Anselm Kovář

Moment tuhosti v kroucení pravidelného pětiúhelníka

*Aplikace matematiky*, Vol. 2 (1957), No. 1, 58–65

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102553

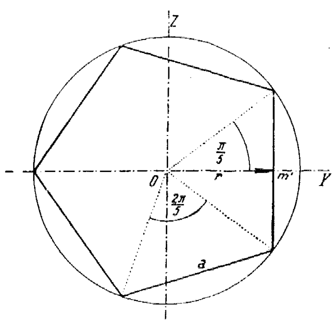
# MOMENT TUHOSTI V KROUCENÍ PRAVIDELNÉHO PĚTIÚHELNÍKA

ANSELM KOVÁŘ

(Došlo dne 20. června 1956.) DT:539.55:539.385:513.19

V příspěvku je podle theorie C. Webera vyřešena prostá pružnost v kroucení prismatického prutu o průřezu pravidelného pětiúhelníka. Podán je podrobný výpočet momentu tuhosti v kroucení a největšího tangenciálného napětí tohoto průřezu, tedy veličin, jichž je nutně třeba při návrhu nebo posouzení průřezu. Získané výsledky jsou stanoveny s přesností na čtyři desetinná místa.

Technicky přesný způsob výpočtu momentu tuhosti v kroucení a největšího tangenciálného napětí pravidelných mnohoúhelníků, namáhaných prostou pružností v kroucení, odvodil C. WEBER. Tento způsob pak aplikoval na čtverec, pravidelný šestiúhelník a osmiúhelník.[1]) V tomto pojednání podávám jako doplněk k Weberově práci řešení pravidelného pětiúhelníka (obr. 1).




Obr. 1.

Největší tangenciálné napětí v pravidelném mnohoúhelníku působí uprostřed jeho stran a je dáno výrazem

$$\max \tau = -\frac{G\vartheta r}{2}\left[2 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{mnC_{mn}}{(mn)!}\right], \qquad (1)$$

moment tuhosti v kroucení pak výrazem

$$J_k = r^4 n \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m mn}{(mn+1)(mn+2)\cos\dfrac{mn\pi}{n}}\cdot\frac{C_{mn}}{(mn)!}\right], \qquad (2)$$

kde $G$ značí modul pružnosti ve smyku, $\vartheta$ poměrný úhel zkroucení, $n$ počet

[1]) C. Weber, Die Lehre der Drehungsfestigkeit (Berlín 1921, str. 34 až 38). — A. Kovář, Theorie kroucení (Praha 1954, str. 132 až 151).

stran mnohoúhelníka a $r$ poloměr kružnice jemu vepsané. $C_{mn}$ a $C_0$ jsou stálé veličiny, jež plynou ze soustavy rovnic

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{(mn)!} = C_0 - 1\,, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{(mn-2)!} = 2\,,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{(mn-4)!} = 0\,, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{(mn-6)!} = 0\,,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{mn}}{(mn-8)!} = 0\,, \quad \ldots \text{ atd.}, \tag{3}$$

kde $n = 5$ a za $m$ postupně dosazujeme $m = 1, 2, 3$ atd., stejně jako v nekonečných řadách výrazů (1) a (2).

Při výpočtu neznámých veličin $C_{mn}$ se omezíme pouze na prvé čtyři, t. j. na $C_5$, $C_{10}$, $C_{15}$ a $C_{20}$, poněvadž již veličina $C_{20}$, jak z dalšího řešení seznáme, nemá na přesnost řešení podstatného vlivu. Tak dostaneme soustavu pěti rovnic

$$\frac{C_5}{5!} + \frac{C_{10}}{10!} + \frac{C_{15}}{15!} + \frac{C_{20}}{20!} = C_0 - 1\,,$$

$$\frac{C_5}{3!} + \frac{C_{10}}{8!} + \frac{C_{15}}{13!} + \frac{C_{20}}{18!} = 2\,,$$

$$C_5 + \frac{C_{10}}{6!} + \frac{C_{15}}{11!} + \frac{C_{20}}{16!} = 0\,,$$

$$\frac{C_{10}}{4!} + \frac{C_{15}}{9!} + \frac{C_{20}}{14!} = 0\,,$$

$$\frac{C_{10}}{2!} + \frac{C_{15}}{7!} + \frac{C_{20}}{12!} = 0\,.$$

Za neznámé považujme tu vedle $C_0$ hodnoty $\frac{C_{mn}}{mn!}$, obsažené v rovnici prvé a ve výrazech (1) a (2). Vzhledem k tomu ostatní rovnice patřičně přepišme. Původní soustava nabude pak znění

