František Zítek

Příspěvek k theorii smíšených systémů hromadné obsluhy

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 2, 154–159

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102562`

PŘÍSPĚVEK K THEORII SMÍŠENÝCH SYSTÉMŮ HROMADNÉ OBSLUHY

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Došlo dne 28. dubna 1956.) DT:519.21:621.395.34

V článku je řešen známý Erlangův problém theorie hromadné obsluhy v případě smíšeného systému (s čekáním i se ztrátami), kde počet čekajících je omezen. Výsledky jsou přímým zobecněním výsledků známých pro oba jednotlivé typy systémů.

1. V monografii [1] věnované problémům systémů hromadné obsluhy studuje Chinčin systémy se ztrátami a systémy s čekáním, a to oba typy odděleně; současně však upozorňuje na možnost existence systémů smíšeného typu ([1], str. 56). Zatím co theorie systémů „čistých" typů — zejména čekacích — je dnes již více než bohatě rozvinuta, nebyla studiu smíšených systémů dosud věnována taková pozornost.[1])

V celém článku budeme užívati pojmů, termínů, symbolů a označení zavedených v [1], kde čtenář najde všechny potřebné definice a vysvětlení.

2. Budeme uvažovati nejjednodušší systém s n navzájem rovnocennými linkami (полнодоступный пучок n линий), charakterisovaný exponenciálním rozložením délek intervalů mezi voláními (s parametrem λ), exponenciálním rozložením délek hovorů (s parametrem β) a touto čekací disciplinou: při obsazení všech linek čekají další volání v jednoduché frontě, avšak nejvýše v počtu r. Jakmile ve frontě čeká již r volání, jsou další odmítána, aniž by byla obsloužena. Čekající volání obsazují uvolněné linky v pořadí příchodu do fronty ihned po skončení předcházejícího hovoru.

3. Prvým naším úkolem bude *řešení Erlangova problému* pro náš systém. Základní Erlangovu soustavu diferenciálních rovnic pro pravděpodobnosti $\mathsf{P}_k(t)$ si sestavíme snadno; bude to

---

[1]) Na existenci práce [2] byl autor upozorněn teprve recensentem po odevzdání rukopisu redakci.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}_0'(t) &= -\lambda \mathsf{P}_0(t) + \beta \mathsf{P}_1(t) \\
\mathsf{P}_1'(t) &= \lambda \mathsf{P}_0(t) - (\lambda + \beta)\, \mathsf{P}_1(t) + 2\beta \mathsf{P}_2(t) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathsf{P}_{n-1}'(t) &= \lambda \mathsf{P}_{n-2}(t) - [\lambda + (n-1)\,\beta]\, \mathsf{P}_{n-1}(t) + n\beta \mathsf{P}_n(t) \\
\mathsf{P}_n'(t) &= \lambda \mathsf{P}_{n-1}(t) - (\lambda + n\beta)\, \mathsf{P}_n(t) + n\beta \mathsf{P}_{n+1}(t) \qquad (1) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathsf{P}_{n+r-1}'(t) &= \lambda \mathsf{P}_{n+r-2}(t) - (\lambda + n\beta)\, \mathsf{P}_{n+r-1}(t) + n\beta \mathsf{P}_{n+r}(t) \\
\mathsf{P}_{n+r}'(t) &= \lambda \mathsf{P}_{n+r-1}(t) - n\beta \mathsf{P}_{n+r}\,(t)\,.
\end{aligned}
$$

V důsledku Markovovy věty, která zřejmě platí i v našem případě, dostaneme odtud pro limitní pravděpodobnosti p_k soustavu algebraických lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
-\lambda p_0 + \beta p_1 &= 0\,, \\
\lambda p_{k-1} - (\lambda + k\beta)\, p_k + (k+1)\, \beta p_{k+1} &= 0\,, \quad 0 < k < n\,, \\
\lambda p_{k-1} - (\lambda + n\beta)\, p_k + n\beta p_{k+1} &= 0\,, \quad n \leqq k < n + r\,, \qquad (2) \\
\lambda p_{n+r-1} - n\beta p_{n+r} &= 0\,,
\end{aligned}
$$

spolu s normovací podmínkou

$$\sum_{k=0}^{n+r} p_k = 1\,. \tag{3}$$

K řešení soustavy (2) použijeme stejného obratu jako v [1] a dostaneme tak pro p_k výrazy

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\beta^k\,.\,k!}\, p_0\,, \quad 1 \leqq k \leqq n\,, \tag{4}$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\beta^k n! n^{k-n}} \cdot p_0\,, \quad n \leqq k \leqq n + r\,. \tag{5}$$

Poslední vzorec lze psáti též ve tvaru

$$p_{k+n} = p_n \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k, \quad 0 \leqq k \leqq r\,. \tag{5'}$$

Přitom p_0 určíme z (3) jako

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{\beta^k k!} + \frac{\lambda^n}{\beta^n\,.\,n!} \sum\limits_{k=1}^{r} \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k}\,. \tag{6}$$

