Aplikace matematiky

Zdenka Groschaftová

O konvergenci metody sítí při řešení Dirichletova problému a problému vedení tepla

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 5, 342–360

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102585`

O KONVERGENCI METODY SÍTÍ PŘI ŘEŠENÍ DIRICHLETOVA PROBLÉMU A PROBLÉMU VEDENÍ TEPLA

ZDENKA GROSCHAFTOVÁ

(Došlo dne 19. ledna 1957.) DT: 536.2.01

V článku se popisuje odhad chyby při řešení Dirichletova problému metodou sítí pro Laplaceovu rovnici na obdélníku v závislosti na okrajových podmínkách a pro homogenní rovnici pro vedení tepla na konečné tyči v závislosti na počáteční podmínce. Určují se postačující podmínky pro maximální rychlost konvergence, t. j. $0(h^2)$. U rovnice pro vedení tepla se studuje také případ rychlosti konvergence $0(h^4)$.

I. Úvod

Řešíme-li Dirichletův problém metodou sítí, víme, že mají-li okrajové funkce omezené čtvrté derivace, pak chyba, jíž se dopustíme proti přesnému řešení, je řádu h^2, kde h je velikost oka zvolené sítě ([3]). Odhadem této chyby pro Dirichletův problém na obdélníku se dále zabývali na př. WALSH a YOUNG ([2]), kteří docílili nejsilnějších výsledků, které jsme v literatuře nalezli. Dokázali, že chyba při síťovém řešení je řádu h^2 již za předpokladu, že třetí derivace okrajových funkcí jsou omezené.

Metodou, jíž se užívá v tomto článku, se dosahuje ještě silnějších výsledků, a to, že síťové řešení konverguje k přesnému jako h^2 uvnitř daného obdélníku za předpokladu, že první derivace okrajových funkcí mají konečnou variaci a že tato konvergence je stejnoměrná na uzávěru daného obdélníku za předpokladu, že druhé derivace okrajových funkcí mají konečnou variaci.

II. Grinbergova metoda přesného řešení Dirichletova problému

Metoda přesného řešení Dirichletova problému, jejíž síťovou analogií se budeme zabývat, je vzata z GRINBERGOVY knihy [1]. Je společná pro řešení okrajových úloh na obdélníku s okrajovými podmínkami tvaru $\alpha u + \beta \dfrac{\partial u}{\partial n} = f$, kde α, β jsou konstanty, u je řešení dané úlohy, f daná funkce na všech stranách obdélníka. Popíšeme stručně tuto metodu pro Dirichletův problém a Laplaceovu rovnici.

Nechť je dána Laplaceova rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2,1}$$

se spojitými okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \psi_1(y) \qquad & u(x, 0) &= F_1(x) \\ u(a, y) &= \psi_2(y) \qquad & u(x, b) &= F_2(x) \end{aligned} \tag{2,2}$$

na obdélníku: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

Hledejme řešení u této úlohy ve tvaru Fourierovy řady

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad u_n(x) = u_n = \frac{2}{b} \int_0^b u \sin \frac{n\pi y}{b} \, \mathrm{d}y \, . \tag{2,3}$$

Tento vzorec ovšem nedává hodnoty řešení našeho problému pro $y = 0$, $y = b$, ale tyto hodnoty známe z okrajových podmínek.

Budeme hledat koeficienty u_n.

Znásobíme Laplaceovu rovnici (2,1) funkcí $\frac{2}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$ a výsledek zintegrujeme podle y od 0 do b. Zintegrujeme-li nyní takto získanou rovnici dvakrát per partes a dosadíme výraz (2,3) pro koeficienty u_n, dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro tyto koeficienty. Členy, v nichž se vyskytují neznámé derivace okrajových funkcí, vypadnou díky tomu, že funkce, kterou jsme rovnici (2,1) násobili, je rovna nule na koncích intervalu $\langle 0, b \rangle$.

Diferenciální rovnice pro u_n má tvar

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 u_n = \frac{2n\pi}{b^2} \left[(-1)^n F_2(x) - F_1(x)\right] \tag{2,4}$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u_n(0) &= \frac{2}{b} \int_0^b \psi_1(y) \sin \frac{n\pi y}{b} \, \mathrm{d}y = a_{1n} \\ u_n(a) &= \frac{2}{b} \int_0^b \psi_2(y) \sin \frac{n\pi y}{b} \, \mathrm{d}y = a_{2n} \end{aligned} \tag{2,5}$$

Pro zjednodušení položme $F_1(x) = F_2(x) = 0$; $\psi_1(0) = \psi_1(b) = \psi_2(0) = = \psi_2(b) = 0$.

Poznámka. Toto zjednodušení nebude na újmu obecnosti. Kdybychom totiž neměli na dvou protilehlých stranách obdélníka nuly, převedli bychom tento případ na předcházející takto:

Nechť okrajové podmínky jsou spojité v rozích našeho obdélníka. Okrajovou funkci označme $f(x, y)$.

Řešení u si rozdělme na dvě části: $u = u_1 + u_2$, kde u_2 je řešení našeho problému s lineární okrajovou funkcí

$$f_2(x, y) = f(0, 0) + \frac{f(a, 0) - f(0, 0)}{a} \cdot x + \frac{f(0, b) - f(0, 0)}{b} \cdot y + \\ + \frac{f(a, b) + f(0, 0) - f(0, b) - f(a, 0)}{ab} \cdot xy \,.$$

Zřejmě v rozích je f_2 rovno f.

Označme si síťové řešení U a rozdělme si je stejně na U_1 a U_2. Jest $U_2 = u_2$, protože okrajové podmínky jsou lineární funkce.

Tedy

$$U - u = U_1 - u_1 \,.$$

Ale řešení u_1 má okrajové podmínky, které mají ve všech rozích nuly, tedy $u_1 = u_1^1 + u_1^2$, kde v okrajových funkcích vždy na dvou protilehlých stranách jsou nuly, což je právě případ, kterým se budeme zabývat. Tedy všechny naše výsledky budou platit pro případ, že okrajové podmínky jsou spojité ve všech rozích obdélníka.