$$\frac{C_5}{5!} + \frac{C_{10}}{10!} + \frac{C_{15}}{15!} + \frac{C_{20}}{20!} = C_0 - 1\,,$$

$$\frac{5!}{3!} \cdot \frac{C_5}{5!} + \frac{10!}{8!} \cdot \frac{C_{10}}{10!} + \frac{15!}{13!} \cdot \frac{C_{15}}{15!} + \frac{20!}{18!} \cdot \frac{C_{20}}{20!} = 2\,,$$

$$5! \cdot \frac{C_5}{5!} + \frac{10!}{6!} \cdot \frac{C_{10}}{10!} + \frac{15!}{11!} \cdot \frac{C_{15}}{15!} + \frac{20!}{16!} \cdot \frac{C_{20}}{20!} = 0\,,$$

$$\frac{10!}{4!} \cdot \frac{C_{10}}{10!} + \frac{15!}{9!} \cdot \frac{C_{15}}{15!} + \frac{20!}{14!} \cdot \frac{C_{20}}{20!} = 0\,,$$

$$\frac{10!}{2!} \cdot \frac{C_{10}}{10!} + \frac{15!}{7!} \cdot \frac{C_{15}}{15!} + \frac{20!}{12!} \cdot \frac{C_{20}}{20!} = 0\,.$$

Dosazením za faktoriály v součinitelech při neznámých a zjednodušením druhé až páté rovnice lze soustavě dát posléze příhodný tvar

$$\frac{C_5}{5!} + \frac{C_{10}}{10!} + \frac{C_{15}}{15!} + \frac{C_{20}}{20!} = C_0 - 1\,,$$

$$\frac{C_5}{5!} + 4{,}5\frac{C_{10}}{10!} + 10{,}5\frac{C_{15}}{15!} + 19\frac{C_{20}}{20!} = 0{,}1\,,$$

$$\frac{C_5}{5!} + 42\frac{C_{10}}{10!} + 273\frac{C_{15}}{15!} + 969\frac{C_{20}}{20!} = 0\,,$$

$$42\frac{C_{10}}{10!} + 1001\frac{C_{15}}{15!} + 7752\frac{C_{20}}{20!} = 0\,,$$

$$3\frac{C_{10}}{10!} + 429\frac{C_{15}}{15!} + 8398\frac{C_{20}}{20!} = 0\,.$$

Methodou postupného vylučování neznámých dospějeme pak k hodnotám

$$C_0 - 1 = \frac{106\,587{,}032}{3\,.\,19\,.\,16\,605}\,,$$

$$\frac{C_5}{5!} = \frac{1936{,}844}{16\,605} = \frac{7\,.\,276{,}692}{16\,605}\,,$$

$$\frac{C_{10}}{10!} = -\frac{213{,}928}{3\,.\,16\,605} = -\frac{11\,.\,19{,}448}{3\,.\,16\,605}\,,$$

$$\frac{C_{15}}{15!} = \frac{4{,}624}{16\,605} = \frac{17\,.\,0{,}272}{15\,.\,1107}\,,$$

$$\frac{C_{20}}{20!} = -\frac{4{,}004}{19\,.\,16\,605} = -\frac{11\,.\,0{,}364}{5\,.\,19\,.\,3321}\,, \tag{4}$$

jež přesně vyhovují všem rovnicím původní i zjednodušené soustavy rovnic.

Největší tangenciálné napětí průřezu se vypočte z výrazu (1), jenž v daném případě (pro $n = 5$, $m = 1, 2, 3, 4$) má tvar

$$\max \tau = \frac{G\vartheta r}{2}\left(2 + 5\frac{C_5}{5!} + 10\frac{C_{10}}{10!} + 15\frac{C_{15}}{15!} + 20\frac{C_{20}}{20!}\right).$$

Po dosazení za veličiny $C_{mn}$ plyne vzorec

$$\max \tau = \frac{192\,643}{9{,}12\,.\,16\,605}\,G\vartheta r = 1{,}2721 G\vartheta r. \tag{5a}$$

Jelikož poloměr vepsané kružnice a strana pravidelného pětiúhelníka jsou v závislosti

$$r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{5}}\,,$$

lze psáti

$$\max \tau = 0{,}8754 G\vartheta a\,. \tag{5b}$$

K výpočtu momentu tuhosti v kroucení je třeba znát goniometrické funkce úhlu $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{5}$, vyskytující se ve výrazu (2). Poněvadž však přesnost tohoto výpočtu značně klesá ztrátou desetinných míst, určíme ony goniometrické funkce a jejich mocniny přesně.

