně zakresleno, musí být možno z něho vyčíst i charakteristickou funkci (ovšem, že s přihlédnutím k výtčeným charakteristickým vlastnostem neuronové sítě); ta bude vždy jednoznačně určena schématem (i když ovšem při náhodném zakreslení schématu a volbě prahových funkcí bude třeba triviální, např. dávat samé 0 za hodnoty). Není těžké podat přesný důkaz jednoznačnosti určení charakteristické funkce pomocí schématu.

Stačí postup ukázat na příkladech. Budiž např. dáno následující poměrně jednoduché schéma sítě (obr. 2).

Sít má 2 vstupní neurony N_1 , N_2 a 7 vnitřních neuronů (o prazích 1, 1, 1, 1, 4, 3, 1) z nichž poslední $M_7 = P$ je zároveň výstupním. Sít nemá klíček, prahové funkce jsou Mc Cullochova typu 1) z 2.2 sub. II — (a zapsány jsou jen hodnoty excitačních prahů). Tabulku charakteristické funkce Φ (měla by $2^9 = 512$ řádků) vypisovat ovšem nebudeme. Spokojíme se se sestrojením jejich několika řádků. Čtenář si je laskavě zkontroluje dle schématu na str. 258.

Je vidět, jak se tabulka na základě schématu dělá. Chceme-li určit hodnotu např. pro $M_5(t + 1)$, bereme v úvahu pochopitelně pouze dvě věci: a) okolní neurony ku M_5 — to jsou N_1 , N_2 (oba vstupní) — a M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (vnitřní) —

¹⁴⁾ Schéma sítě centrální nervové soustavy člověka bychom nenakreslili (i kdybychom ho principiálně znali) vzhledem k počtu řádově 10^{10} nervových buněk (neuronů).

a		σ							σ						
$N_1(t)$	$N_2(t)$	$M_1(t)$	$M_2(t)$	$M_3(t)$	$M_4(t)$	$M_5(t)$	$M_6(t)$	$M_7(t)$	$M_1(t+1)$	$M_2(t+1)$	$M_3(t+1)$	$M_4(t+1)$	$M_5(t+1)$	$M_6(t+1)$	$M_7(t+1)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

a b) Prahovou funkci neuronu M_5 . Píšeme tedy např. u nás $M_5(t+1) = 0$ již automaticky jakmile jsme předpokládali $M_2(t) = 1$ nebo $N_2(t) = 1$ (vzhledem k absolutnímu tlumení byť i jediným tlumícím účinkem) — a dále píšeme $M_5(t+1) = 0$ již také jakmile jen není $N_1(t) = M_1(t) = M_3(t) = M_4(t) = 1$ (protože v tomto případě excitace nestačí).

Můžeme tedy vhodně rozbít tabulku pro Φ na několik dílčích tzv. ovládacích tabulek (pro složky funkce $\Phi(\sigma; \sigma)$, čili pro stavy jednotlivých vnitřních neuronů), udávajících tzv. funkce (bezprostředního) ovládání neuronů; každá bude zpravidla mít podstatně (oproti Φ) menší počet argumentů = počtu (bezprostředně ovlivňujících) okolních neuronů (ev. včetně neuronu daného v případě kličky, srov. později). — Přesto ještě i tyto tabulky jsou dosti nepřehledné a špatně se s nimi pracuje.

Zde však přichází na pomoc výrokový počet matematické logiky (Booleova algebra) a nahrazuje tabulku funkce bezprostředního ovládání přehledným „analytickým“ výrazem pro ni ve formě tzv. „výrokové funkce“¹⁵⁾ resp. Booleovského ovládacího polynomu. Přejít od schematu k ovládacímu polynomu lze totiž často provést přímo názorně, např. takto: naše schéma nám říká, že neuron M_5 v čase $t+1$ bude excitován tehdy a jen tehdy, budou-li zároveň v čase t excitovány neurony N_1, M_1, M_3, M_4 a nebude-li tehdy excitován ani (tlumící) neuron M_2 ani N_2 .

Tuto nutnou a postačující podmínku excitace M_5 do symboliky výrokového počtu okamžitě přepíšeme ve tvaru symbolického výroku

$$M_5(t+1) \equiv N_1(t) \& M_1(t) \& M_3(t) \& M_4(t) \& (\sim M_2(t)) \& (\sim N_2(t)), \quad (*)$$

¹⁵⁾ To není žádná funkce v matem. nýbrž v logickém smyslu. Definice pojmu „logická funkce“ zní takto: „Logická funkce“ je složený symbol, který nabývá svého významu v závislosti na tom, jakého významu nabývaly jisté dílčí symboly (tzv. logické nezávisle proměnné).

smluvivše se prostě (na chvíli bez ohledu na dřívější význam symbolů), že 1: symbolem tvaru $N_i(t)$ ($M_j(t)$) (i, j, t celá) systematicky zkracujeme větu „vstupní neuron i -tý je v čase t excitován“ („vnitřní neuron j -tý je v čase t excitován“); dále, že 2: znaku $\&$ užíváme pro spojení spojkou a (logické „a“) dvou vět — a 3: znaku \sim užíváme pro zápor (logické „non“) před větou; k tomu připojme ještě 4: znak \vee pro spojení dvou vět spojkou „nebo“ (bez vzájemného vylučování) a 5: znak \equiv pro „tehdy a jen tehdy“. (Psává se také: \cdot místo $\&$, $+$ místo \vee , $-$ místo \sim a $=$ místo \equiv , srov. např. Gavrilov, cit. v pozn. 7) („algebra reléově kontaktních schemat“.) — Nyní však můžeme přejít k tomuto dalšímu významu právě zavedených symbolů: Nechť znaky $N_i(t)$ ($M_j(t)$) opět znamenají čísla 0 nebo 1, čili jsou to číselné (Booleovské) proměnné (na oboru $\{0, 1\}$) — s dvěma indexy i, t resp. j, t — jako dříve. Nechť znak $\&$ značí nyní obyčejně „krát“ (násobení čísel); nechť je $\sim 1 = 0$, $\sim 0 = 1$ čímž je definován (pro čísla 0, 1) nový početní úkon, tzv. (Booleovská) inverse (doplňování); nechť také znak \vee nyní označuje nový početní úkon s čísly 0, 1, tzv. logický (Booleovský) „součet“, ve smyslu definice

$$0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1, \quad 0 \vee 0 = 0.$$

Nechť konečně znak \equiv (pro logickou ekvivalenci) má nyní nový význam rovnosti čísel. Pak náš symbolicky zapsaný výrok, udávající „kvalitativně“ nutnou a postačující podmínku stavu excitace daného neuronu na základě předpokládaného předchozího stavu okolních neuronů a ve smyslu užití prahové funkce — dostává význam rovnosti čísel. Vlevo stojí závisle proměnná (ukazující stav daného neuronu v čase $t + 1$ ¹⁶), vpravo stojí tzv. *ovládací Booleovský polynom*, jehož nezávisle proměnné udávají předpokládané stavy okolních neuronů v čase t . Tak např. bude podobně jako prve ovládací polynom pro neuron M_6 (vzhledem k jeho jednoduché prahové funkci rovněž jednoduchý)

$$M_6(t + 1) \equiv N_1(t) \& M_1(t) \& M_2(t) \& (\sim N_2(t)) \& (\sim M_3(t)) \& (\sim M_4(t))$$

a posléze také ovládací polynom pro výstupní neuron $P = M_7$ (vzhledem k jeho prahové funkci opět jednoduchý)

$$P(t + 2) \equiv M_5(t + 1) \vee M_6(t + 1).$$

Zbývá ještě připojit jednoduché rovnice („polynomy“) pro ovládání zbylých (v našem případě tzv. *zpoždovacích*) vnitřních neuronů sítě M_1, M_2 a M_3, M_4 :

$$\begin{aligned} M_1(t + 1) &\equiv N_1(t), & M_2(t + 1) &\equiv M_1(t), \\ M_3(t + 1) &\equiv N_2(t), & M_4(t + 1) &\equiv M_3(t). \end{aligned}$$

Poznámka: Čtenář učiní dobře, zkusí-li si vypsát ovládací polynomy neuronů M_5 a M_6 snížíme-li jejich exitační prahy o 1 (na 3, resp. 2) — a porovnat s předchozími.

