Aplikace matematiky

Emil Vitásek

Vliv formulace okrajových podmínek na rychlost konvergence při řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 3, 163–183

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102565

ČLÁNKY

VLIV FORMULACE OKRAJOVÝCH PODMÍNEK NA RYCHLOST KONVERGENCE PŘI ŘEŠENÍ PARCIÁLNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC METODOU SÍTÍ

EMIL VITÁSEK

(Došlo dne 31. srpna 1956.) DT:517.944

Předmětem práce je formulace okrajových podmínek obsahujících derivace při řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí s hlediska zvýšení asymptotické přesnosti.

Při řešení parciálních diferenciálních rovnic eliptického a parabolického typu metodou sítí se při přepisu okrajových podmínek obsahujících derivace obvykle postupuje tak, že derivace se prostě nahradí příslušnými diferencemi. (Viz na př. [1], [2], [3].) Pokládáme tento postup za nevhodný a sice z tohoto důvodu: Je známo, že při řešení Dirichletova problému pro Laplaceovu rovnici, nebo při řešení první okrajové úlohy rovnice pro vedení tepla metodou sítí, dostaneme, za předpokladu dostatečné hladkosti řešení, rychlost konvergence aproximativního řešení k přesnému řádu h^2, kde h je velikost prostorového oka sítě (viz na př. [1], [4]). Při řešení okrajových úloh, kde okrajové podmínky obsahují derivace, se však při obvyklém postupu dopouštíme jisté nehomogenity co se týče stupně přesnosti aproximace derivací. Diferenciální operátor uvnitř oblasti nahrazujeme totiž diferenčním s přesností h^2, kdežto okrajové podmínky aproximujeme diferencemi s přesností h. V **1.** ukážeme na příkladě druhé okrajové úlohy rovnice pro vedení tepla, že tento postup, i za předpokladu dostatečné hladkosti řešení, dá rychlost konvergence aproximativního řešení k přesnému nanejvýš řádu h (věta 1 a 2). Dále v tomto paragrafu ukážeme, že interpolovat první derivace v okrajových podmínkách parabolou (čímž by byly aproximovány s přesností h^2) je rovněž nevhodné, protože síťové řešení potom ztrácí jisté názorné vlastnosti, přesně řečeno je možný případ, že konečná tyč na krajích tepelně isolovaná s kladnou počáteční teplotou nabude po určitém čase záporné teploty (věta 3). V **2.** a **3.** ukážeme, jak lze přirozeným způsobem formulovat okrajové podmínky při druhé a třetí okrajové úloze rovnice pro vedení tepla v jedné a dvou dimensích tak, abychom dostali rychlost konvergence řádu h^2. Ve **4.** je tentýž problém řešen pro třetí okrajovou úlohu Laplaceovy rovnice. Konečně v **5.** je uveden numerický příklad, který ilustruje rozdíly v chybě při různé formulaci okrajových podmínek.

1. Formulace okrajových podmínek pomocí diferencí

V tomto paragrafu se budeme zabývat řešením rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

v oblasti R: $(0 < x < a,\ 0 < t < T)$, při počáteční podmínce

$$u(x, 0) = p(x) \quad \text{pro} \quad 0 < x < a \tag{2}$$

a okrajových podmínkách

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, t) = Q_1(t)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(a, t) = Q_2(t)\,, \quad 0 < t < T\,, \tag{3}$$

kde n je vnější normála. V dalším budeme předpokládat, že funkce $p(x)$, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ splňují takové podmínky, že hledaná funkce u existuje a má spojité derivace do čtvrtého řádu v oblasti $\bar{R}$: $(0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq t \leqq T)$[1]).

Zvolme nyní přirozené p a položme $h = \frac{a}{p}$, $\tau = \beta h^2$, kde $0 < \beta < \frac{1}{2}$ a pokryjme rovinu (x, t), ve které leží oblast R, systémem přímek $x = mh$, $t = n\tau$, kde m a n jsou celá čísla. Průsečíky těchto přímek nazveme uzly sítě a číslo h resp. τ prostorovým resp. časovým okem sítě. Řešit rovnici (1) metodou sítí značí nalézt funkci $U(x, t)$ definovanou v uzlech sítě ležících v $\bar{R}$, pro kterou v každém uzlu $(x, t + \tau)$ ležícím v R, platí rovnice:

$$\frac{U(x+h, t) - 2U(x, t) + U(x-h, t)}{h^2} = \frac{U(x, t+\tau) - U(x, t)}{\tau}\,, \tag{4}$$

pro uzly na přímce $t = 0$ platí

$$U(x, 0) = p(x)\,, \quad 0 \leqq x \leqq a\,, \tag{5}$$

a v podmínkách (3) nahradíme derivace diferencemi, t. j.

$$\frac{U(h, t) - U(0, t)}{h} = -\,Q_1(t)\,, \quad \frac{U(a, t) - U(a-h, t)}{h} = Q_2(t)\,. \tag{6}$$

Je ihned vidět, že systém lineárních rovnic (4), (5), (6) má řešení pro každé $p(x)$, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$.

Položme dále

$$\varepsilon(x, t) = U(x, t) - u(x, t)\,, \tag{7}$$

takže $\varepsilon(x, t)$ je definována v každém uzlu z $\bar{R}$.

[1]) Zkoumání otázky, jaké jsou to podmínky, není předmětem této práce.

Nyní platí

Věta 1. *Funkce $\varepsilon(x, t)$ splňuje v $\bar{R}$ odhad*

$$|\varepsilon(x, t)| \leqq Mh\,, \tag{8}$$

kde M závisí pouze na oblasti R, na funkci u a jejích derivacích do čtvrtého řádu, ale nezávisí (pro dostatečně malá h) na h.

Věta 2. *Existuje funkce $u(x, t)$ splňující předpoklady definice na začátku paragrafu, pro kterou pro $t \geqq t_0 > 0$ je rychlost konvergence $\varepsilon(x, t)$ k nule řádu právě h.*

Důkaz věty 1. Síťová funkce $\varepsilon(x, t)$ splňuje v každém uzlu $(x, t + \tau) \in R$, jak se ihned zjistí použitím Taylorovy věty, rovnici

$$\frac{\varepsilon(x + h, t) - 2\varepsilon(x, t) + \varepsilon(x - h, t)}{h^2} = \frac{\varepsilon(x, t + \tau) - \varepsilon(x, t)}{\tau} - R(x, t)\, h^2\,,$$

neboli

$$\varepsilon(x, t + \tau) = \beta\varepsilon(x + h, t) + (1 - 2\beta)\, \varepsilon(x, t) + \beta\varepsilon(x - h, t) + \tau R(x, t)\, h^2\,, \tag{9}$$

kde

$$R(x, t) = \left\{\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x + \Theta_1 h, t) + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x - \Theta_2 h, t) - \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t + \Theta_3 \tau)\right\},$$

$$0 < \Theta_i < 1\,, \quad i = 1, 2, 3$$

a dále podmínky

$$\varepsilon(x, 0) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq a\,, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varepsilon(h, t) - \varepsilon(0, t)}{h} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Theta_4 h, t)\, h\,, \quad 0 < \Theta_4 < 1\,, \\ \frac{\varepsilon(a, t) - \varepsilon(a - h, t)}{h} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a - \Theta_5 h, t)\, h\,, \quad 0 < \Theta_5 < 1\,. \end{aligned}\right\} \; t > 0\,. \tag{11}$$