Rovnice (2,4) přejde v

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 u_n = 0 \tag{2,4'}$$

se stejnými okrajovými podmínkami (2,5).

Označme

$$L_n^0 = \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \,, \quad M_n^0 = \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b} (a - x)}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \,.$$

Potom řešení rovnice (2,4′) má tvar

$$u_n = L_n^0 a_{2n} + M_n^0 a_{1n} \tag{2,6}$$

takže

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (L_n^0 a_{2n} + M_n^0 a_{1n}) \sin \frac{n\pi y}{b} \,.$$

III. Síťová analogie Grinbergovy metody

Proveďme síťovou analogii této metody.

Budiž $a > 0$, $b > 0$, $\frac{a}{b}$ racionální. Zvolíme čtvercovou síť s velikostí oka h

$\left(\frac{a}{h}, \frac{b}{h}\text{ celá}\right)$ a budeme zkoumat, za jakých podmínek bude síťové řešení konvergovat k přesnému jako h^2.

Nechť je dána síťová analogie Laplaceovy rovnice

$$U_{x\bar{x}} + U_{y\bar{y}} = 0 \tag{3,1}$$

$$\left[U_{x\bar{x}} = \frac{U(x_{j+1}, y_i) - 2U(x_j, y_i) + U(x_{j-1}, y_i)}{h^2}\right.$$

$$\left.U_{y\bar{y}} = \frac{U(x_j, y_{i+1}) - 2U(x_j, y_i) + U(x_j, y_{i-1})}{h^2}\right]$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} U(0, y_i) &= \psi_1(y_i) \qquad & U(x_j, 0) &= 0 \\ U(a, y_i) &= \psi_2(y_i) \qquad & U(x_j, b) &= 0 \end{aligned} \tag{3,2}$$

na obdélníku

$$x_j = j \,.\, h \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \frac{a}{h}$$

$$y_i = i \,.\, h \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \frac{b}{h}\,.$$

Řešení $U(x_j, y_i)$ budeme hledat ve tvaru

$$U(x_j, y_i) = \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} U_n(x_j) \sin \frac{n\pi y_i}{b}\,; \tag{3,3}$$

takže

$$U_n(x_j) = \frac{2h}{b} \sum_{i=1}^{\frac{b}{h}-1} U(x_j, y_i) \,.\, \sin \frac{n\pi y_i}{b} = \frac{2h}{b} \sum_{i=0}^{\frac{b}{h}} U(x_j, y_i) \sin \frac{n\pi y_i}{b}\,, \tag{3,4}$$

neboť podle známého vzorce

$$\sum_{i=1}^{p} \cos iz = \frac{\sin \frac{2p+1}{2} z - \sin \frac{z}{2}}{2 \sin \frac{z}{2}} \tag{a}$$

platného pro $\sin \frac{z}{2} \neq 0$, je pro $1 \leq i \leq \frac{b}{h} - 1$

$$\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}} \sin^2 \frac{n\pi y_i}{b} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{b}{h}} \left(1 - \cos \frac{2n\pi hi}{b}\right) = \frac{b}{2h}\,.$$

Podobně jako u přesného řešení znásobíme rovnici (3,1) funkcí $\frac{2h}{b} \sin \frac{n\pi y_i}{b}$ a sečteme podle i od 1 do $\frac{b}{h} - 1$:

$$\frac{2h}{b}\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}-1} U_{x\bar{x}} \sin\frac{n\pi y_i}{b} + \frac{2h}{b}\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}-1} U_{y\bar{y}} \sin\frac{n\pi y_i}{b} = 0 .$$

První člen levé strany této rovnice je roven $(U_n)_{x\bar{x}}$. Druhý člen upravíme podle vzorce

$$\sum_{i=1}^{p-1}(a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1})\, b_i = \sum_{i=1}^{p-1} a_i(b_{i+1} - 2b_i + b_{i-1}) ,$$

platného pro $a_0 = a_p = b_0 = b_p = 0$ a dostaneme

$$\frac{2h}{b}\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}-1} U_{y\bar{y}} \sin\frac{n\pi y_i}{b} = \frac{2\left(\cos\frac{n\pi h}{b} - 1\right)}{h^2}\, U_n(x_j) .$$

Tedy dostáváme obyčejnou diferenční rovnici pro U_n ve tvaru

$$(U_n)_{x\bar{x}} + \frac{2\left(\cos\frac{n\pi h}{b} - 1\right)}{h^2}\, U_n = 0 \tag{3,5}$$

s okrajovými podmínkami

$$U_n(0) = \frac{2h}{b}\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}-1} \psi_1(y_i) \sin\frac{n\pi y_i}{b} = A_{1n}$$

$$U_n(a) = \frac{2h}{b}\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}-1} \psi_2(y_i) \sin\frac{n\pi y_i}{b} = A_{2n} . \tag{3,6}$$

Budeme hledat řešení rovnice (3,5) ve tvaru $C_1\lambda_n^{\frac{x}{h}} + C_2\lambda_n^{-\frac{x}{h}}$, kde C_1, C_2 jsou konstanty, které určíme z okrajových podmínek.