Odtud pak ihned plyne:

1. Pravděpodobnost odmítnutí volání je přímo

$$p_{n+r} = p_0 \cdot \frac{\lambda^{n+r}}{\beta^{n+r}\,.\,n!\,.\,n^r}\,; \tag{7}$$

2. Pravděpodobnost okamžitého hovoru bez čekání je rovna

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{\beta^k k!} ; \tag{8}$$

3. Pravděpodobnost čekání vůbec je dána součtem

$$\sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k} = p_n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k = p_n \cdot \frac{1 - \left(\dfrac{\lambda}{n\beta}\right)^r}{1 - \dfrac{\lambda}{n\beta}} . \tag{9}$$

4. Dalším naším úkolem bude *odvození zákona rozložení délky doby čekání* γ. Stejným postupem jako v [1], § 35, dostaneme i v našem případě

$$\mathsf{P}\{\gamma > t\} = \sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k} \cdot \mathsf{P}_{n+k}(\gamma > t) , \tag{10}$$

kde $\mathsf{P}_{n+k}(\gamma > t)$, $k = 0, 1, \ldots, r-1$ je, jako v [1], podmíněná pravděpodobnost jevu $\{\gamma > t\}$ za předpokladu, že volání je $(k+1)$-vé ve frontě. Pravděpodobnosti $\mathsf{P}_{n+k}(\gamma > t)$ jsou, jak vyplývá z předpokladu exponenciálního zákona rozložení délek hovorů, dány výrazy

$$\mathsf{P}_{n+k}(\gamma > t) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{e}^{-n\beta t} \frac{(n\beta t)^j}{j!} = \int_t^\infty (n\beta)^{k+1} \mathrm{e}^{-n\beta z} \frac{z^k}{k!} \, \mathrm{d}z = \int_{n\beta t}^\infty \mathrm{e}^{-y} \frac{y^k}{k!} \, \mathrm{d}y . \tag{11}$$

Odtud pak

$$\mathsf{P}\{\gamma > t\} = \sum_{k=0}^{r-1} p_n \frac{\lambda^k}{n^k \beta^k} \cdot \left(\int_t^\infty (n\beta)^{k+1} \mathrm{e}^{-n\beta z} \frac{z^k}{k!} \, \mathrm{d}z \right) = p_n \cdot n\beta \cdot \int_t^\infty \mathrm{e}^{-n\beta z} \left(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \right) \mathrm{d}z . \tag{12}$$

Při $r \to \infty$ dostáváme limitním přechodem, který je oprávněný za předpokladu $\lambda < n\beta$,

$$\lim \mathsf{P}\{\gamma > t\} = p_n \cdot n\beta \cdot \int_t^\infty \mathrm{e}^{-(n\beta - \lambda) z} \, \mathrm{d}z = p_n \cdot \frac{n\beta \cdot \mathrm{e}^{-(n\beta-\lambda)t}}{n\beta - \lambda} = p_n \cdot \mathrm{e}^{-(n\beta-\lambda)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{n\beta}} , \tag{13}$$

tedy výsledek shodný s výsledkem na str. 101 v [1], platným pro případ neomezené fronty.

Při konečném r a $t = 0$ dostáváme z (12)

$$\mathsf{P}\{\gamma > 0\} = p_n \sum_{k=0}^{r-1} \left[\left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y} \frac{y^k}{k!} \, \mathrm{d}y \right] = p_n \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k = \sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k} , \tag{14}$$

t. j. pravděpodobnost čekání vůbec. Ježto pak kromě toho je

$$\mathsf{P}\{\gamma = 0\} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k , \tag{15}$$

je vzhledem k (7), (8) a (9) distribuční funkce čekací doby γ (za předpokladu, že volání skutečně čekalo) dána výrazem

$$F(t) = 1 - \frac{\mathsf{P}\{\gamma > t\}}{\sum_{k=0}^{r-1} p_{n+k}} , \quad t \geqq 0 . \tag{16}$$

Distribuční funkci (16) odpovídá frekvenční funkce

$$f(t) = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda^k t^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{\lambda}{n\beta}\right)^k} e^{-n\beta t} n\beta , \tag{17}$$

jež po transformaci $z = n\beta t$, $\frac{\lambda}{n\beta} = \delta$ přejde na jednodušší tvar

$$g(z) = e^{-z} . \frac{1 - \delta}{1 - \delta^r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\delta^k z^k}{k!} . \tag{18}$$

5. Určíme si dále *střední dobu čekání*. Bude to

$$\mathsf{E}\gamma = \int_0^\infty t . f(t) \, dt = \frac{1}{n\beta} \int_0^\infty z \, g(z) \, dz , \tag{19}$$

takže podle (18) máme

$$\mathsf{E}\gamma = \frac{1}{n\beta} . \frac{1 - \delta}{1 - \delta^r} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\delta^k}{k!} \int_0^\infty z^{k+1} e^{-z} \, dz = \frac{1}{n\beta} . \frac{1 - \delta}{1 - \delta^r} . \sum_{k=0}^{r-1} (k + 1) \, \delta^k . \tag{20}$$