¹⁶) Hodnota t je tu očividně lhostejná.

Takovým způsobem možno tedy nahradit tabulku charakteristické funkce, resp. jejich složek, zpravidla přehlednějšími ovládacími polynomy. Ve složitějších případech postup přímého vyčtení polynomu (jako nutné a postačující, ze schematu vyčtené podmínky excitace) je neschůdný nebo může snadno vést k chybám z přehlédnutí. Pak je lépe vyjít z tzv. úplné disjunktí (konjunktí)¹⁷⁾ normální formy ovládacího polynomu, jež je dána přímo tabulkou. — Popsané úvahy patří do tzv. *analýsy neuronových sítí*: tím se rozumí teoreticky, resp. i experimentálně podložený rozbor činnosti hotové (resp. navržené) sítě — co do vzájemných funkčních závislostí částí sítě a jejich schopností. (Experiment je třeba přibrat tehdy, je-li schéma příliš složité anebo neznámé, a je třeba o jeho struktuře a schopnostech se přesvědčit v praxi. — Sem patří vlastně např. také tzv. profylaktické vyšetřování (elektrických) automatů tím, že se jeho jednotlivým „jednotkám“ přivedou na vstupy jednoduché stimuly, na něž správné reakce (výsledky) jsou dobře známy, ev. se automaticky porovnávají s dosaženými — a signalisuje výsledek.

3.4 Náhradní reléově-kontaktní schéma

Stanovení ovládacích polynomů bývá také nejpohodlnějším (i když ne vždy optimálním) prostředkem, jak najít k danému schematu neuronové sítě jemu co do úlohy ekvivalentní (náhradní) schéma ventilové (diodové) nebo (jednodušeji) s obyčejnými elmg. relé. (Nezapomeňme, co bylo např. v § 2 poznamenáno pod čarou o rozdílnosti ve způsobu ovládnutí obyčejného relé (s jedním vinutím) — a neuronu.)

Postup je asi tento:

A) Ovládací polynom se převede v jakýkoli ekvivalentní tvar, v němž negace jsou pouze u samých proměnných (čehož lze bez újmy ekvivalence dosáhnout postupně pomocí Booleovských identit

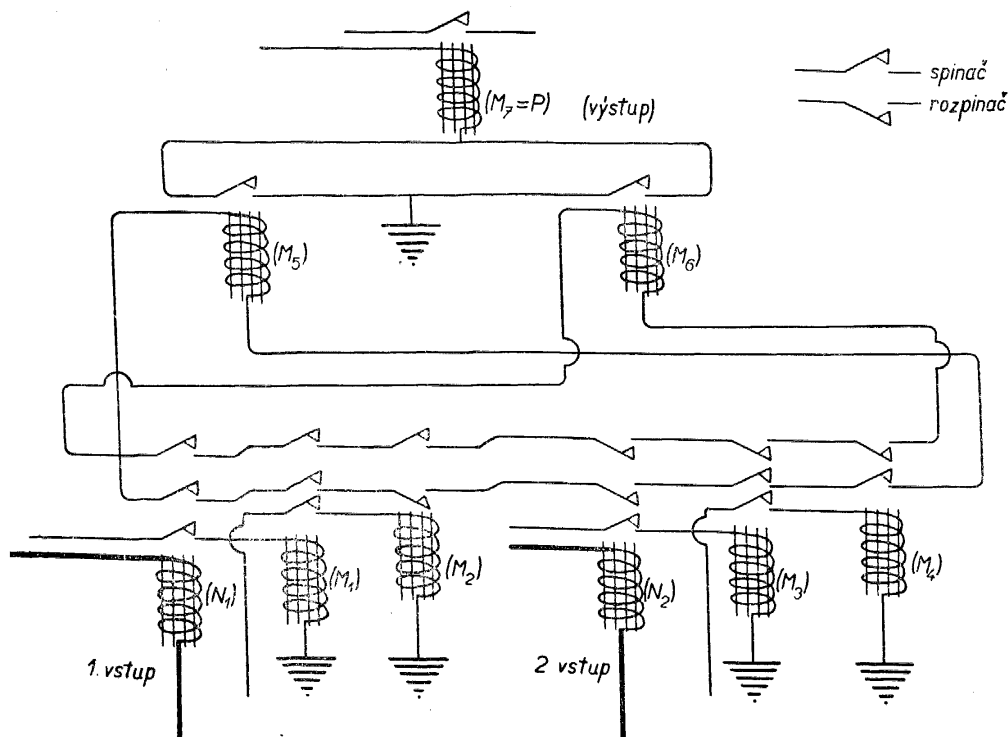
$$\sim(\sim x) \equiv x, \quad \sim(x \vee y) \equiv \sim x \& \sim y, \quad \sim(x \& y) \equiv \sim x \vee \sim y.$$

B) Tak upravený polynom odpovídá totiž vzájemně jednoznačně jistému serioparalelnímu zapojení spínačů a rozpinačů¹⁸⁾ tak, že každá proměnná každým jedním místem svého výskytu bez negace v ovládacím polynomu udá jeden spínač, ovládaný stejnojmenným relé, podobně každá proměnná každým jedním místem svého negovaného výskytu určí jeden rozpinač, každý výskyt spojky & (z vnitřku polynomu postupující) udává seriové, a každá spojka \vee paralelní zapojení doteků, resp. jejich (při postupu z vnitřku polynomu) již sestavených skupin (podschemat).

¹⁷⁾ Viz na př. autorovu knížku „O grupách a svazech“, Přírodovědecké vyd. (ČSAV), Praha 1951.

¹⁸⁾ Srov. Gavrilovu knihu, viz pozn. 7), např. str. 16 a dále. Do podrobností se tu pouštět nebudeme, je to již stranou našeho tématu; jde nám tu jen o objasnění vztahu mezi teorií neuronových a teorií reléově kontaktních schemat (jako podřízenou teorií).

C) Zbývá — pokud není příliš mnoho všech výskytů některé proměnné¹⁹⁾ (ve všech ovládacích polynomech vcelku) — nahradit každý neuron jedním obyčejným relé a zakreslit ovládání ve smyslu řečeného. Na obrázku 3 je zakresleno náhradní reléové kontaktní schéma pro právě uvažovanou neuronovou síť — ilustrující popsaný postup. (Pro ventilové schéma je postup podobný ale trochu složitější. Postup se také pochopitelně komplikuje se složitostí prahových funkcí.) — Obraťme se nyní k prvním krokům analýzy neuronových sítí s kličkami (které jsme zatím neuvažovali).