Charakteristická rovnice pro λ_n má tvar

$$\lambda_n^2 + (p_n h^2 - 2)\,\lambda_n + 1 = 0 , \quad \text{kde} \quad p_n = \frac{2\left(\cos\frac{n\pi h}{b} - 1\right)}{h^2} .$$

Její řešení je

$$\lambda_n = 1 + 2\sin\frac{n\pi h}{2b}\left(\sin\frac{n\pi h}{2b} + \sqrt{\sin^2\frac{n\pi h}{2b} + 1}\right) ,$$

$$\lambda_n^{-1} = 1 + 2\sin\frac{n\pi h}{2b}\left(\sin\frac{n\pi h}{2b} - \sqrt{\sin^2\frac{n\pi h}{2b} - 1}\right) .$$

Máme tedy obecné řešení rovnice (3,5)

$$U_n = C_1\lambda_n^{\frac{x}{h}} + C_2\lambda_n^{-\frac{x}{h}} .$$

Konstanty vypočteme pomocí determinantu soustavy. Musí platit:

$$\begin{vmatrix} U_n & \lambda_n^{\frac{x}{h}} & \lambda_n^{-\frac{x}{h}} \\ \frac{2h}{b} \sum \psi_1 \sin \frac{n\pi y_i}{b} & 1 & 1 \\ \frac{2h}{b} \sum \psi_2 \sin \frac{n\pi y_i}{b} & \lambda_n^{\frac{a}{h}} & \lambda_n^{-\frac{a}{h}} \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Máme tedy

$$(\lambda_n^{\frac{a}{h}} - \lambda_n^{-\frac{a}{h}}) \, U_n(x) = (\lambda_n^{\frac{x}{h}} - \lambda_n^{-\frac{x}{h}}) \, A_{1n} + (\lambda_n^{\frac{a}{h}} \lambda_n^{-\frac{x}{h}} - \lambda_n^{-\frac{a}{h}} \lambda_n^{\frac{x}{h}}) \, A_{2n} \, .$$

Označíme-li

$$\frac{\lambda_n^{\frac{x}{h}} - \lambda_n^{-\frac{x}{h}}}{\lambda_n^{\frac{a}{h}} - \lambda_n^{-\frac{a}{h}}} = L_n^h \, , \qquad \frac{\lambda_n^{\frac{a}{h}} \lambda_n^{-\frac{x}{h}} - \lambda_n^{-\frac{a}{h}} \lambda_n^{\frac{x}{h}}}{\lambda_n^{\frac{a}{h}} - \lambda_n^{-\frac{a}{h}}} = M_n^h \, ,$$

dostaneme řešení rovnice (3,5) s okrajovými podmínkami (3,6) ve tvaru

$$U_n(x_j) = A_{2n} L_n^h + A_{1n} M_n^h \, ,$$

takže

$$U = \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} A_{2n} L_n^h \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} A_{1n} M_n^h \sin \frac{n\pi y}{b} \, . \tag{3,7}$$

Srovnáme-li toto řešení pro U_n s řešením (2,6) rovnice (2,4′) pro u_n, lze ukázat, že platí

$$u_n(x_j) = \lim_{h \to 0} U_n(x_j) \, .$$

IV. Odhad rozdílu přesného a síťového řešení

Jest

$$\varepsilon = U(x_j, y_i) - u(x_j, y_i) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} (L_n^h A_{2n} - L_n^0 a_{2n}) \sin \frac{n\pi y_i}{b} + \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} (M_n^h A_{1n} - M_n^0 a_{1n}) \sin \frac{n\pi y_i}{b} -$$

$$- \sum_{n=\frac{b}{h}+1}^{\infty} (L_n^0 a_{2n} - M_n^0 a_{1n}) \sin \frac{n\pi y_i}{b} = \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} a_{2n} (L_n^h - L_n^0) \sin \frac{n\pi y_i}{b} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} L_n^h (A_{2n} - a_{2n}) \sin \frac{n\pi y_i}{b} + \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} a_{1n} (M_n^h - M_n^0) \sin \frac{n\pi y_i}{b} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} M_n^h (A_{1n} - a_{1n}) \sin \frac{n\pi y_i}{b} - \sum_{n=\frac{b}{h}+1}^{\infty} (L_n^0 a_{2n} - M_n^0 a_{1n}) \sin \frac{n\pi y_i}{b} \, . \tag{4,1}$$

Potřebujeme tedy odhadnout v závislosti na n a h výrazy

$$(A_{kn} - a_{kn}) , \quad k = 1, 2 \quad \text{a} \quad (L_n^h - L_n^0) , \quad (M_n^h - M_n^0) .$$

A_{kn} jsou obdélníkové formule pro mechanickou kvadraturu integrálů a_{kn}. Bereme-li součet ve výrazu A_{kn} od 0 do $\frac{b}{h}$, jsou tyto výrazy zároveň formulemi lichoběžníkovými, protože krajní členy, v nichž se liší od obdélníkových formulí, jsou rovny nule. Označme $\varphi_k(y) = \psi_k(y) \sin \frac{n\pi y}{b}$, $k = 1, 2$. Pro jednoduchost místo φ_1 nebo φ_2 budeme psát φ (odhad je zřejmě stejný).

Budiž $0 < y < h$. V bodě y rozložíme φ v Taylorovu řadu:

$$\varphi(y) = \varphi(0) + y \cdot \varphi'(0) + \int_0^y (y - t) \, \mathrm{d}\varphi'(t) .$$

Jest $\int_0^y (y - t) \, \mathrm{d}\varphi'(t) \leqq y \cdot V_1(y)$, kde $V_1(y)$ je variace funkce φ' v intervalu $(0, y)$,

$$\int_0^h y \cdot V_1(y) \, \mathrm{d}y \leqq \tfrac{1}{2}h^2 V_1(h) .$$

Jest tedy

$$\int_0^h \varphi(y) \, \mathrm{d}y \leqq h \cdot \varphi(0) + \tfrac{1}{2}h^2 \varphi'(0) + \tfrac{1}{2}h^2 V_1(h) .$$

Označíme-li $S(\varphi)$ lichoběžníkový odhad integrálu $\int \varphi$, máme

$$S[\varphi(y)]_0^h = h \cdot \varphi(0) + \tfrac{1}{2}h^2 \varphi'(0) + z_1 , \quad \text{kde} \quad |z_1| \leqq \tfrac{1}{2}h^2 V_1(h) ,$$

$$\int_0^h \varphi(y) \, \mathrm{d}y = h\varphi(0) + \tfrac{1}{2}h^2 \varphi'(0) + z_2 , \quad \text{kde} \quad z_2 \leqq \tfrac{1}{2}h^2 V_1(h)$$

a

$$|S[\varphi(y)]_0^h - \int_0^h \varphi(y) \, \mathrm{d}y| \leqq |z_1 + z_2| \leqq h^2 V_1(h) .$$

Tedy v celém intervalu $\langle 0, b \rangle$ máme:

$$|A_{kn} - a_{kn}| \leqq h^2 V_{k1}(b) ,$$

kde $V_{k1}(b)$ je variace funkce $\left(\psi_k \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}\right)'$.