$\varepsilon(x, t)$ budeme hledat ve tvaru součtu $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, kde ε_1 splňuje systém

$$\begin{gathered} \varepsilon_1(x, t + \tau) = \beta\varepsilon_1(x + h, t) + (1 - 2\beta)\, \varepsilon_1(x, t) + \beta\varepsilon_1(x - h, t)\,, \\ \varepsilon_1(x, 0) = 0\,, \\ \frac{\varepsilon_1(h, t) - \varepsilon_1(0, t)}{h} = 0\,, \\ \frac{\varepsilon_1(a, t) - \varepsilon_1(a - h, t)}{h} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a - \Theta_5 h, t)\, h\,, \end{gathered} \tag{12}$$

ε_2 systém

$$\begin{gathered} \varepsilon_2(x, t + \tau) = \beta\varepsilon_2(x + h, t) + (1 - 2\beta)\, \varepsilon_2(x, t) + \beta\varepsilon_2(x - h, t)\,, \\ \varepsilon_2(x, 0) = 0\,, \\ \frac{\varepsilon_2(h, t) - \varepsilon_2(0, t)}{h} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\Theta_4 h, t)\, h\,, \\ \frac{\varepsilon_2(a, t) - \varepsilon_2(a - h, t)}{h} = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

a konečně ε_3:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_3(x, t + \tau) = \beta\varepsilon_3(x + h, t) + (1 - 2\beta)\,\varepsilon_3(x, t) + \beta\varepsilon_3(x - h, t) + \tau R(x, t)\,h^2\,, \\
\varepsilon_3(x, 0) = 0\,, \\
\frac{\varepsilon_3(h, t) - \varepsilon_3(0, t)}{h} = 0\,, \\
\frac{\varepsilon_3(a, t) - \varepsilon_3(a - h, t)}{h} = 0\,.
\end{gathered} \tag{14}$$

Z rovnic (14) snadno zjistíme, že v $\bar{R}$ platí

$$|\varepsilon_3(x, t)| \leqq TM_1h^2\,, \quad \text{kde} \quad M_1 = \max_{(x,t)\in R} |R(x, t)|\,.$$

Položme nyní

$$\varepsilon_4(x, t) = A(x^2 + 2t - hx)\,h\,, \quad \text{kde} \quad A = \max_R \frac{1}{4a}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a - \Theta_5 h, t)\right|.$$

ε_4 splňuje zřejmě první rovnici (12) a dále

$$\begin{gathered}
\varepsilon_4(x, 0) = A(x^2 - hx)\,h \geqq 0 \qquad \text{pro uzly, pro které} \quad 0 \leqq x \leqq a\,, \\
\frac{\varepsilon_4(h, t) - \varepsilon_4(0, t)}{h} = 0\,, \\
\frac{\varepsilon_4(a, t) - \varepsilon_4(a - h, t)}{h} = 2Aah\,.
\end{gathered}$$

Položme $\varepsilon_4 - \varepsilon_1 = v$. Pro funkci $v(x, t)$ nyní platí

$$\begin{gathered}
v(x, t + \tau) = \beta v(x + h, t) + (1 - 2\beta)\,v(x, t) + \beta v(x - h, t)\,, \\
v(x, 0) \geqq 0\,, \\
v(h, t) - v(0, t) = 0\,, \\
v(a, t) - v(a - h, t) \geqq 0\,.
\end{gathered}$$

Odtud plyne, že v $\bar{R}$ platí $v \geqq 0$, a tedy

$$\varepsilon_1(x, t) \leqq \varepsilon_4(x, t)\,.$$

Analogicky se dokáže

$$-\,\varepsilon_4(x, t) \leqq \varepsilon_1(x, t)\,,$$

a tedy celkem

$$|\varepsilon_1(x, t)| \leqq A(a^2 + 2T)\,h\,.$$

Stejně se dokáže podobná nerovnost pro ε_2 a věta 1 je úplně dokázána.

Obraťme se nyní k důkazu věty 2. Zvolme $u(x, t) = e^{x+t}$. Chybu $\varepsilon(x, t)$ budeme zase hledat jako v důkaze věty 1. ve tvaru součtu $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Nyní stačí zřejmě dokázat

$$|\varepsilon_1 + \varepsilon_2| \geqq Kh \tag{15}$$

alespoň v jednom bodě, protože je

$$|\varepsilon| = |\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3| \geqq |\varepsilon_1 + \varepsilon_2| - |\varepsilon_3| \geqq Kh - TM_1h^2 \geqq K'h$$

pro dostatečně malá h.

Vzhledem k rovnicím (12) a (13) a k speciální volbě funkce $u(x, t)$ je vidět, že $\varepsilon_1(x, t) \geqq 0$, $\varepsilon_2(x, t) \geqq 0$, a tedy nerovnost (15) stačí dokázat na př. pro funkci $\varepsilon_1(x, t)$.

Spočítejme k tomu cíli výraz:

$$\sum_{j=1}^{\frac{a}{h}-1} \frac{\varepsilon_1((j+1)h, t) - 2\varepsilon_1(jh, t) + \varepsilon_1((j-1)h, t)}{h^2} h =$$

$$= \sum_{j=1}^{\frac{a}{h}-1} \left(\frac{\varepsilon_1((j+1)h, t) - \varepsilon_1(jh, t)}{h} - \frac{\varepsilon_1(jh, t) - \varepsilon_1((j-1)h, t)}{h} \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_1(a, t) - \varepsilon_1(a-h, t)}{h} - \frac{\varepsilon_1(h, t) - \varepsilon_1(0, t)}{h} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a - \Theta_5 h, t)\, h \geqq mh > 0,$$

kde $m > 0$ je konstanta, protože druhé derivace funkce $u(x, t)$ jsou zdola omezené. Přepíšeme-li první rovnici (12), dostaneme

$$\frac{\varepsilon_1((j+1)h, t) - 2\varepsilon_1(jh, t) + \varepsilon_1((j-1)h, t)}{h^2} = \frac{\varepsilon_1(jh, t+\tau) - \varepsilon_1(jh, t)}{\tau},$$

a tedy celkem

$$\sum_{j=1}^{\frac{a}{h}-1} \frac{\varepsilon_1(jh, t+\tau) - \varepsilon_1(jh, t)}{\tau} h \geqq mh;$$

odkud

$$\sum_{j=1}^{\frac{a}{h}-1} \sum_{k=0}^{\frac{t}{\tau}-1} \frac{\varepsilon_1(jh, (k+1)\tau) - \varepsilon_1(jh, k\tau)}{\tau} h\tau \geqq \sum_{k=0}^{\frac{t}{\tau}-1} mh\tau = mht,$$

neboli

$$\sum_{j=1}^{\frac{a}{h}-1} \varepsilon_1(jh, t)\, h \geqq mht,$$

a protože $\varepsilon_1 \geqq 0$, platí také

$$\sum_{j=0}^{\frac{a}{h}-1} \varepsilon_1(jh, t)\, h \geqq mht.$$

Dále z rovnic (12) je ihned vidět, že platí

$$\varepsilon_1(x, t) \leqq \varepsilon_1(x+h, t), \quad 0 \leqq x \leqq a - h.$$

Předpokládejme nyní, že

$$\varepsilon_1(a, t) < \frac{1}{a} mht.$$

Potom

$$mht \leqq \sum_{j=0}^{\frac{a}{h}-1} \varepsilon_1(jh, t)\, h \leqq \sum_{j=0}^{\frac{a}{h}-1} \varepsilon_1(a, t)\, h < \sum_{j=0}^{\frac{a}{h}-1} \frac{1}{a}\, mht \,.\, h = mht$$

a to je spor, protože $m > 0$.