Obr. 3.

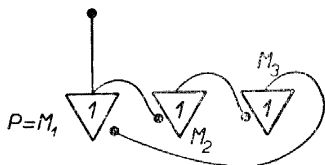
3.5 Jednoduché příklady neuronových sítí s kličkami (zpětnými vazbami); nutné a postačující podmínky excitace s logickými kvantory — pokračování v analýze

Dejme nyní několik prostých příkladů na schemata neuronových sítí s kličkami a na příslušné ovládací polynomy; při tom opět (pro jednoduchost) předpokládejme vesměs prahové funkce typu 1). (z § 2).

¹⁹⁾ Tj. pokud jedním relé stačíme technicky zvládnout příslušný počet doteků; ne-li, musíme užít více „ekvivalentních“ relé v sérii.

Na obr. 4 jde o příklad (díleční) sítě bez vstupních neuronů, tzn. kdyby měla být napojena na jinou síť, bylo by třeba vstupy přidat. Ovládací polynomy (psané s ohledem na synchronisaci) jsou

$$\begin{aligned} M_1(t+1) &\equiv N(t) \vee M_3(t), \\ M_2(t+2) &\equiv M_1(t+1), \\ M_3(t+3) &\equiv M_2(t+2). \end{aligned}$$

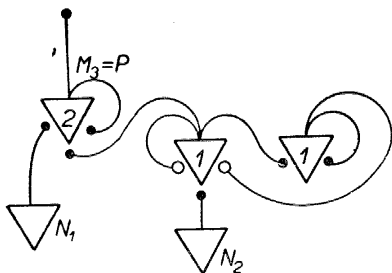


Obr. 4.

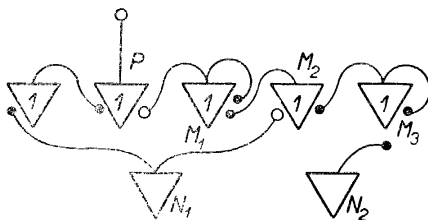
Představíme-li si dobře činnost schematu, vidíme, že např. za předpokladu počátečních podmínek $M_2(1) = M_3(1) = 0$, $M_1(1) = 1$ bude (pro $t \geq 0$) $M_1(t) = 1$ tehdy a jen tehdy, je-li $t \equiv 1 \pmod{3}$, tj. $t = 3k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Na dalším schematu obr. 5 N_2 má úlohu pomocného „zpožďovacího“ vstupního neuronu, který svou (prvou) excitací připraví síť k vykonávání její úlohy. Ovládací polynomy (s ohledem na synchronisaci) jsou zde tyto:

$$\begin{aligned} M_1(t+1) &\equiv N_2(t) \& \sim M_1(t) \& \sim M_2(t), \\ M_2(t+2) &\equiv M_1(t+1) \vee M_2(t+1), \\ M_3(t+3) &\equiv (N_1(t+2) \& M_1(t+2)) \vee (M_1(t+2) \& M_3(t+2)) \vee \\ &\quad \vee (M_3(t+2) \& N_1(t+1)). \end{aligned}$$



Obr. 5.



Obr. 6.

Představíme-li si náležitě činnost schematu, můžeme říci, že za předpokladu $N_2(0) = 1$, $N_1(0) = M_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$) pro $t > 0$ nastane $M_3(t+1) = = P(t+1) = 1$ tehdy a jen tehdy, když pro každé t' s $0 < t' \leq t$ bylo $N_1(t') = 1$. (Ústrojí v každý čas $t > 1$ udává, zda vstup N_1 byl neustále excitován.)

Chceme-li vystačit jen s neurony o prahu = 1 a bez samobuzeného výstupu, můžeme např. nahradit schéma obr. 5 následujícím schematem obr. 6 (jež bude mít jinou charakteristickou funkci a o jeden vnitřní neuron více, ale stav neuronu P v čase $t + 2$ bude ukazatelem (až na prodloužení zpoždění reakce

o 1 takt) téhož, jako prve, tj. toho, zda pro každé kladné $t' \leq t$ bylo $N_1(t') = 1$ či nikoli (za předpokladu $N_2(0) = 1$)).

Na posledním schematu si čtenář uvědomí nejnázorněji rozdíl mezi schopnostmi sítí bez kliček a s kličkami. Prvé mohou jen reagovat, zpožďovat a kombinovat čerstvě došlé a nepříliš zpožděné podněty na vstupech ve výslednou reakci. Naproti tomu sítě skličkami mají (v důsledku „zpětných vazeb“) navíc možnost si jednou došlý podnět na vstupu „pamatovat“ neomezenou dobu. Tak např. na obr. 5, předpokládejme opět $N_2(0) = 1$ a ostatní neurony v klidu jako počáteční stav.

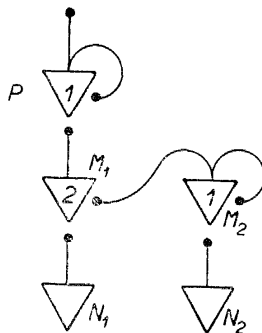
Pak každé podráždění na N_1 se (se zpožděním 1 taktu) přenáší v podráždění výstupního neuronu P — pokud se nepřetržitě opakuje od $t = 1$ počínaje. Jakmile však po prvé N_1 své podráždění vynechá, pak zatím co poslední excitace dochází do P , zruší se „blokování“ přestupního neuronu M_2 , přes něj přejde excitace z ustavičně (pro $t > 0$) samobuzeného neuronu M_3 na M_1 — M_1 si toto vynechá neuronu N_1 (se zpožděním 2) „navždy zapamatuje“ — a zároveň zařídí trvalé blokování výstupu P ; ten tedy po jediném vynechání excitace u N_1 už nikdy nemůže být excitován. Zároveň je tu vidět, že k symbolicko-logickému vyjádření hlavní úlohy sítě (závislosti stavu výstupu na všech předcházejících vstupech) musíme tu použít tzv. (ohraničeného) *logického kvantoru všeobecnosti* čímž překračujeme výrazové možnosti výrokového počtu — (tj. musíme užít tzv. predikátového počtu). Pišeme totiž

$$P(t+2) \equiv (t') ((0 < t' \leq t) \rightarrow N_1(t'))$$

a čteme (za počáteč. předpokladu $N_2(0) = 1$, $N_1(0) = M_j(0) = 0$, $j = 1, 2, 3$): Výstupní neuron P je v čase $t+2$ excitován tehdy a jen tehdy, když platí: pro každé t' , jestliže $0 < t' \leq t$, pak N_1 byl excitován v čase t' ; (čili: ... tehdy a jen tehdy, když N_1 byl v kladném čase stále excitován do času t včetně). — Chceme-li podobně sítě realizovat nutnou a postačující podmínku excitace výstupního neuronu tím, že vstupní neuron N_1 byl v nějakém kladném čase $t' \leq t$ excitován aspoň jednou, bude příslušná síť (obr. 7) jednodušší (čtenář si sám laskavě prověří její úlohu); k vyjádření nutné a postačující podmínky excitace výstupu pomocí všech předchozích vstupů budeme potřebovat *logický kvantor existence*. Pišeme pak:

$$P(t+2) \equiv \exists t' ((0 < t' \leq t) \& N_1(t'))$$

a čteme (za počát. předpokladu $N_2(0) = 1$, $N_1(0) = M_j(0) = 0$): Výstupní neuron $P = M_3$ je v čase $t+2$ excitován tehdy a jen tehdy, jestliže



Obr. 7.

aspoň jednou v kladném čase $t' \leq t$ byl excitován vstupní neuron N_1 (čili: tehdy a jen tehdy, jestliže existuje kladný čas t' menší nebo roven danému t tak, že $N_1(t') = 1$).