K odhadu rozdílů $(L_n^h - L_n^0)$ a $(M_n^h - M_n^0)$ potřebujeme především znát výraz pro λ_n v závislosti na mocninách n a h. Jelikož tyto odhady potřebujeme pro $n \leqq \frac{b}{h}$, jest stále $nh \leqq \frac{b}{h}$, tedy omezené, a proto jsou správné následující odhady:

Jest

$$\lambda_n = 1 + 2s(s + \sqrt{s^2 + 1}) , \quad \text{kde} \quad s = \sin \frac{n\pi h}{2b} ,$$

$$\lambda_n = 1 + 2s + 2s^2 + s^3 + 0(s^5)$$

($y = 0(x)$ znamená, že $y \leq K \, . \, x$, kde K je nezávislé na x).

$$s = \frac{n\pi h}{2b} - \frac{n^3\pi^3h^3}{48b^3} + 0(n^5h^5) \,,$$

$$s^2 = \frac{n^2\pi^2h^2}{4b^2} - \frac{n^4\pi^4h^4}{48b^4} + 0(n^5h^5) \,.$$

Tedy máme

$$\lambda_n = 1 + \frac{n\pi h}{b} - \frac{n^3\pi^3h^3}{24b^3} + \frac{n^2\pi^2h^2}{2b^2} - \frac{n^4\pi^4h^4}{24b^4} + \frac{n^3\pi^3h^3}{8b^3} + 0(n^5h^5) =$$

$$= 1 + \frac{n\pi h}{b} + \frac{n^2\pi^2h^2}{2b^2} + \frac{n^3\pi^3h^3}{12b^3} - \frac{n^4\pi^4h^4}{24b^4} + 0(n^5h^5) = 1 + \delta \,.$$

Jest $\lg \lambda_n = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + 0(\delta^5) = \frac{n\pi h}{b} - \frac{n^3\pi^3h^3}{12b^3} + 0(n^5h^5)$

a dále

$$\lambda_n^{\frac{x}{h}} = e^{\frac{n\pi x}{b}} \left(1 - \frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\, x + 0(n^5h^4)\right),$$

$$\lambda_n^{\frac{x}{h}} - \lambda_n^{-\frac{x}{h}} = (e^{\frac{n\pi x}{b}} - e^{-\frac{n\pi x}{b}})\,(1 + 0(n^5h^4)) - (e^{\frac{n\pi x}{b}} + e^{-\frac{n\pi x}{b}})\, \frac{n^3\pi^3h^2x}{12b^3} =$$

$$= 2 \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b} \left[1 - \operatorname{ctgh} \frac{n\pi x}{b} \,.\, \frac{n^3\pi^3h^2x}{12b^3} + 0(n^5h^4)\right],$$

takže

$$L_n^h = \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \left[1 + \frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\left(a \operatorname{ctgh} \frac{n\pi a}{b} - x \operatorname{ctgh} \frac{n\pi x}{b}\right) + 0(n^5h^4)\right]. \quad (4,3)$$

Protože je $L_n^0 = \dfrac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}}$, výraz pro $(L_n^h - L_n^0)$ bude mít tvar

$$L_n^h - L_n^0 = \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \left[\frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\left(a \operatorname{ctgh} \frac{n\pi a}{b} - x \operatorname{ctgh} \frac{n\pi x}{b}\right) + 0(n^5h^4)\right]. \quad (4,4)$$

Úplně stejným postupem dostaneme výraz pro M_n^h a $(M_n^h - M_n^0)$:

$$M_n^h = \frac{\operatorname{sh} \frac{n\pi}{b}(a - x)}{\operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \left[1 + \frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\left(a \operatorname{ctgh} \frac{n\pi a}{b} - (a - x) \operatorname{ctgh} \frac{n\pi}{b}(a - x)\right) + \right.$$

$$\left. + 0(n^5h^4)\right], \quad (4,5)$$

$$M_n^h - M_n^0 = \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} \left[\frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\left(a \operatorname{ctgh}\frac{n\pi a}{b} - (a-x)\operatorname{cotgh}\frac{n\pi}{b}(a-x)\right) + \right.$$

$$\left. + 0(n^5h^4)\right]. \tag{4,6}$$

Jest zřejmé, že koeficienty L_n^h a L_n^0 přejdou v M_n^h a M_n^0, zaměníme-li x za $(a - x)$, čili počítáme-li x-ovou souřadnici v opačném směru od a k 0.

Tedy dostali jsme rozdíl přesného a síťového řešení ve tvaru:

$$\varepsilon = U(x, y) - u(x, y) \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}\left[\frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\left(a \operatorname{ctgh}\frac{n\pi a}{b} - x \operatorname{ctgh}\frac{n\pi x}{b}\right) + 0(n^5h^4)\right] a_{2n} \sin\frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}\left[\frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\left(a \operatorname{ctgh}\frac{n\pi a}{b} - (a-x)\operatorname{ctgh}\frac{n\pi}{b}(a-x)\right) + \right.$$

$$\left. + 0(n^5h^4)\right] a_{1n} \sin\frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}\left[1 + \frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\left(a \operatorname{ctgh}\frac{n\pi a}{b} - x\operatorname{ctgh}\frac{n\pi x}{b}\right) + \right.$$

$$\left. + 0(n^5h^4)\right] h^2V_{21}(b) \sin\frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}\left[1 + \frac{n^3\pi^3h^2}{12b^3}\left(a \operatorname{ctgh}\frac{n\pi a}{b} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (a-x)\operatorname{ctgh}\frac{n\pi}{b}(a-x) + \right) 0(n^5h^4)\right] h^2 V_{11}(b) \sin\frac{n\pi y}{b} +$$

$$+ \sum_{n=\frac{b}{h}+1}^{\infty} \left[\frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} a_{2n} - \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} a_{1n}\right] \sin\frac{n\pi y}{b} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 . \tag{4,7}$$

Nyní dokážeme větu, která nám říká, za jakých podmínek síťové řešení konverguje k přesnému jako h^2.