Tedy

$$\varepsilon_1(a, t) \geqq \frac{1}{a}\, mth$$

a věta 2 je dokázána.

Věta 3. *Existuje síťová funkce $U_1(x, t)$ definovaná v $\bar{R}$, která splňuje ve všech vnitřních uzlech rovnici* (4) *při podmínkách*

$$U_1(x, 0) \geqq 0\,,$$

$$\frac{3U_1(0, t) - 4U_1(a - h, t) + U_1(a - 2h, t)}{2h} = 0\,,$$

$$\frac{3U_1(a, t) - 4U_1(h, t) + U_1(2h, t)}{2h} = 0\,,$$

a pro kterou platí

$$U_1(0, \tau) < 0\,.$$

Poznámka: Tato věta ukazuje nevhodnost interpolování okrajových podmínek parabolou.

Důkaz: Snadno se zjistí přímým výpočtem, že uvedené tvrzení je správné pro funkci $U_1(x, t)$, pro kterou platí

$$U_1(x, 0) = x^4 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq a\,.$$

2. Jednodimensionální vedení tepla

V tomto paragrafu se budeme zabývat druhou a třetí okrajovou úlohou rovnice pro vedení tepla v jedné dimensi, t. j. řešením rovnice (1) v oblasti R, při počáteční podmínce

$$u(x, 0) = p(x)\,, \tag{16}$$

a při okrajových podmínkách

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, t) = Q_1(t)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(a, t) = Q_2(t)\,, \tag{17}$$

(druhá okrajová úloha), resp.

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, t) = -\, s(u(0, t) - F_1(t))\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(a, t) = -\, s(u(a, t) - F_2(t))\,, \tag{18}$$

(třetí okrajová úloha).

n je vnější normála, s je konstanta, $s > 0$.

V dalším budeme zase předpokládat, že funkce $p(x)$, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ jsou takové, že řešení této úlohy existuje a že má spojité derivace do čtvrtého řádu v $\bar{R}$.

Proveďme si nyní heuristickou úvahu, která vede přirozeným způsobem k formulaci okrajových podmínek při řešení těchto úloh. Budiž funkce $u_1(x, t)$ definovaná tímto předpisem:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u(x, t) \quad &\text{pro} \quad x \geqq 0 \\ u_1(x, t) &= u(-x, t) \quad &\text{pro} \quad x < 0 \end{aligned}$$

Funkce $u_1(x, t)$ pak představuje v okolí přímky $x = 0$ řešení rovnice pro vedení tepla s vnitřními zdroji o intensitě $2Q_1(t)$ podél přímky $x = 0$. To nás vede k tomu, abychom v hraničním uzlu $(0, t + \tau)$ požadovali platnost rovnice

$$\frac{U_1(h, t) - 2U_1(0, t) + U_1(-h, t)}{h^2} = \frac{U(0, t + \tau) - U(0, t)}{\tau} - A,$$

kde A je nějaká dosud blíže neurčená kombinace z hodnot $Q_1(t)$ a $Q_1(t + \tau)$. Tuto určíme z toho, aby pro chybu $\varepsilon(x, t) = U(x, t) - u(x, t)$ platila v bodě $(0, t + \tau)$ rovnice:

$$\frac{2\varepsilon(h, t) - 2\varepsilon(0, t)}{h^2} = \frac{\varepsilon(0, t + \tau) - \varepsilon(0, t)}{\tau} - s(x, t)\, h^2,$$

kde $s(x, t)$ závisí pouze na funkci u resp. jejích derivacích v $\bar{R}$. Pak totiž snadno dostaneme pro funkci $\varepsilon(x, t)$ odhad $|\varepsilon(x, t)| \leqq Mh^2$. Shora popsaná metoda nás vede v případě druhé okrajové úlohy k podmínkám:

$$\begin{aligned} U(0, t + \tau) &= 2\beta U(h, t) + (1 - 2\beta)\, U(0, t) + 2\beta h \left(\frac{6\beta - 1}{6\beta} Q_1(t) + \frac{1}{6\beta} Q_1(t + \tau)\right), \\ U(a, t + \tau) &= 2\beta U(a - h, t) + \\ &\quad + (1 - 2\beta)\, U(a, t) + 2\beta h \left(\frac{6\beta - 1}{6\beta} Q_2(t) + \frac{1}{6\beta} Q_2(t + \tau)\right), \qquad (19) \end{aligned}$$

v případě třetí okrajové úlohy k podmínkám:

$$\begin{aligned} U(0, t + \tau) &= \frac{2\beta}{1 + \frac{N}{3}} U(h, t) + \frac{(1 - 2\beta) + \frac{N}{3}(1 - 6\beta)}{1 + \frac{N}{3}} U(0, t) + \\ &\quad + \frac{2N\beta}{1 + \frac{N}{3}} \left(\frac{6\beta - 1}{6\beta} F_1(t) + \frac{1}{6\beta} F_1(t + \tau)\right), \end{aligned}$$

$$U(a, t + \tau) = \frac{2\beta}{1 + \frac{N}{3}} U(a - h, t) + \frac{(1 - 2\beta) + \frac{N}{3}(1 - 6\beta)}{1 + \frac{N}{3}} U(a, t) +$$

$$+\frac{2N\beta}{1+\frac{N}{3}}\left(\frac{6\beta-1}{6\beta}F_2(t)+\frac{1}{6\beta}F_2(t+\tau)\right),$$

$$N = sh. \tag{20}$$

Nyní platí

Věta 4. *Pro síťovou funkci* $\varepsilon(x, t) = U(x, t) - u(x, t)$, *kde* $u(x, t)$ *je řešením rovnice* (1) *při podmínkách* (16) *a* (17) *resp.* (16) *a* (18) *a* $U(x, t)$ *je řešením systému* (4) *při podm.* (16) *a* (19) *resp.* (16) *a* (20), *platí v* $\bar{R}$ *stejnoměrně odhad:*

$$|\varepsilon(x, t)| \leqq Mh^2 .$$

Důkaz: Dokažme větu na př. pro třetí okrajovou úlohu (pro druhou okrajovou úlohu je postup zcela analogický). Funkce $\varepsilon(x, t)$ splňuje v každém vnitřním uzlu $(x, t + \tau)$, jak se snadno zjistí z Taylorovy věty, rovnici

$$\varepsilon(x, t+\tau) = \beta\varepsilon(x+h, t) + (1-2\beta)\,\varepsilon(x, t) + \beta\varepsilon(x-h, t) + \tau R(x, t)\,h^2\,, \tag{21}$$

kde

$$R(x, t) = \left\{\frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x+\Theta_1 h, t) + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x-\Theta_2 h, t) - \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t+\Theta_3\tau)\right\}.$$

Podívejme se nyní na počáteční a okrajové podmínky, které splňuje funkce $\varepsilon(x, t)$. Tak předně je

$$\varepsilon(x, 0) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq a\,. \tag{22}$$