Upozornění: 1) Posléze uvedené symbolické formule pro vztah mezi stavy výstupů a vstupů (užívající logických kvantorů) jsou ovšem něco zcela jiného, než ovládací polynomy (které budou vždy náležet do výrokového počtu).

2) „Zpohotovací“ neuron N_2 je sice jen pomocný, ale prakticky důležitý vstupní neuron (i když jeho úloha počíná a končí s nultým taktem práce a dále na jeho stavu již nezáleží.) On dovoluje jednodušeji formulovat (a v praxi zaručit) vhodné počáteční podmínky práce sítě — ve tvaru N_2 je v čase 0 excitován, ostatní neurony sítě jsou v klidu. Kdybychom chtěli připouštět jiné (méně praktické) počáteční stavy, (v nichž by např. M_2 byl uvažován jako excitovaný) neuron N_2 bychom nepotřebovali.²⁰) Situace by se rovněž změnila (popřípadě co do počtu neuronů a struktury sítě zjednodušila) užitím jiných prahových funkcí. (Srov. také ostavec o hledání prahové funkce k danému ovládacímu polynomu níže.) Obecně tedy by počáteční stav mohl být (i u sítí s kličkami) nulový u všech neuronů (aniž by to omezovalo úlohu sítě).

3) Situace je u sítí všeobecně v podstatě obdobná, jako při formulaci závislosti řešení lineární diferencí rovnice s časovou nezávisle proměnnou na počátečních podmínkách. Při tom úloha může vést buďto na rovnici s časově konstantními koeficienty — což by odpovídalo u neuronových sítí situaci, v níž by se stavy vstupních neuronů (v počátečním čase dané) dále neměnily (po celou dobu práce sítě). Anebo úloha vede na diferencí rovnici, v níž je třeba koeficienty považovat za zásadně (libovolné) funkce času. To odpovídá skutečnému popisu chodu neuronové sítě, který je spoluurčován nějakou (předem neurčenou) závislostí stavů vstupních neuronů na čase. (Ostatně analogie s diferencími rovnicemi tu jde dosti daleko: „Synchronisovaný“ (viz doleji) systém ovládacích polynomů je vlastně systémem rekurencí mezi (Booleovskými) funkcemi a systém diferencí rovnic možno také považovat za systém rekurencí). Přitom ovšem — jak ještě uvidíme — nejde u sítí o explicitní udání řešení (závislosti stavu vnitřních neuronů sítě na čase), nýbrž o jakousi „kvalitativní teorii“ těchto řešení: o zkoumání vlastností těchto řešení v závislosti na vlastnostech časových závislostí „koeficientů“ = vstupů. Zdůrazněme, že vyjimečnost počáteční podmínky klidu všech neuronů (nulový počát. stav), která vedla Kleeneho k jeho složitým úvahám o počítání času u sítí s kličkami, pramení nejspíše, jak již řečeno, z apriorního omezení se

²⁰) Autorovi se jeví poněkud nejasnými s řečeným souvisící úvahy Kleeneho (srov. [A], zejm. str. 32—34 — a poznámku v § 2 tohoto čl.) týkající se „nekonečné“ minulosti sítě automatu. — Teoreticky vždy můžeme a prakticky musíme předpokládat znalost stavu sítě v čase t_0 obecně menším, než je „přítomný“ čas p , chceme-li vysvětlit (určit) chování sítě v čase p .

na prahové funkce Mc Cullochova typu. Při takovém omezení u sítí s kličkami je pak nulový počáteční stav „singulárním“ a často se musí vylučovat, neboť taková síť za takového stavu není schopna si např. zapamatovat ani to, že od počátku až do přítomného okamžiku vstupy byly vesměs v klidu; k zastání takové úlohy potřebuje být právě vybavena pomocným „zpothotovujícím“ neuronem (zaručujícím nenulový stav) a připojením nového počátku $t_0 (= 0)$ o jeden takt předcházejícího vlastní práci sítě.

3.6 Stimuly a reakce; událost a její reprezentace; analýza — pokračování

Soustava ovládacích polynomů (včetně „polynomů“ (rovností) zpoždovacích) dovoluje — za předpokladu znalosti jednak časového postupu stavů na vstupních neuronech (od 0 až do $t = p$), čili tzv. stimulu — a jednak počátečních podmínek, určit reakci na proběhlý stimul tj. určit stav vnitřních neuronů sítě v čase $t + z$ — tedy obecně s jistým zpožděním z stálým pro síť.

Je zřejmo, že daný výstup P sítě reaguje excitací jen na jisté stimuly, tj. na *stimuly jisté vlastnosti* (množiny), čili na uskutečnění jisté „události“. Mezi znaky takové *události*, čili *množiny stimulů*, může patřit i délka stimulu (= počet synchronně proběhlých stavů vstupních neuronů), resp. aritmetická vlastnost délky stimulu (viz schéma obr. 4).

Říkáme pak, že neuron P v dané síti se zpožděním z *reprezentuje událost* U (tj. množinu stimulů), jestliže platí: $P(p + z) = 1$ *tehdy a jen tehdy, když předchází* $p + 1$ -členný stimul ${}^{k_1}\bar{\sigma}, {}^{k_2}\bar{\sigma}, \dots, {}^{k_p}\bar{\sigma}$ *je prvkem v* U (viz 3.2).

Podívejme se např. jakého druhu událost reprezentuje síť na obr. 2. K tomu cíli vyjádříme závislost stavu výstupního neuronu $M_7 = P$ v čase $t + 2$, na stavech vstupních neuronů N_1, N_2 ze systému rekurencí (zde velmi jednoduchých), jež vlastně představují ovládací polynomy ve správné synchronisaci.

Píšeme proto (dosazující a postupující rekurentně v čase nazpět, což není nutný, nýbrž jen pro přehlednost zvolený postup)

$$\begin{aligned} P(t + 2) &\equiv M_5(t + 1) \vee M_6(t + 1) \equiv \\ &\equiv [N_1(t) \& M_1(t) \& M_3(t) \& M_4(t) \& \sim M_2(t) \& \sim N_2(t)] \vee \\ &\vee [N_1(t) \& M_1(t) \& M_2(t) \& \sim N_2(t) \& \sim M_3(t) \& \sim M_4(t)] \equiv \\ &\equiv [N_1(t) \& N_1(t - 1) \& N_2(t - 1) \& M_3(t - 1) \& \sim M_1(t - 1) \& \sim N_2(t - 1)] \vee \\ &\vee [N_1(t) \& N_1(t - 1) \& M_1(t - 1) \& \sim N_2(t) \& \sim N_2(t - 1) \& \sim M_3(t - 1)] \equiv \\ &\equiv [N_1(t) \& N_1(t - 1) \& N_2(t - 1) \& N_2(t - 2) \& \sim N_1(t - 2) \& \sim N_2(t)] \vee \\ &\vee [N_1(t) \& N_1(t - 1) \& N_1(t - 2) \& \sim N_2(t) \& \sim N_2(t - 1) \& \sim N_2(t - 2)]. \end{aligned}$$

Tím jsme (v normální disjunktční formě) vyjádřili nepřímé ovládnání výstupního neuronu P (v čase $t + 2$) pomocí stavů jen vstupních neuronů v časech $t, t - 1, t - 2$.