Věta 4,1. *Nechť okrajové podmínky jsou spojité ve všech rozích obdélníka. Potom platí:*

1. *Uvnitř daného obdélníku konverguje síťové řešení Laplaceovy rovnice k přesnému jako h^2, jestliže první derivace okrajových funkcí mají konečnou variaci.*

2. *Tato konvergence je stejnoměrná na celém uzavřeném obdélníku, jestliže druhé derivace okrajových funkcí mají konečnou variaci.*

Důkaz.

Stačí dokázat, že věta platí pro $\psi_k(0) = \psi_k(a) = 0$ (viz poznámka v odst. II).

1. Budeme postupně odhadovat jednotlivé členy (4,7).

ε_1: Faktor $\dfrac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}$ pro $x < a$ se zřejmě chová jako $e^{-(a-x)\frac{n\pi}{b}}$ a při sečtení podle n konverguje jako $e^{-\alpha n}$, $\alpha > 0$. Znásobíme-li jej tedy n^3, případně n^5, zůstává tato konvergence nezměněna. Výraz v kulaté závorce je zřejmě omezený pro všechna x, $0 < x < a$. Tedy k tomu, aby $\varepsilon_1 = 0(h^2)$, stačí, aby Fourierovy koeficienty a_{2n} funkce ψ_2 byly omezené, což je splněno pro každou integrovatelnou funkci.

ε_2: Tentó člen se chová přesně stejně jako ε_1 a dostáváme stejnou podmínku pro okrajovou funkci ψ_1.

ε_3: n^3 opět spojíme s prvním faktorem, čímž se zachová konvergence (jako v ε_1), a tedy člen $\varepsilon_3 = 0(h^2)$ za předpokladu, že první derivace okrajové funkce ψ_2' má konečnou variaci.

ε_4: Stejným způsobem dostaneme stejnou podmínku pro ψ_1'.

ε_5: Budeme zase odhadovat jen první část $\sum\limits_{n=\frac{b}{h}+1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} a_{2n} \sin\dfrac{n\pi y}{b}$, protože pro druhou část je odhad týž.

Jest

$$\sum_{n=\frac{b}{h}+1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} a_{2n} \sin\frac{n\pi y}{b} \right| \leqq \sum_{n=\frac{b}{h}}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} a_{2n} \sin\frac{n\pi y}{b} \right| =$$

$$= \frac{\left(\frac{b}{h}\right)^2}{\left(\frac{b}{h}\right)^2} \sum_{n=\frac{b}{h}}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} a_{2n} \sin\frac{n\pi y}{b} \right| \leqq \frac{h^2}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}} \cdot n^2 a_{2n} \sin\frac{n\pi y}{b} \right| .$$

n^2 opět můžeme spojit s prvním faktorem a dostaneme, že $\varepsilon_5 = 0(h^2)$ za předpokladu omezenosti Fourierových koeficientů okrajových funkcí $\psi_k (k = 1, 2)$.

Tím je skončen důkaz první části věty.

2. Přistoupíme k důkazu druhé části.

Označíme-li

$$L_n^h = \frac{\operatorname{sh}\frac{N\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{N\pi a}{b}} = L(N)\,,\quad M_n^h = \frac{\operatorname{sh}\frac{N\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{N\pi a}{b}} = M(N)\,,\ L_n^0 = L(n)\,,\ M_n^0 = M(n)\,,$$

kde

$$N = \frac{b}{\pi h}\lg\lambda_n\,,$$

jest

$$\varepsilon = U(x, y) - u(x, y) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} [L(N) - L(n)]\, a_{2n} \sin\frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} [M(N) - M(n)]\, a_{1n} \sin\frac{n\pi y}{b} +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} L(N)\,(A_{2n} - a_{2n}) \sin\frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} M(N)\,(A_{1n} - a_{1n}) \sin\frac{n\pi y}{b} -$$
$$- \sum_{n=\frac{b}{h}+1}^{\infty} [L(n)\, a_{2n} - M(n)\, a_{1n}] \sin\frac{n\pi y}{b} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5\,. \tag{4,9}$$

V důsledku symetrie je odhad druhého a čtvrtého členu pravé strany (4,9) stejný jako odhad prvního a třetího členu tak jako v první části důkazu. Budeme proto odhadovat jen první, třetí a pátý člen.

Předpokládejme, že $\psi_k''(y)$ $(k = 1, 2)$ mají konečnou variaci.

ε_1:

$$\varepsilon_1 = \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} [L(N) - L(n)]\, a_{2n} \sin\frac{n\pi y}{b}\,.$$

Podle věty o střední hodnotě je

$$L(N) - L(n) = |N - n|\, L'(\xi)\,,\quad \text{kde } \xi \text{ leží mezi } N \text{ a } n.$$

Z první části důkazu máme

$$\lg\lambda_n = \frac{n\pi h}{b} - \frac{n^3\pi^3h^3}{12b^3} + 0(n^5h^5)\,,$$

a tedy

$$N - n = -\frac{n^3\pi^2h^2}{12b^2} + 0(n^5h^4)\,.$$

Dokážeme dvě lemmata.

Lemma 4,1. *Jest* $N > \alpha n$, $\alpha =$ konst, $\alpha > 0$.

Důkaz.

Jest $\lambda_n = 1 + 2s(s + \sqrt{s^2 + 1})$, $s > 0$,

tedy $\lambda_n > 1 + 2s$.