První podmínku (20) přepišme ve tvaru:

$$\frac{2}{h}\frac{U(h, t) - U(0, t)}{h} - \frac{U(0, t+\tau) - U(0, t)}{\tau} = \frac{2s}{h}\left(\frac{6\beta-1}{6\beta}U(0, t) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6\beta}U(0, t+\tau) - \frac{6\beta-1}{6\beta}F_1(t) - \frac{1}{6\beta}F_1(t+\tau)\right).$$

Proveďme nyní operátor na levé straně posledně napsané rovnosti, označme jej $\Delta_1[U]$, na funkci $\varepsilon(x, t)$:

$$\Delta_1[\varepsilon] = -\left(\frac{2}{h}\frac{u(h, t) - u(0, t)}{h} - \frac{u(0, t+\tau) - u(0, t)}{\tau}\right) + \Delta_1[U] =$$
$$= -\frac{2}{h}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t)\,h + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t)\,h^2 + \frac{1}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Theta_4 h, t)\,h^3\right\} +$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) + \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t+\Theta_5\tau)\,h^2 + \Delta_1[U]\,.$$

Podle předpokladu o hladkosti funkce u, je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) = 0\,, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, t) = s\left(\frac{\partial u}{\partial t}(0, t) - \frac{\partial F_1}{\partial t}(t)\right),$$

a tedy

$$\Delta_1[\varepsilon] = -\frac{2s}{h}\left\{u(0, t) - F_1(t) + \frac{1}{6}\frac{\partial u}{\partial t}(0, t)\, h^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial F_1}{\partial t}(t)\, h^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{24 \cdot s}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Theta_4 h, t)\, h^3\right\} + \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t + \Theta_5 \tau)\, h^2 + \Delta_1[U] =$$
$$= -\frac{2s}{h}\left\{u(0, t) - F_1(t) + \frac{1}{6\beta}u(0, t + \tau) - \frac{1}{6\beta}u(0, t) - \frac{1}{6\beta}F_1(t + \tau) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6\beta}F_1(t)\right\} + \frac{s\beta}{6}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t + \Theta_6\tau)\, h^3 - \frac{s\beta}{6}\frac{\partial^2 F_1}{\partial t^2}(t + \Theta_7\tau)\, h^3 - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Theta_4 h, t)\, h^2 +$$
$$+ \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t + \Theta_5\tau)\, h^2 + \Delta_1[U] = \frac{2s}{h}\left\{\frac{6\beta - 1}{6\beta}\varepsilon(0, t) + \frac{1}{6\beta}\varepsilon(0, t + \tau)\right\} -$$
$$- s(x, t)\, h^2 ,$$

kde $s(x, t)$ má smysl zřejmý shora. Posledně napsanou rovnost můžeme přepsat ve tvaru:

$$\varepsilon(0, t + \tau) = \frac{2\beta}{1 + \frac{N}{3}}\varepsilon(h, t) + \frac{(1 - 2\beta) - \frac{N}{3}(6\beta - 1)}{1 + \frac{N}{3}}\varepsilon(0, t) + \frac{\tau}{1 + \frac{N}{3}}s(x, t)\, h^2 . \tag{23}$$

Analogická rovnice platí na druhém kraji:

$$\varepsilon(a, t + \tau) = \frac{2\beta}{1 + \frac{N}{3}}\varepsilon(a - h, t) + \frac{(1 - 2\beta) - \frac{N}{3}(6\beta - 1)}{1 + \frac{N}{3}}\varepsilon(a, t) + \frac{\tau}{1 + \frac{N}{3}}s_1(x, t)\, h^2 . \tag{23'}$$

Protože všechny koeficienty v rovnicích (21) a (23) jsou, aspoň pro dostatečně malá h, nezáporné a jejich součet je nejvýš jedna, dostaneme, položíme-li

$$M_1 = \operatorname*{Max}_{R}\{|R(x, t)| , |s(x, t)| , |s_1(x, t)|\} ,$$

vzhledem k rovnici (22)

$$|\varepsilon(x, t)| \leq TM_1 h^2 ,$$

což dokazuje větu.

3. Dvojdimensionální vedení tepla

V tomto paragrafu se budeme zabývat formulací okrajových podmínek při řešení druhé a třetí okrajové úlohy rovnice pro vedení tepla ve dvou dimensích ve čtvercové oblasti. Zde již budeme postupovat poněkud rychleji, protože poměry jsou zcela analogické jako v jednodimensionálním případě. Druhou resp. třetí okrajovou úlohou budeme zde rozumět řešení rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{24}$$

v oblasti R:

$$(0 < x < a\,, \quad 0 < y < a\,, \quad 0 < t < T)\,,$$

při počáteční podmínce

$$u(x, y, 0) = p(x, y) \tag{25}$$

a okrajových podmínkách

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, y, t) = Q_1(y, t)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, 0, t) = Q_2(x, t)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(a, y, t) = Q_3(y, t)\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, a, t) = Q_4(x, t) \tag{26}$$

(druhá okrajová úloha),

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, y, t) = -\,s(u(0, y, t) - F_1(y, t))\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, 0, t) = -\,s(u(x, 0, t) - F_2(x, t))\,, \text{ atd.} \tag{27}$$

(třetí okrajová úloha).

n je opět vnější normála a s je kladná konstanta.

Položme opět $h = \frac{a}{p}$, $\tau = \beta h^2$, kde p je přirozené a β splňuje nerovnosti $0 < \beta < \frac{1}{4}$. Sestrojme zase v prostoru (x, y, t) pravoúhlou síť analogicky jako dříve. Příslušné síťové řešení $U(x, y, t)$ bude nyní splňovat systém:

v každém vnitřním uzlu $(x, y, t + \tau) \in R$

$$\frac{U(x + h, y, t) + U(x - h, y, t) + U(x, y + h, t) + U(x, y - h, t) - 4U(x, y, t)}{h^2} =$$

$$= \frac{U(x, y, t + \tau) - U(x, y, t)}{\tau}\,,$$

neboli

$$\begin{aligned} U(x, y, t + \tau) &= \beta U(x + h, y, t) + \beta U(x - h, y, t) + \\ &+ \beta U(x, y + h, t) + \beta U(x, y - h, t) + (1 - 4\beta)\, U(x, y, t)\,, \end{aligned} \tag{28}$$

počáteční podmínku

$$U(x, y, 0) = p(x, y) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq x \leqq a\,, \quad 0 \leqq y \leqq a\,, \tag{29}$$