V případě neomezené fronty má, jak známo z [1], γ rozložení exponenciální s frekvenční funkcí $(n\beta - \lambda) \, e^{-(n\beta - \lambda)t}$, a tedy střední hodnotu $(n\beta - \lambda)^{-1}$, platí ovšem $\delta < 1$. Za stejného předpokladu, t. j. opět $\lambda < n\beta$, máme pak z (20)

$$\lim_{r \to \infty} \mathsf{E}\gamma = \frac{1}{n\beta} (1 - \delta) . \sum_{k=0}^{\infty} \delta^k (k + 1) = (n\beta - \lambda)^{-1} , \tag{21}$$

výsledky se tedy shodují.

6. Abychom mohli lépe porovnati, jak se navzájem liší systémy s omezenou frontou a s neomezenou frontou, byly napočteny některé numerické hodnoty, a to jednak střední doby čekání, jednak pravděpodobnosti odmítnutí. Jsou uvedeny v připojených tabulkách pro tyto hodnoty parametrů: $n = 10$,

$\beta = 1$, $\lambda = 1, 2, \ldots, 9$, $r = 0, 2, 5, 10, 15, 20, \infty$. Tabulky II (resp. analogických tabulek pro jiné hodnoty n) lze m. j. použíti na př. k určení maximální přípustné konečné délky fronty pro dané λ a danou pravděpodobnost odmítnutí.

Jak vyplývá z obou tabulek, postačí k dosažení vlastností blízkých vlastnostech systémů s neomezenou frontou při „středních" hodnotách λ (t. j. $\lambda \doteq 4$ až 6) již $r \doteq 10$.

I. Tabulka středních dob čekání.

λ \ r	2	5	10	15	20	∞
1	0,109 091	0,111 106	0,111 111	0,111 111	0,111 111	0,111 111
2	0,116 667	0,124 840	0,125 000	0,125 000	0,125 000	0,125 000
3	0,123 077	0,141 639	0,142 851	0,142 857	0,142 857	0,142 857
4	0,128 571	0,161 494	0,166 562	0,166 665	0,166 667	0,166 667
5	0,133 333	0,183 871	0,199 022	0,199 954	0,199 998	0,200 000
6	0,137 500	0,207 842	0,243 917	0,249 294	0,249 927	0,250 000
7	0,141 176	0,232 321	0,304 265	0,326 178	0,331 736	0,333 333
8	0,144 444	0,256 307	0,379 710	0,445 299	0,476 673	0,500 000
9	0,147 368	0,279 029	0,464 660	0,611 090	0,723 193	1,000 000

Pro $r = 0$ je ovšem $\mathbf{E}\gamma$ stále rovno nule.

II. Tabulka pravděpodobností odmítnutí.

λ \ r	0	2	5	10	15	20
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,0053	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,0184	0,0045	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,0431	0,0149	0,0032	0,0002	0,0000	0,0000
7	0,0787	0,0353	0,0115	0,0019	0,0003	0,0001
8	0,1217	0,0663	0,0300	0,0091	0,0029	0,0009
9	0,1680	0,1057	0,0613	0,0295	0,0157	0,0088

Pro $r = \infty$ je pravděpodobnost odmítnutí vždy rovna nule.

LITERATURA

[1] *А. Я. Хинчин:* Математические методы теории массового обслуживания; Труды Матем. Института им. В. А. Стеклова, XLIX, Москва 1955.

[2] *H. Störmer:* Wartezeitlenkung in handbedienten Vermittlungsanlagen; Archiv der elektrischen Übertragung, 10 (1956), 58—64.

Резюме

К ТЕОРИИ СМЕШАННЫХ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek)

(Поступило в редакцию 28/IV 1956 г.)

В работе решена задача Эрланга для смешанной системы (см. [1], стр. 56) в случае простейшего потока вызовов и полнодоступного пучка n линий, причем число ожидающих ограничено ($\leqq r$). Получены вероятности потери (7) и распределение времени ожидания (16)—(18). В таблицах даны: I среднее время ожидания и II вероятности потери, в случае $n = 10$, $\beta = 1$ для некоторых значений r и λ.

Zusammenfassung

ZUR THEORIE DER GEMISCHTEN WARTESYSTEME

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Eingegangen am 28. April 1956.)

In dieser Arbeit wird das Erlangsche Problem für den Fall eines gemischten Wartesystems gelöst (s. [1], S. 56), in welchem die Anzahl der Wartenden begrenzt ($\leqq r$) ist. Es werden die Verlustwahrscheinlichkeiten (7) und die Wartezeitverteilung (16)—(18) abgeleitet. Numerische Werte der mittleren Wartezeiten (I) und der Verlustwahrscheinlichkeiten (II) sind für den Fall $n = 10$, $\beta = 1$ für einige Werte der Parameter λ und r in zwei Tabellen angegeben.