Při tom

$$s = \sin\frac{n\pi h}{2b} \text{ a } \frac{n\pi h}{2b} \text{ je mezi 0 a } \frac{\pi}{2}, \text{ kde platí } \sin x \geqq \frac{2}{\pi}x$$

t. j. $0 < \frac{nh}{b} < s < 1$, takže

$$\lambda_n > 1 + \frac{nh}{b}, \quad \lg \lambda_n > \lg\left(1 + \frac{nh}{b}\right).$$

Nyní $\frac{nh}{b}$ leží v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, ve kterém platí

$$\lg(1 + x) = \left(x - \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) + \ldots$$

s kladnými členy v závorkách, takže

$$\lg(1 + x) > x - \frac{x^2}{2} > x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2},$$

$$\text{tedy } \lg \lambda_n > \frac{nh}{2b}, \quad N = \frac{b}{\pi h}\lg \lambda_n > \frac{1}{2\pi} \cdot n = \alpha n,$$

kde $\alpha = \frac{1}{2\pi}$, čímž je lemma dokázáno.

Poznámka. Protože $\alpha < 1$, platí také $\xi > \alpha n$ pro každé ξ mezi N a n.

Lemma 4,2. *Jest* $L'(\xi) - \widetilde{L'}(\xi) = 0(e^{-\frac{\alpha n \pi a}{b}})$, *kde* $\widetilde{L}(\xi) = e^{-\frac{\xi\pi}{b}(a-x)}$, *pro všechna* ξ *z intervalu o koncových bodech* N *a* n.

Důkaz.

$$\text{Jest} \quad L'(\xi) = \frac{\pi x}{b}\frac{\operatorname{ch}\frac{\xi\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} - \frac{\pi a}{b}\frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} \cdot \frac{\operatorname{ch}\frac{\xi\pi a}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} \text{ a } \widetilde{L'}(\xi) = \left(\frac{\pi x}{b} - \frac{\pi a}{b}\right)e^{-\frac{\xi\pi}{b}(a-x)}.$$

Dále máme

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{\xi\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} - e^{-\frac{\xi\pi}{b}(a-x)} = \frac{\operatorname{ch}\frac{\xi\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\xi\pi a}{b}}} = 0(e^{-\frac{\xi\pi a}{b}}), \text{ protože } \frac{\operatorname{ch}\frac{\xi\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} \text{ je}$$

pro všechna ξ omezené v celém intervalu $0 \leqq x \leqq a$, protože $\xi > c > 0$, c kladná konstanta.

Dále jest

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} - e^{\frac{\xi\pi}{b}(a-x)} = -\frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\xi\pi a}{b}}},$$

kde opět první činitel pravé strany je omezený všude v $0 \leqq x \leqq a$ a

$$\frac{\operatorname{ch}\frac{\xi\pi a}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} = 1 + \frac{2\mathrm{e}^{-\frac{\xi\pi a}{b}}}{\mathrm{e}^{\frac{\xi\pi a}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{\xi\pi a}{b}}} = 1 + \frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\xi\pi a}{b}}},$$

kde $\dfrac{1}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}}$ je zřejmě omezené, a tedy

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} \cdot \frac{\operatorname{ch}\frac{\xi\pi a}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{\xi\pi}{b}(a-x)} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} - \mathrm{e}^{-\frac{\xi\pi}{b}(a-x)} + \frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\xi\pi a}{b}}} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi}{b}(a-x)}{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi a}{b}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\xi\pi a}{b}}} + \frac{\operatorname{sh}\frac{\xi\pi x}{b}}{\operatorname{sh}^2\frac{\xi\pi a}{b}} \cdot \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\xi\pi a}{b}}} = 0(\mathrm{e}^{-\frac{\xi\pi a}{b}}),$$

čímž je lemma dokázáno.

Jest tedy

$$L'(\xi) = \widetilde{L'}(\xi) + (L'(\xi) - \widetilde{L'}(\xi)) = 0((a-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\pi}{b}(a-x)}) + 0(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\pi a}{b}})$$

a máme

$$\varepsilon_1 \leqq \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} \left| (N-n)\, L'(\xi)\, a_{2n} \sin \frac{n\pi y}{b} \right| =$$

$$0(h^2) \sum_{n=0}^{\frac{b}{h}} n^3 a_{2n} [0((a-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\pi}{b}(a-x)}) + 0(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\pi a}{b}})] .$$

Funkce ψ_2'' má podle předpokladu konečnou variaci. Platí tedy ([4]), že $n^2 a_{2n} \leqq \leqq \dfrac{V_2}{n}$, kde V_2 je variace funkce ψ_2'', z čehož

$$a_{2n} \leqq \frac{V_2}{n^3} = 0\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{a} \quad n^3 a_{2n} = 0(1) . \tag{4,10}$$

Dále je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a-x)\,\mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\pi}{b}(a-x)} = \frac{a-x}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(a-x)}{b}}} \quad (= 0 \text{ pro } x = a) ,$$

což je stále omezené, neboť funkce $\dfrac{z}{1-\mathrm{e}^{-z}}$ je omezená pro $0 < z \leqq \dfrac{\alpha a}{b}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\alpha n\pi a}{b}}$ také konverguje a její součet nezávisí na x, a tedy jsme dokázali, že

$\varepsilon_1 = 0(h^2)$ stejnoměrně pro všechna x z $0 \leqq x \leqq a$.

ε_3:

Rozdělme si okrajovou funkci ψ_2 na dvě části

$$\psi_{12} = \sum_{k=1}^{\frac{b}{h}} a_{2k} \sin \frac{k\pi y}{b} ,$$

$$\psi_{22} = \sum_{k=\frac{b}{h}+1}^{\infty} a_{2k} \sin \frac{k\pi y}{b} , \quad \psi_2 = \psi_{12} + \psi_{22}$$

a koeficient A_{2n} si rovněž rozdělme takto:

$$A_{12n} = \frac{2h}{b} \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} \psi_{12}(y_i) \sin \frac{n\pi y_i}{b} ,$$

$$A_{22n} = \frac{2h}{b} \sum_{i=1}^{\frac{b}{h}} \psi_{22}(y_i) \sin \frac{n\pi y_i}{b} , \quad A_{2n} = A_{12n} + A_{22n} .$$

Lemma 4,3. *Jest* $A_{12n} = a_{2n}$ *pro* $n = 1, 2, \ldots, \frac{b}{h}$.