a okrajové podmínky

$$
\left.
\begin{aligned}
&U(0, y, t + \tau) = 2\beta U(h, y, t) + \beta U(0, y + h, t) + \beta U(0, y - h, t) + \\
&\quad + (1 - 4\beta)\, U(0, y, t) + 2\beta h \left\{ \frac{6\beta - 1}{6\beta}\, Q_1(y, t) + \frac{1}{6\beta}\, Q_1(y, t + \tau) - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{6}\, Q_1(y + h, t) + \frac{2}{6}\, Q_1(y, t) - \frac{1}{6}\, Q_1(y - h, t) \right\} \\
&\text{pro } 0 < y < a\,, \\
&U(x, 0, t + \tau) = 2\beta U(x, h, t) + \beta U(x + h, 0, t) + \beta U(x - h, 0, t) + \\
&\quad + (1 - 4\beta)\, U(x, 0, t) + 2\beta h \left\{ \frac{6\beta - 1}{6\beta}\, Q_2(x, t) + \frac{1}{6\beta}\, Q_2(x, t + \tau) - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{6}\, Q_2(x + h, t) + \frac{2}{6}\, Q_2(x, t) - \frac{1}{6}\, Q_2(x - h, t) \right\} \\
&\text{pro } 0 < x < a\,, \\
&U(a, y, t + \tau) = 2\beta U(a - h, y, t) + \beta U(a, y + h, t) + \beta U(a, y - h, t) + \\
&\quad + (1 - 4\beta)\, U(a, y, t) + 2\beta h \left\{ \frac{6\beta - 1}{6\beta}\, Q_3(y, t) + \frac{1}{6\beta}\, Q_3(y, t + \tau) - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{6}\, Q_3(y + h, t) + \frac{2}{6}\, Q_3(y, t) - \frac{1}{6}\, Q_3(y - h, t) \right\} \\
&\text{pro } 0 < y < a\,, \\
&U(x, a, t + \tau) = 2\beta U(x, a - h, t) + \beta U(x + h, a, t) + \beta U(x - h, a, t) + \\
&\quad + (1 - 4\beta)\, U(x, a, t) + 2\beta h \left\{ \frac{6\beta - 1}{6\beta}\, Q_4(x, t) + \frac{1}{6\beta}\, Q_4(x, t + \tau) - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{6}\, Q_4(x + h, t) + \frac{2}{6}\, Q_4(x, t) - \frac{1}{6}\, Q_4(x - h, t) \right\} \\
&\text{pro } 0 < x < a\,,
\end{aligned}
\right\} \tag{30}
$$

$$
\begin{aligned}
&U(0, 0, t + \tau) = 2\beta U(h, 0, t) + 2\beta U(0, h, t) + (1 - 4\beta)\, U(0, 0, t) + \\
&\quad + 2\beta h \left\{ \frac{6\beta - 1}{6\beta}\, (Q_1(0, t) + Q_2(0, t)) + \frac{1}{6\beta}\, (Q_1(0, t + \tau) + Q_2(0, t + \tau)) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{6}\, (Q_1(2h, t) + Q_2(2h, t)) + \frac{2}{6}\, (Q_1(h, t) + Q_2(h, t)) - \frac{1}{6}\, (Q_1(0, t) + Q_2(0, t)) \right\}
\end{aligned} \tag{31}
$$

a analogicky v ostatních rozích (druhá okrajová úloha),

$$
U(0, y, t + \tau) = \frac{2\beta}{1 + \frac{N}{3}}\, U(h, y, t) + \beta U(0, y + h, t) + \beta U(0, y - h, t) +
$$

$$+\frac{1-4\beta-\frac{N}{3}(8\beta-1)}{1+\frac{N}{3}}U(0,y,t)+\frac{2N\beta}{1+\frac{N}{3}}\left\{\frac{6\beta-1}{6\beta}F_1(y,t)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6\beta}F_1(y,t+\tau)-\frac{1}{6}F_1(y+h,t)+\frac{2}{6}F_1(y,t)-\frac{1}{6}F_1(y-h,t)\right\}, \quad (32)$$

$$N=sh\,,$$

pro

$$0<y<a\,,$$

a analogicky na ostatních stranách,

$$U(0,0,t+\tau)=\frac{2\beta}{1+\frac{N}{3}}U(h,0,t)+\frac{2\beta}{1+\frac{N}{3}}U(0,h,t)+$$

$$+\frac{(1-4\beta)-\frac{N}{3}(12\beta-1)}{1+\frac{N}{3}}U(0,0,t)+\frac{2N\beta}{1+\frac{N}{3}}\left\{\frac{6\beta-1}{6\beta}(F_1(0,t)+F_2(0,t))+\right.$$

$$+\frac{1}{6\beta}(F_1(0,t+\tau)+F_2(0,t+\tau))-\frac{1}{6}(F_1(2h,t)+F_2(2h,t))+$$

$$\left.+\frac{2}{6}(F_1(h,t)+F_2(h,t))-\frac{1}{6}(F_1(0,t)+F_2(0,t))\right\} \quad (33)$$

a analogicky v ostatních rozích (třetí okrajová úloha). Úplně analogickým postupem jako v předešlém paragrafu se dokáže:

Věta 5. *Budiž $\varepsilon(x,y,t)=u(x,y,t)-U(x,y,t)$. Je-li u takové řešení rovnice* (24) *při podmínkách* (25) *a* (26) *resp.* (27), *že má spojité derivace do čtvrtého řádu v $\bar{R}$, pak v $\bar{R}$ stejnoměrně platí*

$$|\varepsilon(x,y,t)|\leqq Mh^2\,,$$

kde M je konstanta závisící na oblasti R, řešení u a jeho derivacích do čtvrtého řádu, ale nezávisející pro dostatečně malá h na h.

4. Třetí okrajová úloha pro Laplaceovu rovnici

Nyní se obraťme k řešení třetí okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici ve čtverci, t. j. k řešení v oblasti R:

$$(0<x<a\,,\quad 0<y<a)$$

rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (34)$$

při okrajových podmínkách

$$\frac{\partial u}{\partial n}(0, y) = -s(u(0, y) - F_1(y)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a, y) = -s(u(a, y) - F_3(y)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, 0) = -s(u(x, 0) - F_2(x)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, a) = -s(u(x, a) - F_4(x)). \tag{35}$$

V dalším budeme zase předpokládat, že funkce $F_1(y)$, $F_3(y)$, $F_2(x)$, $F_4(x)$ jsou takové, že řešení shora formulovaného problému existuje a že má spojité derivace do čtvrtého řádu v $\bar{R}$.

Sestrojme v rovině (x, y) čtvercovou síť o oku h. Síťovým řešením třetí okrajové úlohy Laplaceovy rovnice nazveme síťovou funkci $U(x, y)$ definovanou ve všech uzlech z $\bar{R}$, pro kterou platí v každém vnitřním uzlu (x, y) oblasti R:

$$\mathrm{L}_1[U]_{x,y} \equiv \frac{U(x+h, y) + U(x-h, y) + U(x, y+h) + U(x, y-h) - 4U(x, y)}{h^2} = 0, \tag{36}$$

ve vnitřních bodech stran čtverce R:

$$\mathrm{L}_2[U]_{x=0} \equiv \frac{2U(h, y) + \left(1 + \frac{N}{3}\right)U(0, y+h) + \left(1 + \frac{N}{3}\right)U(0, y-h) - \left(4 + \frac{8N}{3}\right)U(0, y)}{h^2} =$$

$$= -\frac{s}{3h}(8F_1(y) - F_1(y+h) - F_1(y-h)),$$

$$\mathrm{L}_2[U]_{y=0} \equiv \frac{2U(x, h) + \left(1 + \frac{N}{3}\right)U(x+h, 0) + \left(1 + \frac{N}{3}\right)U(x-h, 0) - \left(4 + \frac{8N}{3}\right)U(x, 0)}{h^2} =$$

$$= -\frac{s}{3h}(8F_2(x) - F_2(x+h) - F_2(x-h)),$$

$$\mathrm{L}_2[U]_{x=a} \equiv \frac{2U(a-h, y) + \left(1 + \frac{N}{3}\right)U(a, y+h) + \left(1 + \frac{N}{3}\right)U(a, y-h) - \left(4 + \frac{8N}{3}\right)U(a, y)}{h^2} =$$