Z toho okamžitě vyčítáme, že k excitaci P v čase $t + 2$ dojde tehdy a jen tehdy, jestliže se na vstupních neuronech N_1, N_2 realizovala (v taktech $t - 2, t - 1, t$) událost v podobě jednoho z těchto dvou stimulů: $(0, 1), (1, 1), (10) = = {}^1\bar{\sigma}, {}^4\bar{\sigma}, {}^3\bar{\sigma}$ (z prvního „sčítance“), nebo stimulu $(10), (10), (10) = {}^3\bar{\sigma}, {}^3\bar{\sigma}, {}^3\bar{\sigma}$ (z druhého „sčítance“), kde vstupy ${}^i\bar{\sigma}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) jsme seřadili jako obvykle podle velikosti odpovídajících čísel v dvojkové soustavě. Tedy je $\mathbf{U} = \{{}^1\bar{\sigma}, {}^4\bar{\sigma}, {}^3\bar{\sigma}; {}^3\bar{\sigma}, {}^3\bar{\sigma}, {}^3\bar{\sigma}\}$ (má 2 prvky — jako množina).

Slovy: událost \mathbf{U} , kterou reprezentuje (na níž reaguje jako na uskutečněnou před dvěma takty) excitace výstupního neuronu P spočívá v tom, že buďto po tři poslední uvážené takty byl N_1 excitován a N_2 utlumen, anebo po útlumu N_1 následovala dvakrát excitace N_1 , zatím co po dvou excitacích N_2 následoval jeden útlum N_2 (a to bez ohledu na to, co se dělo dříve, protože to si síť nepamatuje) — za předpokladu nulových počátečních podmínek v čase $t - 3 = t_0$. (Aby bylo tedy jasno: není-li v čase $t + 2$ neuron P excitován, značí to buďto, že $t < 3$ (což samo o sobě vylučuje realizaci \mathbf{U}) anebo že $t \geq 3$, ale \mathbf{U} nenastalo).

Naskýtá se nyní základní otázka toho, cosítě bez klíček mohou a co nemohou dělat; přesněji: Jakého druhu události mohou reprezentovat (v řečeném smyslu) neuronové sítě bez klíček? — Odpověď (celkem snadnou) kterou podali vlastně již Mc Culloch a Pitts (viz [A], str. 15 — v citované klasické práci) — a přesněji Kleene (rovněž viz [A], str. 262) — zní takto:

Neuronové sítě bez klíček (vzhledem k tomu, že každá z nich po určité vždy stejné době l „zapomene“ co se dělo do té doby) jsou schopny reprezentovat ty a jen ty události (tzv. určité v terminologii Kleenově), o jejichž nastání, nebo nenastání rozhoduje určitý (pro danou událost pevný) počet l posledních sledovaných taktů na vstupu.

Poznámka. Kleene vylučuje takové tzv. nepositivní události, které nastávají m. j. i tehdy, když po všech l rozhodujících posledních taktů byly všechny vstupy utlumené. Toto omezení na tzv. události „positivní“ je nutné opět jenom když nepřipouštíme jiné prahové funkce, než ty nejjednodušší, jichž užívá Kleene; obecně je toto omezení zbytečné, neboť můžeme nepřítomnost tlumícího účinku na neuronu nechat projevit jeho excitací (při vhodné prahové funkci).

Analogická otázka reprezentovatelnosti událostí pro sítě s klíčkami je podstatně složitější. Ukážeme její řešení v posledním § 5. — a to na základě v abstraktní formě formulované MEDVEDĚVOVY teorie konečných automatů. Dříve se však věnujme v § 4 k tomu potřebné základní otázce syntesy neuronových sítí. — (První příklady na reprezentaci (tzv. neurčitých) událostí sítěmi s klíčkami jsme již uvedli). — Mj. půjde o to ukázat, že ke každé složce charakteristické funkce, považované za závislost stavu neuronu na předchozích stavech okolních neuronů, existuje a dá se (automatizovatelným) algoritmem jednoznačně stanovit vhodná prahová funkce a při-

slušná část sítě neuronu a okolních neuronů. Vzájemným napojením takových tzv. sítí bezprostředního ovládní již zásadně snadno²¹⁾ sestrojíme celou síť (schéma).

4. Synthesa sítě ze zadané charakteristické funkce

Základní úloha syntesy neuronové sítě jak již řečeno, zní: Budiž dána (zásadně tabulkou) funkce

$$\sigma^* = \Phi(\bar{\sigma}, \sigma),$$

$$\begin{aligned} \text{kde } \sigma^* &= (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_m^*), & (\sigma_i &= 0, 1 \text{ pro } i = 1, \dots, m), \\ \sigma &= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), & (\bar{\sigma}_j &= 0, 1 \text{ pro } j = 1, \dots, n), \\ \sigma &= (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m), & (\sigma_i &= 0, 1 \text{ pro } i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Hledá se neuronová síť (resp. její schéma), která má danou funkci Φ za svoji charakteristickou funkci.

Ukážeme algoritmické řešení této úlohy ve třech etapách

1. a) Z daného je jasné, že síť má mít n vstupních neuronů N_1, \dots, N_n a m vnitřních neuronů M_1, \dots, M_m . Budeme tedy klást (dle potřeby — viz § 2)

$$\left. \begin{aligned} N_j(t) &= \bar{\sigma}_j & \text{pro } j = 1, \dots, n, \\ M_i(t) &= \sigma_i \\ M_i(t+1) &= \sigma_i^* \end{aligned} \right\} \text{pro } i = 1, \dots, m$$

a pro libovolné t celé).

b) K libovolně zvolenému vnitřnímu i -tému neuronu ($1 \leq i \leq m$) najdeme okolní neurony a příslušnou ovládací funkci (závislost $M_i(t+1)$ na stavech okolních neuronů v čase t) takto:

I) Vynechme z tabulky pro Φ všech $m-1$ sloupců pod symboly $M_i(t+1)$ s $i' \neq i$. (Tabulka pak má 2^{m+n} řádek a $m+n+1$ sloupců.)

Ve výjimečném (triviálním) případě, když $M_i(t+1) \equiv 0$ (identicky), stačí za jediný k M_i okolní neuron považovat např. neuron N_1 a za prahovou funkci q_{M_i} vzít dostatečně velikou konstantu (píšme zatím $q_{M_i}(x) = \infty$ pro každé x).

Předpokládejme tedy $M_i(t+1) \not\equiv 0$.