Funkci $\cos \frac{\pi}{5}$ stanovíme užitím známého výrazu pro funkci dvou úhlů[2])

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta) ,$$

kde dosadíme $\alpha = \pi$, $\beta = \frac{\pi}{5}$. Jelikož $\sin \pi = 0$, vyjde rovnice

$$- \sin \frac{\pi}{5} = 2 \cos \frac{3\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} .$$

Za goniometrické funkce násobku úhlu $\frac{\pi}{5}$ dosaďme sem ze závislostí[2])

$$\sin \frac{2\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} ,$$

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5} \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 3\right) .$$

Zjednodušením a úpravou dospějeme k rovnici 4. stupně

$$\cos^4 \frac{\pi}{5} - \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\pi}{5} + \frac{1}{16} = 0 ,$$

jejíž platný kořen

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} = \frac{3 + \sqrt{5}}{8} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 .$$

Je tudíž

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} .$$

Dále je

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{5}}}{\cos \frac{\pi}{5}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \doteq 0{,}72\,654 ,$$

$$\cos^5 \frac{\pi}{5} = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{64} , \quad \cos^{10} \frac{\pi}{5} = \frac{123 + 55\sqrt{5}}{2048} ,$$

$$\cos^{15} \frac{\pi}{5} = \frac{682 + 305\sqrt{5}}{16 \, . \, 2048} , \quad \cos^{20} \frac{\pi}{5} = \frac{15\,127 + 6765\sqrt{5}}{16 \, . \, 64 \, . \, 2048} ,$$

kde $\sqrt{5} = 2{,}2360\,679\,774\,998$.

[2]) Technický průvodce, Matematika (Praha 1944, str. 35 a 36).

Tím jsme určili všechny veličiny i funkce potřebné k výpočtu momentu tuhosti v kroucení. Z důvodu jednoduššího psaní dejme výrazu (2) pro $n = 5$ a $m = 1, 2, 3, 4$ tvar

$$\frac{J_k}{5r^4 \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}} = \sum_{k=1}^{5} A_k \, , \tag{6}$$

kde v našem případě

$$A_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{5} \, , \quad A_2 = -\frac{5}{42 \cos^5 \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{C_5}{5!} \, ,$$

$$A_3 = \frac{5}{66 \cos^{10} \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{C_{10}}{10!} \, , \quad A_4 = -\frac{15}{272 \cos^{15} \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{C_{15}}{15!} \, ,$$

$$A_5 = \frac{10}{231 \cos^{20} \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{C_{20}}{20!} \, .$$

Dosadíme-li pak do těchto výrazů za mocniny goniometrických funkcí a za veličiny $C_{mn}$, plyne[3])

$$A_1 = \frac{4 - \sqrt{5}}{3} = 0{,}587\,977 \, ,$$

$$A_2 = \frac{11\,067{,}68}{5 \,.\, 9963} (11 - 5\sqrt{5}) = -\,0{,}040\,067 \, ,$$

$$A_3 = -\frac{24\,893{,}44}{5 \,.\, 123 \,.\, 243} (123 - 55\sqrt{5}) = -\,0{,}002\,709 \, ,$$

$$A_4 = \frac{557{,}056}{1107} (682 - 305\sqrt{5}) = -\,0{,}000\,369 \, ,$$

$$A_5 = -\frac{54\,525{,}952}{3 \,.\, 41 \,.\, 1539} (15\,127 - 6765\sqrt{5}) = -\,0{,}000\,038 \, .$$

---

[3]) Přesnost výpočtu momentu tuhosti v kroucení je značně ovlivněna ztrátou desetinných míst, k níž dochází, počítáme-li mocniny příslušných goniometrických funkcí argumentu $\frac{\pi}{5}$ z přibližných hodnot tabulkových nebo dosazujeme-li do přesných výrazů těchto funkcí a jejich mocnin za $\sqrt{5}$ hodnotu s malým počtem desetinných míst. Uvažujeme-li na př. tuto odmocninu pouze na čtyři desetinná místa, vyjde veličina $A_1 = 0{,}587\,966$, $A_2 = -\,0{,}040\,103$, $A_3 = -\,0{,}002\,499$, $A_4 = -\,0{,}005\,284$, $A_5 = +\,0{,}062\,362$ a moment tuhosti v kroucení $J_k = 2{,}1885\, r^4$, t. j. o 10,6% vyšší než je hodnota (7a), k níž dospějeme, dosadíme-li za onu odmocninu hodnotu s deseti nebo třinácti desetinnými místy.