$$= -\frac{s}{3h}(8F_3(y) - F_3(y+h) - F_3(y-h)),$$

$$\mathrm{L}_2[U]_{y=a} \equiv$$

$$\equiv \frac{2U(x, a-h) + \left(1+\frac{N}{3}\right)U(x+h, a) + \left(1+\frac{N}{3}\right)U(x-h, a) - \left(4+\frac{8N}{3}\right)U(x, a)}{h^2} =$$

$$= -\frac{s}{3h}(8F_4(x) - F_4(x+h) - F_4(x-h)) \tag{37}$$

a konečně v rozích:

$$\mathrm{L}_3[U]_{0,0} \equiv \frac{2U(h, 0) + 2U(0, h) - (4 + 4N)\, U(0, 0)}{h^2} =$$

$$= -\frac{s}{3h}(5(F_1(0) + F_2(0)) + 2(F_1(h) + F_2(h)) - (F_1(2h) + F_2(2h))),$$

$$\mathrm{L}_3[U]_{0,a} \equiv \frac{2U(h, a) + 2U(0, a-h) - (4 + 4N)\, U(0, a)}{h^2} =$$

$$= -\frac{s}{3h}(5(F_1(0) + F_4(0)) + 2(F_1(h) + F_4(h)) - (F_1(2h) + F_4(2h))),$$

$$\mathrm{L}_3[U]_{a,a} \equiv \frac{2U(a-h, a) + 2U(a, a-h) - (4 + 4N)\, U(a, a)}{h^2} =$$

$$= -\frac{s}{3h}(5(F_3(0) + F_4(0)) + 2(F_3(h) + F_4(h)) - (F_3(2h) + F_4(2h))),$$

$$\mathrm{L}_3[U]_{a,0} \equiv \frac{2U(a-h, 0) + 2U(a, h) - (4 + 4N)\, U(a, 0)}{h^2} =$$

$$= -\frac{s}{3h}(5(F_2(0) + F_3(0)) + 2(F_2(h) + F_3(h)) - (F_2(2h) + F_3(2h))),$$

$$N = sh. \tag{38}$$

Lemma 1. *Budiž u síťová funkce definovaná ve všech uzlech z $\bar{R}$, pro kterou v každém vnitřním uzlu platí $\mathrm{L}_1[u] = \alpha(x, y)$, kde $\alpha \geqq 0$ (resp. $\leqq 0$). Pak u nabývá svého maxima (resp. minima) na hranici oblasti R.*

Důkaz: Budiž

$$u^* = \operatorname*{Max}_{(x,y)\in\bar{R}} u(x, y) = u(x_0, y_0)\,.$$

Je-li (x_0, y_0) hraničním uzlem, jsme hotovi. Předpokládejme tedy, že (x_0, y_0) je vnitřním uzlem. Pak podle (36) platí

$$u(x_0+h, y_0) + u(x_0-h, y_0) + u(x_0, y_0+h) + u(x_0, y_0-h) - 4u^* \geqq 0,$$

t. j. na př.

$$u(x_0+h, y_0) \geqq 4u^* - u(x_0-h, y_0) - u(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0-h) \geqq u^*,$$

tedy

$$u(x_0 + h, y_0) = u^*$$

a podobně pro ostatní sousední uzly. Tedy ve všech sousedních uzlech je u také rovna svému maximu. Pokračujeme-li tímto způsobem dále, dospějeme do uzlu (x', y'), který už leží na hranici a ve kterém je

$$u(x', y') = u^* .$$

Lemma 2. *Systém* $L_1[u] = \alpha(x, y)$, $L_2[u] = \beta(x, y)$, $L_3[u] = \gamma(x, y)$ *má pro každou pravou stranu právě jedno řešení.*

Důkaz: Stačí zřejmě dokázat, že příslušný homogení systém, t. j. systém $L_i[v] = 0$, $i = 1, 2, 3$, má pouze triviální řešení. Budiž tedy v řešením tohoto systému. Položme

$$v^* = \max_{(x,y)\in \bar{R}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

a předpokládejme, že $v^* > 0$. Uzel (x_0, y_0) můžeme zvolit podle lemmatu 1. na hranici. Budiž nejprve (x_0, y_0) hraniční uzel různý od rohového, t. j. na př. $(0, y_0)$, $0 < y_0 < a$. Pak platí podle (37)

$$2v(h, y_0) + \left(1 + \frac{N}{3}\right) v(0, y_0 + h) + \left(1 + \frac{N}{3}\right) v(0, y_0 - h) - \left(4 + \frac{8N}{3}\right) v(0, y_0) = 0 ,$$

neboli

$$v^* = v(0, y_0) = \frac{2}{4 + \frac{8N}{3}} v(h, y_0) + \frac{1 + \frac{N}{3}}{4 + \frac{8N}{3}} v(0, y_0 + h) +$$

$$+ \frac{1 + \frac{N}{3}}{4 + \frac{8N}{3}} v(0, y_0 - h) \leqq \frac{4 + \frac{2N}{3}}{4 + \frac{8N}{3}} v^* < v^*$$

a to je spor. Analogicky dojdeme ke sporu v případě rohového uzlu. Tedy celkem dostáváme $v^* \leqq 0$. Podobně dostaneme $v' \geqq 0$, kde $v' = \min_{(x,y)\in\bar{R}} v(x, y)$, což dokazuje lemma.

Lemma 3. *Budiž* u *řešením systému* $L_i[u] = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, *kde* $\alpha_i \geqq 0$, $i = 1, 2, 3$. *Pak* $u \leqq 0$ *v* $\bar{R}$.

Důkaz: Budiž $u^* = \max_{(x,y)\in\bar{R}} u(x, y) = u(x_0, y_0)$. Podle lemmatu 1. můžeme předpokládat, že (x_0, y_0) je hraniční uzel. Předpokládejme $u^* > 0$. Budiž nejprve (x_0, y_0) hraniční uzel různý od rohu, na př. $(0, y_0)$, $0 < y_0 < a$.

Pak platí

$$u^* \leq \frac{2}{4 + \frac{8N}{3}} u(h, y_0) + \frac{1 + \frac{N}{3}}{4 + \frac{8N}{3}} u(0, y_0 + h) + \frac{1 + \frac{N}{3}}{4 + \frac{8N}{3}} u(0, y_0 - h) < u^*$$

a to je spor. Analogicky dojdeme ke sporu v případě, že (x_0, y_0) je rohovým uzlem. Tedy skutečně $u^* \leqq 0$.

Lemma 4. *Buďte u a v dvě síťové funkce, pro které platí* $\mathrm{L}_i(v) \leqq - |\mathrm{L}_i[u]|$, $i = 1, 2, 3$. *Pak* $|u| \leqq v$.

Důkaz: Položme $t_1 = -u - v$, $t_2 = u - v$; pak $\mathrm{L}_i[t_1] \geqq 0$, $\mathrm{L}_i[t_2] \geqq 0$ pro $i = 1, 2, 3$ a lemma plyne z lemmatu 3.

Lemma 5. *Budiž u řesením systému* $\mathrm{L}_1[u] = 0$, $L_i[u] = -M$, $i = 2, 3$ *kde* $M =$ konst. > 0. *Pak* $0 \leqq u \leqq M$ *pro dostatečně malá* h.