II) Zvolme pevné j ($1 \leq j \leq n$), a najdeme všechny dvojice řádků (pokud jsou) tabulky, jež se shodují ve všech místech kromě místa j -tého. — Jestliže tyto dvojice řádků *nedávají* dohromady *všech* 2^{n+m} řádků (tj. nebude-li těchto dvojic 2^{n+m-1}), pak N_j je *okolním* neuronem ku M_i ; v *opačném případě jím není*, neboť pak změna stavu N_j nemá bezprostředně vlivu na stav neuronu M_i . — Není-li N_j okolní ku M_i , můžeme sloupec pod N_j v tabulce vynechat — a ze

²¹⁾ Ve skutečnosti to bude při větší složitosti úloha pro jinou neuronovou síť (automat).

změněných dvojic řádků vzít pak po jednom, takže tabulka bude mít pak jen 2^{m+n-1} řádků a $m+n$ sloupců. Na to opakujeme týž postup pro jiné j (v ev. zmenšené tabulce) — až do vyčerpání všech hodnot pro j .

Totéž provedeme také pro jednotlivé $M_i(t)$ (namísto $N_j(t)$) — až do vyčerpání všech $i = 1, 2, \dots, m$. Tím jsme zjistili všechny neurony, na jejichž stavu v čase t skutečně závisí stav neuronu M_i v čase $t+1$, tj. vskutku neurony okolní ku M_i .

Tabulka, která zůstala po všech redukcích, je tabulka ovládací funkce

$$M_i(t+1) = \Phi_i(N_r(t), \dots, N_s(t); M_u(t) \dots M_v(t))$$

neuronu M_i (bez fiktivních nezávisle proměnných.)

2) Označme si jako Q_k ($k = 1, 2, \dots, \bar{k}$,) k -tý z právě určených okolních neuronů k neuronu M_i — např. tak, že seřadíme dle stoupajícího indexu nejprve vstupní okolní, pak vnitřní okolní neurony.

Označme pak jako \tilde{x}_k počet tlumících, x_k počet budících synapsí, jež má neuron Q_k ($k = 1, 2, \dots, \bar{k}$) ovládat na M_i . Naši hlavní další úlohou jest A): rozhodnout, zda k dané ovládací funkci Φ_i existují celá nezáporná čísla \tilde{x}_k a x_k jakož i neklesající funkce φ nezáporného celého argumentu — tj. prahová funkce neuronu M_i s nezápornými hodnotami tak, aby bylo (v libovolné řádce tabulky).

$$\Phi_i(Q_1(t), \dots, \dots, Q_{\bar{k}}(t)) = 1$$

tehdy a jen tehdy, je-li (ve smyslu každé řádky tabulky pro Φ_i zvláště) splněná nerovnost (celkem $2^{\bar{k}}$ nerovností)

$$(*) \quad \varphi\left(\sum_{k=1}^{\bar{k}} Q_k(t) \cdot \tilde{x}_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\bar{k}} Q_k(t) \cdot x_k;$$

tak to totiž žádá zákon II excitačního prahu.

Otázku A) lze dosti snadno kladně zodpovědět takto:

1. Položme $\tilde{x}_{\bar{k}-j} = x_{\bar{k}-j} = 2^j$ pro $j = 0, 1, \dots, \bar{k}-1$.

2. Je-li $0 \leq s = 2^{j_1} + 2^{j_2} + \dots + 2^{j_r} < 2^{\bar{k}}$ ($0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r$) položme

$$\varphi(s) = s + \sim \Phi_i[s],$$

jestliže jsme označili jako $\Phi_i[s]$ hodnotu bezprostředně ovládací funkce v s -tém řádku tabulky (a jestliže jako prve $\sim 0 = 1$, $\sim 1 = 0$).

Pak zřejmě $\varphi(s)$ je neklesající (prahová) funkce a snadno lze i nahlédnout, že je

$$\varphi(s) = \varphi(\tilde{x}_{\bar{k}-j_1} + \tilde{x}_{\bar{k}-j_2} + \dots + \tilde{x}_{\bar{k}-j_r}) \begin{cases} \leq \\ > \end{cases} s = x_{\bar{k}-j_1} + \dots + x_{\bar{k}-j_r},$$

podle toho, je-li $\Phi_i[s] = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$.

Tedy právě určená čísla \tilde{x}_k a x_k lze vždy při právě definované prahové funkci φ neuronu M_i vzít za počet tlumících, resp. počet excitujících synapsí, jež na neuronu M_i ovládá okolní neuron Q_k ($k = 1, 2, \dots, \bar{k}$).

Právě určené řešení otázky A) je ovšem jen teoretické a pro praktickou syntézu se vzhledem k exponenciálnímu vzrůstu čísel \tilde{x}_k, x_k nehodí. Zaručujeme nicméně alespoň to, že po konečném počtu pokusů o co nejúspornější volbu čísel \tilde{x}_k, x_k a hodnot pro φ (aby např. součet čísel \tilde{x}_k a x_k byl co nejmenší) možno zásadně dospět k (optimálnímu) řešení, protože aspoň jedna volba hledaných čísel a prahová funkce existují vždy.

Pokusy o volbu hledaných hodnot možno ovšem dělat více méně systematicky. Nebudeme se zde zabývat blíže otázkami co nejvhodnějšího algoritmu této volby, ukážeme jen na příkladě, že volba může být provedena úsporněji, než jak by plynulo ze shora uvedeného teoreticky všeobecného řešení otázky A).

Budiž dána ovládací funkce Φ_3 neuronu M_3 (v závislosti na okolních neuronech M_1, M_2, M_3)²²⁾ např. tímto polynomem (a jeho tabulkou)

$$\begin{aligned} M_3(t+1) &= \Phi_3(M_1(t), M_2(t), M_3(t)) = \\ &= (M_1(t) \& \sim M_2(t)) \vee (M_2(t) \& M_3(t)) \vee (\sim M_1(t) \& \sim M_3(t)). \end{aligned}$$

	$M_1(t)$	$M_2(t)$	$M_3(t)$	$M_3(t+2)$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Vypište všech $2^3 = 8$ nerovností (*) pro $\varphi, \tilde{x}_k, x_k$ — tak, jak jsou postupně dány jednotlivými řádky tabulky:

²²⁾ Půjde tedy o ovládací síť s klíčkou u M_3 , vzhledem k tomu, že M_3 je sám k sobě okolní.

- (0) $\varphi(0) \leq 0$ (protože $\Phi_3(0, 0, 0) = 1$)
- (1) $\varphi(\tilde{x}_3) > x_3$ (protože $\Phi_3(0, 0, 1) = 0$)
- (2) $\varphi(\tilde{x}_2) \leq x_2$ (atp.)
- (3) $\varphi(\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3) \leq x_2 + x_3$
- (4) $\varphi(\tilde{x}_1) \leq x_1$
- (5) $\varphi(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_3) \leq x_1 + x_3$
- (6) $\varphi(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) > x_1 + x_2$
- (7) $\varphi(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3) \leq x_1 + x_2 + x_3$

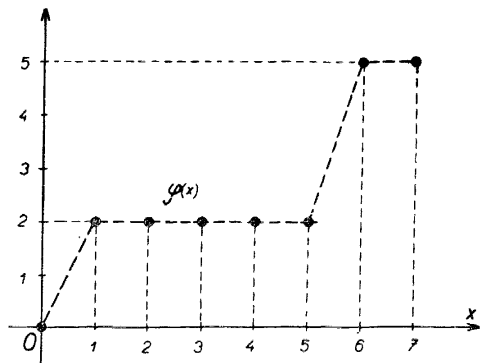
Podle (0) je především $\varphi(0) = 0$.