Důkaz.

Máme

$$A_{12n} = \frac{2h}{b} \sum_{i=1}^{\frac{b}{h}} \sum_{k=1}^{\frac{b}{h}} a_{2k} \sin \frac{k\pi y_i}{b} \sin \frac{n\pi y_i}{b} . \tag{4,11}$$

a) Vezměme nejprve $k \neq n$.

Jest

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{b}{h}} 2 \sin \frac{k\pi y_i}{b} \sin \frac{n\pi y_i}{b} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\frac{b}{h}} \left[\cos \frac{(k+n)\pi y_i}{b} - \cos \frac{(k-n)\pi y_i}{b} \right] .$$

Označme $\frac{b}{h} = p$, $x_i = i \,.\, h$. Ze vzorce (a) (odst. III.) plyne, že je-li $\sin \frac{lp}{2p} \neq 0$ neboli není-li l násobek čísla $2p = 2\frac{b}{h}$

$$\sum_{i=1}^{p} \cos \frac{l\pi i}{p} = \frac{\sin\left(l\pi + \frac{l\pi}{2p}\right) - \sin \frac{l\pi}{2p}}{2 \sin \frac{l\pi}{2p}} = \frac{1}{2} [(-1)^l - 1] = \begin{cases} 0 \text{ pro sudé } l \\ -1 \text{ pro liché } l \end{cases} . \tag{b}$$

Za l dosadíme $(k + n)$ nebo $(k - n)$. Jsou-li obě k, n sudá nebo lichá, pak l je sudé. V (b) bude jmenovatel různý od nuly, protože podle i sčítáme jen do $\frac{b}{h} - 1$. V tomto případě je součet (4,11), kde bereme jen $k \neq n$, roven nule.

Je-li jedno z k a n sudé a druhé liché, bude l liché a dostaneme opět pro $k \neq n$

$$\frac{2h}{b}\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}}\sum_{k=1}^{\frac{b}{h}} a_{2k}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0\,.$$

b) Zbývá tedy v (4,11) v sumaci podle k pouze jeden člen pro $k = n$.

$$A_{12n} = \frac{2h}{b}\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}} a_{2n}\sin^2\frac{n\pi y_i}{b} = \frac{2h}{b}\,a_{2n}\sum_{i=1}^{\frac{b}{h}}\frac{1-\cos\frac{2n\pi y_i}{b}}{2} =$$

$$= \frac{2h}{b}\,a_{2n}\left(\frac{b}{2h} - \sum_{i=1}^{\frac{b}{h}}\cos\frac{2n\pi y_i}{b}\right) = a_{2n}\,,$$

protože podle (a) je druhý člen v závorce roven nule. Tím je skončen důkaz lemmatu 4,3.

Tedy máme

$$\varepsilon_3 = \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} L(N)\,(A_{2n} - a_{2n})\sin\frac{n\pi y}{b} = \sum_{n=1}^{\frac{b}{h}} L(N)\,A_{22n}\sin\frac{n\pi y}{b}\,.$$

Z (3,7) vidíme, že ε_3 splňuje diferenční Laplaceovu rovnici s okrajovými podmínkami $(\varepsilon_3)_{x=a} = \psi_{22}(y)$, $(\varepsilon_3)_{x=0} = 0$. Platí tedy pro ε_3 věta o maximu a máme

$$|\varepsilon_3| \leqq \psi_{22}(y)\,.$$

Podle předpokladu má ψ_2'' konečnou variaci a pro koeficienty a_{2n} platí (4,10). Jelikož je ψ_{22} zbytek Fourierovy řady pro ψ_2 od $\frac{b}{h} + 1$ do ∞, je $\psi_{22} = 0(h^2)$. Tím je skončen odhad členu ε_3.

ε_5: Zbývá odhad posledního členu

$$\varepsilon_5 = \sum_{n=\frac{b}{h}+1}^{\infty} [L(n)\,a_{2n} + M(n)\,a_{1n}]\sin\frac{n\pi y}{b}\,.$$

Opět stačí odhadnout první jeho část

$$\sum_{n=\frac{b}{h}+1}^{\infty} L(n)\,a_{2n}\sin\frac{n\pi y}{b}\,.$$

Ale protože výraz $L(n) = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}$ je omezený pro všechna n, zbývá

$\sum a_{2n} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$, která je rovna $0(h^2)$ stejnoměrně pro všechna $x, 0 \leq x \leq a$, má-li druhá derivace ψ_2'' konečnou variaci, což je právě náš předpoklad.

Tím je dokázána celá věta 4,1.

V. Konvergence síťového řešení rovnice pro vedení tepla

Stejným způsobem lze řešit odhad chyby při síťovém řešení rovnice pro vedení tepla na konečné tyči:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{pro} \quad 0 \leq x \leq a\,, \quad 0 \leq t \leq \infty \tag{5,1}$$

s počáteční podmínkou a okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x)\,, \quad f(0) = f(a) = 0\,. \\ u(0, t) &= 0 \\ u(a, t) &= 0\,. \end{aligned} \tag{5,2}$$

Při síťovém řešení časový interval označme τ a prostorový h. Dále označme $\beta = \frac{\tau}{h^2}$.

Potom lze stejným způsobem jako pro Dirichletův problém na obdélníku dokázat větu:

Věta 5,1. *Pro rovnici* (5,1) *s hraničními podmínkami* (5,2) *platí:*

1. *Pro každé pevné t, $0 < t < \infty$ konverguje síťové řešení k přesnému jako h^2 za předpokladu, že první derivace počáteční funkce $f'(x)$ má konečnou variaci, a jako h^4 za předpokladu, že třetí derivace této funkce má konečnou variaci a $\beta = \frac{1}{6}$.*

2. *Jestliže druhá derivace počáteční funkce $f''(x)$ má konečnou variaci, pak síťové řešení konverguje k přesnému jako h^2 stejnoměrně pro všechna t, $0 \leq t \leq T < \infty$. Jestliže čtvrtá derivace této funkce má konečnou variaci, $f''(0) = f''(a) = 0$ a $\beta = \frac{1}{6}$, pak je tato konvergence řádu h^4.*

LITERATURA

[1] *Г. А. Гринберг:* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Часть II, глава IV.