Důkaz: Budiž $M_1 = \operatorname*{Max}_{(x,y)\in\bar{R}} u(x, y) = u(x_0, y_0)$, a předpokládejme nejprve že (x_0, y_0) je hraniční uzel různý od rohu. Pak platí

$$\frac{2u(h, y_0) + \left(1 + \frac{N}{3}\right) u(0, y_0 + h) + \left(1 + \frac{N}{3}\right) u(0, y_0 - h) - \left(4 + \frac{8N}{3}\right) u(0, y_0)}{h^2} = -M\,,$$

odtud

$$-M \leqq \frac{2M_1 + 2\left(1 + \frac{N}{3}\right) M_1 - \left(4 + \frac{8N}{3}\right) M_1}{h^2} = -\frac{2s}{h} M_1\,,$$

t. j. $M_1 \leqq \frac{h}{2s} M < M$ pro $h < 2s$. K analogickému závěru dojdeme při rohovém hraničním uzlu.

Věta 6. *Pro chybu* $\varepsilon(x, y) = u(x, y) - U(x, y)$ *platí stejnoměrně v* $\bar{R}$ *odhad*

$$|\varepsilon(x, y)| \leqq Mh^2\,.$$

Důkaz: Použitím Taylorovy věty snadno zjistíme, že chyba splňuje systém

$$\mathrm{L}_i[\varepsilon] = -R_i(x, y)\, h^2\,,$$

kde

$$R_1(x, y) = -\frac{1}{24}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x + \Theta_1 h, y) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x - \Theta_2 h, y) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y + \Theta_3 h) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x, y - \Theta_4 h)\right),$$

$$R_2(x, y) = -\frac{1}{24}\left(2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Theta_5 h, y) + \left(1 + \frac{N}{3}\right)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0, y + \Theta_6 h) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0, y - \Theta_7 h)\right) - \frac{N}{3}\left(F_1^{\mathrm{IV}}(y + \Theta_8 h) + F_1^{\mathrm{IV}}(y - \Theta_9 h)\right)\right),$$

$$R_3(x, y) = -\frac{1}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\Theta_{10}h, 0) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(0, \Theta_{11}h)\right) - \frac{s}{9}(F_1^{\mathrm{III}}(\Theta_{12}h) + F_2^{\mathrm{III}}(\Theta_{13}h)) + + \frac{4s}{9}(F_1^{\mathrm{III}}(2\Theta_{14}h) + F_2^{\mathrm{III}}(2\Theta_{15}h)) .$$

(Vzorce pro R_i jsou psány pro stranu $x = 0$, $0 < y < a$, a pro roh $(0, 0)$; na ostatních stranách a v ostatních rozích platí analogické vztahy.) Budiž $M = \max\limits_{\substack{i=1,2,3\\ R}} |R_i(x, y)|$ a ε_1 budiž řešením systému $\mathrm{L}_i[\varepsilon_1] = -Mh^2$, $i = 1, 2, 3$. Zřejmě platí $\mathrm{L}_i[\varepsilon_1] \leqq -|\mathrm{L}_i[\varepsilon]|$, $i = 1, 2, 3$ a tedy podle lemmatu 4. je $|\varepsilon(x, y)| \leqq \varepsilon_1$, takže stačí odhadnout ε_1. Buďte dále ε_2 a ε_3 řešeními systémů $\mathrm{L}_1[\varepsilon_2] = -Mh^2$, $\mathrm{L}_i[\varepsilon_2] = 0$, $i = 2, 3$; $\mathrm{L}_1[\varepsilon_3] = 0$, $\mathrm{L}_i[\varepsilon_3] = -Mh^2$, $i = 2, 3$, takže $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Položme dále

$$\varepsilon_4(x, y) = \frac{1}{2} M\left(x(a - x) + \frac{a}{s}\right) h^2.$$

Jak se snadno zjistí přímým výpočtem, platí $\mathrm{L}_1[\varepsilon_4] = -Mh^2$, $\mathrm{L}_i[\varepsilon_4] \leqq 0$, $i = 2, 3$. Položme $t = \varepsilon_2 - \varepsilon_4$. Pak pro t platí $\mathrm{L}_1[t] = 0$, $\mathrm{L}_i[t] \geqq 0$, $i = 2, 3$ a tedy podle lemmatu 3. je $t \leqq 0$ a $\varepsilon_2 \leqq \varepsilon_4$. Pro ε_3 platí podle lemmatu 5. odhad $\varepsilon_3 \leqq Mh^2$, takže celkem

$$|\varepsilon(x, y)| \leqq \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \leqq Mh^2 + \frac{1}{2} M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a}{s}\right) h^2 = Kh^2,$$

kde K nezávisí na h, což dokazuje větu.

5. Numerický příklad

Je řešena rovnice pro vedení tepla (1) v oblasti $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0; 0{,}24\rangle$ při počáteční podmínce $u(x, 0) = e^x$ a okrajových podmínkách $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = e^t$, $\frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = e^{t+1}$. Přesné řešení je v tomto případě e^{x+t}. Výsledky jsou uspořádány v následující tabulce:

t \ x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,012	1,0209 1,0120 1,0121	1,2371 1,2361 1,2361	1,5098 1,5098 1,5098	1,8441 1,8440 1,8441	2,2549 2,2523 2,2524	2,7734 2,7510 2,7511
0,024	1,0359 1,0242 1,0243	1,2540 1,2510 1,2511	1,5284 1,5280 1,5281	1,8673 1,8662 1,8664	2,2872 2,2794 2,2796	2,8139 2,7841 2,7843

t \ x	1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,036	1,0505 1,0365 1,0367	1,2709 1,2660 1,2662	1,5479 1,5464 1,5465	1,8917 1,8887 1,8889	2,3192 2,3068 2,3071	2,8531 2,8177 2,8179
. . .						
0,216	1,2898 1,2403 1,2411	1,5541 1,5150 1,5159	1,8885 1,8505 1,8515	2,3067 2,2603 2,2614	2,8259 2,7609 2,7621	3,4671 3,3723 3,3737
0,228	1,3077 1,2552 1,2561	1,5752 1,5332 1,5342	1,9137 1,8728 1,8739	2,3371 2,2875 2,2887	2,8626 2,7941 2,7955	3,5116 3,4130 3,4144
0,240	1,3258 1,2703 1,2712	1,5965 1,5517 1,5527	1,9392 1,8953 1,8965	2,3678 2,3151 2,3164	2,8997 2,8278 2,8292	3,5565 3,4541 3,4556

kde vždy v prvém řádku je přibližné řešení s okrajovými podmínkami (6) z 1. spočítané ze sítě o parametrech $h = 0,1$; $\beta = 0,3$, ve druhém řádku je přibližné řešení s okrajovými podmínkami (19) z 2. spočítané ze sítě $h = 0,2$; $\beta = 0,3$, ve třetím řádku je přesné řešení. Z tabulky je vidět, že i při počítání přibližného řešení při okrajových podmínkách (6) ze zjemněné sítě, kde za prostorový resp. časový interval bereme polovinu resp. čtvrtinu původních, dostáváme horší výsledky než při daleko méně pracném numerickém výpočtu přibližného řešení z původní sítě a okrajových podmínek (19).

LITERATURA

[1] *W. E. Milne:* Numerical Solution od Differential Equations. New York, London 1953.

[2] *E. Batschelet:* Über die numerische Auflösung von Randwertproblemen bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen. ZAMP 3 (1952), 165—193.

[3] *Д. Ю. Панов:* Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. ГИТТЛ, Москва—Ленинград 1951.

[4] *L. Collatz:* Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Berlin — Göttingen — — Heidelberg 1951.