Položme $\tilde{x}_3 = 1^{23}$. Má být $\varphi(1) > x_3$ dle (1). Položme tedy $x_3 = 1$, $\varphi(1) = 2$, aby tomu bylo vyhověno. Položme $\tilde{x}_2 = 2$ (protože argumenty 0 a 1 jsou již zadány). Pak má být $\varphi(2) \leq x_2$ dle (2) a $\varphi(3) \leq 2 + x_2$ dle (3) — (vzhledem k již stanovenému).

Protože $\varphi(2) \geq 2$, stačí patrně položit $x_2 = 2$, $\varphi(2) = \varphi(3) = 2$. Položíme $\tilde{x}_1 = 4$ (protože argumenty 0, 1, 2, 3 = 1 + 2 pro φ jsou již zadány).

Pak má být

- $\varphi(4) \leq x_1$ dle (4),
- $\varphi(5) \leq 1 + x_1$ dle (5),
- $\varphi(6) > 2 + x_1$ dle (6),
- $\varphi(7) \leq 3 + x_1$ dle (7).



Obr. 9.

Protože $\varphi(4) \geq 2$, stačí položit $x_1 = 2$, $\varphi(4) = \varphi(5) = 2$; dále však klademe patrně $\varphi(6) = 5 (= 2 + 2 + 1) = \varphi(7)$. Tím jsou určeny počty tlumících i budičích synapsí, ovládaných neuronu M_1 , M_2 , M_3 (okolními k M_3) a přílehlých k M_3 — jakož i prahová funkce $\varphi = \varphi_{M_3}$ (v dostatečném

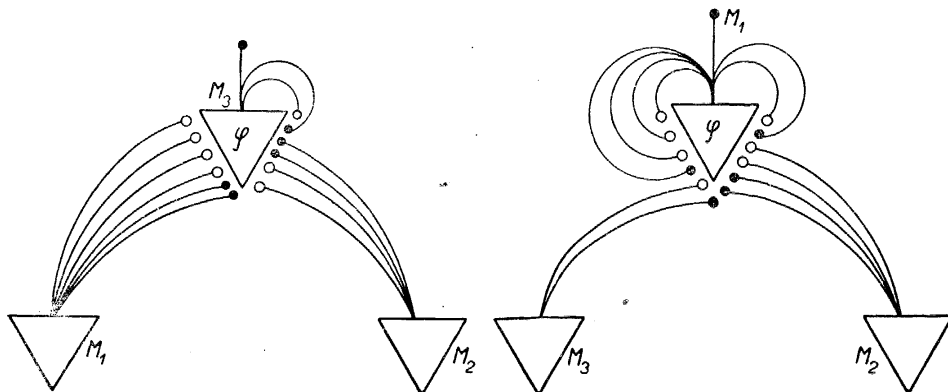
rozsahu viz obr. 9) tak, aby ovládnání M_3 pomocí M_1 , M_2 , M_3 se dělo dle dané funkce Φ_3 .

Dílčí síť naší sítě, tj. ovládací síť neuronu M_3 (v níž jsou M_1 , M_2 relativně vstupní) vypadá tedy dle obr. 8.

Poznámka: Začínáme s \tilde{x}_i , jde-li nám o ovládnání neuronu M_i . To není nutné, ale zamezuje to zbytečným klíčkám. Mohli bychom však právě tak dobře položit $M_1(t+1)$ namísto $M_3(t+1)$ a dostali bychom ovládací síť na obr. 10 pro M_1 .

²³⁾ Položit \tilde{x}_i (resp. x_i) = 0 obecně nelze jak z početních, tak i z věcných důvodů (znamená to předpokládat, že i -tý okolní neuron neúčinkuje vůbec na daný neuron tlumivě (excitačně), což předem nevíme — a obecně tomu tak nebude).

3) Když již takto dovedeme (algoritmicky)²⁴ určit každou dílčí síť bezprostředního ovládní, je principiálně snadné sestavit celou síť. Prostě si zakreslíme všechny neurony předem — a doplňujeme již jen spoje a synapse, vyznačující pro každý neuron (kromě vstupních) jeho ovládní okolními neurony v právě uvažovaném smyslu.



Obr. 8.

Obr. 10.

Tím je tedy podáno principiální (ovšem zpravidla nepraktické) řešení problému synthesy neuronové sítě — jestliže připustíme obecné prahové funkce. — Kdybychom se omezili např. na prahové funkce typu 1) (Mc Cullochovy), bylo by sice možné sestavit náhradní schéma pro síť (representovala by danou událost, viz dále), ale toto náhradní schéma by si vyžádalo obecně dalších (pomocných vnitřních) neuronů.

5. Třída representovatelných událostí

Po této přípravě jsme s to zformulovat nakonec jeden ze základních výsledků²⁵ teorie (konečných) neuronových sítí, tj. určení druhu událostí, jež vůbec mohou být representovány vhodnou neuronovou sítí. (Je jasné, že to nejsou všechny události, neboť je jich 2^{\aleph_0} , zatím co existuje jen \aleph_0 neuronových sítí.) Jde tedy v tomto smyslu o zásadní vymezení schopností konečných neuronových sítí.

²⁴) Existují různé další požadavky sledující složitější algoritmy.

²⁵) Výsledek v exaktní, ale dosti nepřehledné původní formulaci — a s nepříjemným omezením prahových funkcí na funkce typu 1) — pochází od Kleencho (viz [A], str. 41). V abstraktní přehledné formě, ale bez přímého vztahu k realizovatelnosti události neuronovou sítí, byl podobný výsledek získán Medveděvem (srov. Ю. Т. Медведев, О классе событий, допускающих представление в конечном автомате, [A], стр. 385).

1) Nazveme podle Medveděva *elementárními* tyto události:

I. Stimul trval 1 takt ($p = 0$).

II. Stimul trval 2 takty ($p = 1$).

III. Stimul byl zakončen v čase p předepsaným vstupem (= stavem vstupních neuronů) $\bar{\sigma}$. (Těchto elementárních událostí je tedy 2^n při n vstupech — ke každému $\bar{\sigma}$ jedna).

IV. Stimul trval 1 takt, anebo v předposledním taktu se objevil předepsaný vstup $\bar{\sigma}$. (Také těchto elementárních událostí je 2^n — ke každému $\bar{\sigma}$ jedna).

2) Nazveme dále *elementárními operacemi s událostmi* tyto (matematické) operace:

a) Množinové sjednocení konečně mnoha událostí.

b) Množinový průnik konečně mnoha událostí.

c) Množinový doplněk události.

d) „Zevšeobecnění“ události U , tj. vytvoření události $U^* = (t)_{t \leq p} U$, která v čase p nastává tehdy a jen tehdy, když v každém $t \leq p$ nastala událost U .

e) „Existence“ události U , tj. vytvoření události $U = \exists t_{t \leq p} U$, která v čase p nastává tehdy a jen tehdy, když aspoň v jednom čase $t \leq p$ nastala událost U .

f) „Substituce do události“ U , tj. při daných dvou vchodech $\bar{\sigma}$ a $\bar{\sigma}'$ vytvoření události $U = [\bar{\sigma}' \rightarrow \bar{\sigma}] U$, která se v čase p uskutečňuje právě a jen těmi $p + 1$ -člennými stimuly S k nimž existuje $p + 1$ -členný stimul S' takový, že

(I) S' je uskutečněním U ($\equiv S' \in U$);

(II) náhradou každého vstupu $\bar{\sigma}'$ vstupem $\bar{\sigma}$ v S' vznikne stimul S . (Operací sub f) je tedy $(2^n)^2 - 2^n = 2^n(2^n - 1)$.)