[2] *Y. L. Walsh, D. Young:* On the Accuracy of the Numerical Solution of the Dirichlet Problem by Finite Differences. Journal of Research of the National Bureau of Standards. Vol. 51, No 6, Dec. 1953.

[3] *В. Э. Милн:* Численное решение дифференциальных уравнений. Глава X, § 90, теорема 3, стр. 233.

[4] *A. Zygmund:* Trigonometrical Series. Chap. II, § 2.213, p. 18.

Резюме

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ И ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

ЗДЭНКА ГРОШАФТОВА (Zdenka Groschaftová)

(Поступило в редакцию 19/I 1957 г.)

В первую очередь в статье проводится оценка ошибки при решении задачи Дирихле в случае уравнения Лапласа на прямоугольнике методом сеток в зависимости от краевых условий.

Устанавливаются достаточные условия для того, чтобы скорость сходимости была максимальной, т. е. $O(h^2)$, где h — величина шага выбранной сетки.

При оценке различаются два вида сходимости, а именно: равномерная сходимость на всем замкнутом прямоугольнике и почти равномерная сходимость внутри этого прямоугольника, для которой достаточны более слабые условия.

Доказана

Теорема 4,1. *Пусть краевые функции непрерывны во всех угловых точках прямоугольника. Тогда:*

1. *Внутри данного прямоугольника сходится решение уравнения Лапласа, полученное методом сеток, к точному решению со скоростью h^2 если только первые производные краевых функций представляют собой функции ограниченного изменения.*

2. *Сходимость является равномерной на всем замкнутом прямоугольнике, если вторые производные суть функции ограниченного изменения.*

Таким же способом можно искать оценку ошибки при решении методом сеток краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности в случае конечного стержня.

Пусть краевые условия равны нулю и пусть начальная функция $f(x)$ равна нулю в обеих концевых точках. Интервал времени в сетке обозначим через τ, пространственный интервал через h, а отношение $\frac{\tau}{h^2} = \beta$.

Тогда справедлива

Теорема 5.1. 1. *При любом фиксированном t, $0 < t < \infty$ сходится приближенное решение к точному со скоростью h^2, если первая производная начальной функции имеет ограниченное изменение, а со скоростью h^4 при условии, что третья производная этой функции имеет ограниченное изменение и что $\beta = \frac{1}{6}$.*

2. *Если вторая производная начальной функции имеет ограниченное изменение, то приближенное решение сходится к точному со скоростью h^2 равномерно относительно t, $0 \leqq t \leqq T < \infty$. Если четвертая производная этой функции имеет ограниченное изменение, если $\beta = \frac{1}{6}$ и если вторая производная начальной функции равна нулю в обеих концевых точках, то описанная сходимость будет порядка h^4.*

Zusammenfassung

ÜBER DIE KONVERGENZ DER NETZMETHODE FÜR DIE LÖSUNG DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS UND DER WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

ZDENKA GROSCHAFTOVÁ

(Eingegangen am 19. Januar 1957.)

In dem Artikel wird der Abschätzungsfehler im Zusammenhang mit den Randbedingungen für die Lösung des Dirichletschen Problems der Laplace'schen Gleichung auf einem Rechteck mit Hilfe der Netzmethode beschrieben.

Es werden die hinreichenden Bedingungen für die maximale Schnelligkeit der Konvergenz bestimmt d. h. $O(h^2)$, wo h die Grösse der gewählten Netzmasche ist.

Bei der Abschätzung machen wir einen Unterschied zwischen der gleichmässigen Konvergenz auf dem ganzen geschllossenen Rechteck und der fast gleichmässigen Konvergenz im Rechteck, für die schwächere Voraussetzungen gelten.

Es ist der **Satz 4,1** bewiesen:

Die Randfunktionen seien in allen Ecken des Rechtecks stetig. Dann gilt:

1. *Im gegebenen Rechteck konvergiert die Netzlösung der Laplace'schen Gleichung zur genauen Lösung genau so wie h^2, wenn die ersten Ableitungen der Randfunktionen eine beschränkte Schwankung haben.*

2. *Diese Konvergenz ist auf dem geschlossenen Rechteck gleichmässig, wenn die zweiten Ableitungen der Randfunktionen eine beschränkte Schwankung haben.*

Auf gleiche Weise lässt sich die Fehlerabschätzung für die Netzlösung der ersten Randaufgabe für die homogene Wärmeleitungsgleichung eines endlichen Stabes lösen.

Die Randbedingungen seien gleich Null und die Anfangsfunktion $f(x)$ sei in ihren beiden Eckpunkten auch gleich Null. Das Zeitinterval wollen wir mit τ bezeichnen, das räumliche mit h und das Verhältnis $\frac{\tau}{h^2} = \beta$.

Dann gilt der **Satz 5,1:**

1. *Für alle festen* t, $0 < t < \infty$ *konvergiert die Netzlösung zur genauen Lösung genau so wie* h^2 *unter der Voraussetzung, dass die erste Ableitung der Anfangsfunktion eine beschränkte Schwankung hat. Sie konvergiert wie* h^4 *unter der Bedingung, dass die dritte Ableitung dieser Funktion eine beschränkte Schwankung hat und* $\beta = \frac{1}{6}$ *ist.*

2. *Wenn die zweite Ableitung der Anfangsfunktion eine beschränkte Schwankung hat, dann konvergiert die Netzlösung zur genauen Lösung gleichmässig für alle* t, $0 \leqq t \leqq T < \infty$, *wie* h^2. *Wenn die vierte Ableitung dieser Funktion eine beschränkte Schwankung hat,* $\beta = \frac{1}{6}$ *ist und die zweite Ableitung der Anfangsfunktion in ihren beiden Endpunkten gleich Null ist, dann ist die Konvergenz von der Ordnung* h^4.