[5] *C. M. Fowler:* Analysis of Numerical Solutions of Transient Heat — Flow Problems Quart. Appl. Math. 3 (1946).

Резюме

ВЛИЯНИЕ ФОРМУЛИРОВКИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ НА БЫСТРОТУ СХОДИМОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МЕТОДОМ СЕТОК

ЭМИЛЬ ВИТАСЕК (Emil Vitásek)

(Поступило в редакцию 31/VIII 1956 г.)

При решении дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического и параболического типа методом сеток обычно, переписывая краевые условия, содержащие производные, поступают таким образом, что производные просто заменяют соответствующими разностями. Такой способ мы не считаем подходящим, потому что при нем возникает некоторая неоднородность по отношению к степени аппроксимации производных. Дифференциальный оператор внутри области заменяем разностным оператором с точностью h^2, где h — величина глаза сетки, в то время как первые производные в краевых условиях аппроксимируем разностями с точностью h. Этим способом можно в действительности — и при условии достаточной гладкости решения — получить быстроту сходимости приближенного решения к точному решению порядка h (теорема 1. и 2.). Интерполирование первой производной в краевых условиях параболой является также неудобным, по крайней мере в случае уравнения теплопроводности, потому что тогда становится возможным такой случай: имеется конечный стержень, на концах изолированный от тепла, с положительной начальной температурой, а соответствующее решение, полученное методом сеток, достигнет при любом h по истечении определенного времени отрицательных значений (теорема 3.). Формулы (19), соотв. (20) представляют краевые условия для разностного уравнения (4), решение которого является приближенным решением уравнения (1) при условиях (17), соотв. (18), h, τ суть, соотв., пространственный интервал и интервал времени сетки, $\beta = \frac{\tau}{h^2}$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$, такие, что соответствующая ошибка при условии достаточной гладкости решения стремится к нулю так же, как h^2. Формулы (30), (31), соответственно (32), (33) представляют краевые условия разностного уравнения (28), аппроксимирующего уравнение (24) с краевыми уловиями (26), соответственно (27), а формулы (37) — краевые условия разностного уравнения (36), аппроксимирующего уравнение (34) с краевыми условиями (35), обладающие также тем свойством, что ошибка, опять-таки при условии достаточной гладкости решения, имеет порядок h^2. Наконец, приводится численный пример, а именно

решение уравнения (1) в интервале $\langle 0,1\rangle \times \langle 0;\ 0,24\rangle$ при начальном условии $u(x,\ 0) = e^x$ и краевых условиях $\frac{\partial u}{\partial x}(0,\ t) = e^t$, $\frac{\partial u}{\partial x}(1,\ t) = e^{t+1}$. Точным решением является e^{x+t}. Результаты вынесены в таблице в отделе **5.**; в первой строчке приводится всегда приближенное решение с краевыми условиями (6),(т. е. с предписанными первыми разностями по краям), вычисленное по сетке с параметрами $h = 0,1$; $\beta = 0,3$, во второй строчке приведено приближенное решение с краевыми условиями (19), вычисленное по сетке $h = 0,2$; $\beta = 0,3$, в третьей строчке — точное решение. Из таблицы видно, что при вычислении приближенного решения при краевых условиях (6) и по уплотненной сетке, где в качестве пространственного интервала, соответственно, интервала времени берется половина, соотв. даже четверть первоначальных интервалов, получаем результаты гораздо хуже, чем при значительно менее требовательном вычислении приближенного решения по первоначальной сетке и краевым условиям (19).

Zusammenfassung

EINFLUSS DER FORMULIERUNG DER RANDBEDINGUNGEN AUF DIE KONVERGENZGESCHWINDIGKEIT BEI DER LÖSUNG VON PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MITTELS DER DIFFERENZENMETHODE

EMIL VITÁSEK

(Eingegangen am 31. August 1956.)

Bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen des elliptischen und parabolischen Types mittels der Differenzenmethode geht man gewöhnlich bei der Formulierung der Randbedingungen so vor, dass man einfach die Ableitungen durch die zugehörigen Differenzen ersetzt. Wir halten diesen Verlauf für unzweckmässig, und zwar desswegen, weil wir dabei eine gewisse Unhomogenität bezüglich des Grades der Ableitungsapproximation begehen. Wir ersetzen nämlich den Differentialoperator innerhalb des Gebietes durch den Differenzenoperator mit der Genauigkeit h^2, wo h die Grösse der Masche ist, wogegen wir die ersten Ableitungen in den Randbedingungen durch die Differenzen mit der Genauigkeit h approximieren. Dieser Verlauf kann wirklich, auch bei der Voraussetzung der genügenden Glätte der Lösung, die Geschwindigkeit der Konvergenz der Approximationslösung zu der genauen Lösung wie h geben. (Satz 1. und 2.) Es ist ebenfalls unzweckmässig die erste Ableitung in den Randbedingungen durch eine Parabel zu interpolieren, zu mindenstens

bei der Wärmeleitungsgleichung, weil dann der Fall des endlichen Stabes mit den wärmisolierenden Rändern und mit der positiven Anfangstemperatur eintreten kann, wobei die zugehörige Differenzenlösung bei jedem h nach gewisser Zeit negative Werte erreicht. (Satz 3.) Die Lösung der Differenzengleichung (4) mit den Randbedingungen (19) resp. (20) stellt die annähernde Lösung der Gleichung (1) mit den Bedingungen (17) resp. (18) vor. (h, τ sind die Raum bzw. Zeitintervalle des Netzes $\tau = \beta h^2$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$). Diese annähernde Lösung konvergiert bei der Voraussetzung von genügender Glätte zu der genauen Lösung wie h^2. Die Formeln (30), (31) bzw. (32), (33) sind die Randbedingungen der Differenzengleichung (28), die die Gleichung (24) für die Randbedingungen (26) bzw. (27) approximiert und die Formeln (37) sind die Randbedingungen der Differenzengleichung (36), die die Gleichung (34) für die Bedingungen (35) approximiert, wobei sie solche Eigenschaften besitzen, dass der Fehler, unter der Voraussetzung der genügenden Glätte, von der Ordnung h^2 ist.

In dem letzten Paragraphen führen wir ein numerisches Beispiel — die Lösung der Gleichung (1) im Intervalle $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0; 0,24 \rangle$ mit den Anfangsbedingung $u(x, 0) = e^x$ und den Randbedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = e^t, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = e^{t+1}$$

— an. Die Ergebnisse sind in der Tabelle in 5. aufgestellt. In der ersten Zeile steht die annähernde, aus dem Netze mit den Parametern $h = 0,1$; $\beta = 0,3$ berechnete Lösung mit den Randbedingungen (6) (d. i. mit den am Rande vorgeschriebenen ersten Differenzen). In der zweiten Zeile steht die annähernde aus dem Netze $h = 0,2$; $\beta = 0,3$ berechnete Lösung mit den Randbedingungen (19), in der dritten Zeile die genaue Lösung. Man sieht aus der Tabelle, dass wir beim Berechnen der annähernden Lösung mit den Randbedingungen (19) bessere Resultate erhalten, als bei der viel mühsameren Berechnung der annähernden Lösung mit den Randbedingungen (6) und bei Benützung des verfeinerten Netzes, wo man für das Raum — resp. Zeitintervall die Hälfte resp. das Viertel des ursprünglichen Intervalles nimmt.