3) Nazveme *regulární* událost, která buďto je sama *elementární* anebo se dá získat z *elementárních událostí aplikací konečně mnoha elementárních operací*.

4) Nazveme událost U *representovatelnou v neuronové síti Σ o charakteristické funkci Φ* , jestliže existuje:

a) počáteční stav σ_0 sítě Σ ;

b) množina vnitřních stavů \mathfrak{M}_0 (součas. stavů vnitřních neuronů) tak, že platí: Jest $(\bar{\sigma}_0, \bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_p) \in U$ tehdy a jen tehdy, když $\Phi_{\sigma_p} \Phi_{\sigma_{p-1}} \dots \Phi_{\sigma_1} \Phi_{\sigma_0}(\sigma_0) \in \mathfrak{M}_0$ (ve smyslu superposice = tvoření složené funkce). (Poznámka: množinu stavů \mathfrak{M}_0 možno nahradit za pomoci dodatečných neuronů stavem jediného výstupního neuronu, který bude excitován tehdy a jen tehdy, byla-li 2 takty předtím síť v některém ze stavů množiny \mathfrak{M}_0 .)

Medveděv dokázal větu: *Událost U je representovatelná (v nějaké neuronové síti Σ) tehdy a jen tehdy, když je to událost regulární.*

Ve skutečnosti pokud jde o síť, Medveděv vyslovil a dokázal méně (srov. [A]) neboť pracuje vlastně jen s charakteristickými funkcemi, (viz

jeho abstraktní pojetí automatu) — a nikoli se samotnými sítěmi (schematy). Avšak výsledek, odvozený v § 4, dovoluje vyslovit jeho větu v naší formulaci²⁶⁾.

Naproti tomu tím, že se u Medveděva prokazují „stejné schopnosti“ všech druhů konečných automatů (v Medveděvově smyslu), mezi něž např. patří i Turingův stroj s konečnou páskou (viz [A], str. 387) dokázal Medveděv více²⁶⁾ (srov. [A]).

Na závěr ukažme Kleeneho jednoduchý příklad události, která není regulární (a nedá se tedy k její reprezentaci sestrojít neuronová síť.)

Označme jako $U^{(2)}$ událost, která nastane tehdy a jen tehdy, když poslední takt stimulu ($p + 1$ -tý) je kvadrátem celého čísla ($1 + p = r^2$ pro vhodné r celé kladné).

Předpokládejme, že σ_0 je počáteční stav a $\mathfrak{M}_0 = \{^1\sigma^*, \dots, ^u\sigma^*\}$ je množina reprezentující $U^{(2)}$ v jisté síti Σ s n vstupními neurony a m vnitřními neurony.

$U^{(2)}$ musí pak nastávat, mimo jiné, když počáteční stav σ_0 na vstupních neuronech se nebude měnit (měnit se budou jen vnitřní stavy) — a to pro každé $1 + p = r^2$. Avšak potom jakmile $(r + 1)^2 - r^2 - 1 = 2r$ bude dosti veliký interval mezi dvěma po sobě jdoucími kvadráty — musí vzhledem ke konečnému počtu všech vnitřních stavů sítě uvnitř tohoto časového intervalu projít aspoň jedna celá perioda ve sledu vnitřních stavů $\sigma^* \neq ^j\sigma^*$ ($j = 1, \dots, u$) (nepatřících do \mathfrak{M}_0), která se pak již opakuje stále — takže pak už nikdy nedojde ke stavu z \mathfrak{M}_0 , tj. k žádané reakci na kvadrátovost délky trvání stimulu.

Резюме

О ТЕОРИИ НЕРВНЫХ СЕТЕЙ

ЛАДИСЛАВ РИГЕР (Ladislav Rieger)

(Поступило в редакцию 26/II 1958 г.)

Статья содержит критический обзор по нескольким основным вопросам математической и логической теории т. н. нервных сетей (в смысле сборника „Автоматы“, перевод с английского, Изд. ин. лит., Москва 1956).

²⁶⁾ Medveděvova abstraktní metoda a pojetí jsou jasné a elegantní. Ale co do aplikací na sítě je Medveděv skoupý na slovo. Celou souvislost se sítěmi odbývá těmito slovy (str. 385 v [A]): „Мы не стремились при этом к подробному анализу связи общих и более специальных понятий. Читателю сборника не представит труда обнаружение этой связи в каждом случае“. Toto Medveděvovo obecné empirické tvrzení možno experimentálně vyvrátit.

Bude dále zapotřebí (právě tak jako v případě sítí) se podrobněji zabývat blíže konkretisací vztahu Medveděvovy teorie k Turingovým strojům, jež rovněž spadají pod abstraktní pojem Medveděvova automatu. To bude úkolem jiného článku.

Особенное внимание уделено эмпирическим предпосылкам математической теории закономерности органических и анорганических нервных сетей. Далее, внимание уделяется и вопросам анализа нервных сетей и построению заменяющей релейно-контактной схемы. Вопрос синтеза рассмотрен в следующем смысле: Предположим, что состояние внутренних нейронов дано (в виде таблицы) как функция предыдущих состояний всех нейронов сети. Требуется найти схему сети (не изменяя количества нейронов).

Решение дается в виде простых формул ведущих от таблицы к схеме. При этом пользуемся пороговой функцией (в смысле Дж. Неймана).

Таким образом пока абстрактное определение и теорема Медведева о представимости событий в конечном автомате (см. „автоматы“, Добавление II) получает точный смысл и для нервных сетей.

Summary

ON THE THEORY OF THE NEURAL NETS

LADISLAV RIEGER

(Received 26 February 1958.)

A critical survey is given of some fundamental questions concerning the mathematical and logical theory of the s. c. neural nets (in the sense of the collection of papers "Automata Studies", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956).

Special emphasis is put on the empirical assumptions (laws) of organical and anorganical nets, and on the examination of their degree of schematisation by means of the recent mathematical formulation.

The question of analysis and of the substitute relay scheme are mentioned. Synthesis of nets is treated in the following sense: Given 1. the number of the outer and of the inner neurons, and 2. the full dependence of the present "states" of the inner neurons on the preceding "states" of all the neurons of the net in question (in table form); find the scheme itself. — A positive solution of this synthesis problem is exhibited — and illustrated by an example; the general form of the excitation condition of an inner neuron in terms of a nondecreasing threshold function (in the sense) of v. Neumann (see Automata Studies, loc. cit.) is adopted, and the mentioned solution constructs this threshold function also — (to the needed extent).

On this basis, the characterisation of "representable (by neural nets) events" is immediately reduced to the abstract theory of automata of Medvedyeff (see the Russian translation of "Automata Studies", as „Автоматы“, Изд. пш. лит., Москва 1956, Добавление II).