Vychází tudíž součet

$$\sum_{k=1}^{5} A_k = 0{,}544\,794\,,$$

načež ze vzorce (6), dosadíme-li též za přicházející v něm tangentu, dostaneme moment tuhosti v kroucení

$$J_k = 1{,}9791 r^4\,. \tag{7a}$$

Vyjádříme-li posléze poloměr vepsané kružnice jako funkci strany pětiúhelníka, lze psát

$$J_k = 0{,}4439 a^4\,. \tag{7b}$$

Kroutící moment a moment tuhosti v kroucení jsou v závislosti

$$M_k = G\vartheta J_k\,,$$

z toho stálá veličina

$$G\vartheta = \frac{M_k}{J_k} = \frac{M_k}{1{,}9791 r^4} = \frac{M_k}{0{,}4439 a^4}\,. \tag{8}$$

Spojením výrazů (5) s (8) pak plyne napětí

$$\max \tau = 0{,}6428 \frac{M_k}{r^3} = 1{,}9721 \frac{M_k}{a^3}\,. \tag{9}$$

Tabulka pravidelných $n$-úhelníků

| $n$ | $W_k = \dfrac{M_k}{\max \tau}$ | $J_k = \dfrac{M_k}{G\vartheta}$ | $\dfrac{\max \tau}{G\vartheta}$ | Autor |
|---|---|---|---|---|
| 3 | $2{,}0785 r^3$ | $3{,}1177 r^4$ | $1{,}5000 r$ | Saint-Venant |
| 4 | $1{,}6654 r^3$ | $2{,}2493 r^4$ | $1{,}3506 r$ | Saint-Venant |
| 4 | $1{,}6711 r^3$ | $2{,}2558 r^4$ | $1{,}3500 r$ | C. Weber |
| 5 | $1{,}5558 r^3$ | $1{,}9791 r^4$ | $1{,}2721 r$ | A. Kovář |
| 6 | $1{,}5096 r^3$ | $1{,}8467 r^4$ | $1{,}2232 r$ | C. Weber |
| 8 | $1{,}4798 r^3$ | $1{,}7235 r^4$ | $1{,}1647 r$ | C. Weber |
| $\infty$ | $1{,}5708 r^3$ | $1{,}5708 r^4$ | $1{,}0000 r$ | L. Navier |

Připojená tabulka podává přehled nejdůležitějších výsledků z theorie kroucení pravidelných mnohoúhelníků. Její první sloupec obsahuje průřezové moduly $W_k$, důležité pro posudek nebo návrh těchto průřezů.

## Резюме

# МОМЕНТ СОПРОТИВЛЕНИЯ В КРУЧЕНИИ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

АНСЕЛМ КОВАРЖ (Anselm Kovář)

(Поступило в редакцию 20/VI 1956 г.)

Предлагаемая статья содержит технически точный расчет максимального касательного напряжения и момента сопротивления в кручении правильного пятиугольника. Решение основано на предположении свободной упругости и кручении и проведено методом Ц. Вебера. Таким образом, предлагаемое решение представляет собой дополнение его первоначальной работы.

Расчет постоянных $C_{mn}$ из системы уравнений (3) ограничен только на первые четыре члены из них бесконечного числа. При этом ограничении была выведена формула (5а) для максимального касательного напряжения решенного сечения. Для расчета момента сопротивления в кручении были требуемые тригонометрические функции аргумента $\frac{\pi}{5}$ и их степени определены точными результатами, потому что оказалось, что потеря десятичных мест оказывает большое влияние на точность решения.

## Zusammenfassung

# DAS TORSIONSWIDERSTANDSMOMENT DES REGELMÄSSIGEN FÜNFECKS

ANSELM KOVÁŘ

(Eingegangen am 20. Juni 1956.)

Die vorliegende Abhandlung enthält die technisch genaue Berechnung der grössten Tangentialspannung und des Torsionswiderstandsmomentes des regelmässigen Fünfecks. Die Lösung wurde unter der Voraussetzung der reinen Torsion nach der Methode von C. Weber durchgeführt, ist daher nur als eine teilweise Ergänzung seiner ursprünglichen Arbeit gedacht.

Die Bestimmung der konstanten Grössen $C_{mn}$ aus dem System der Gleichungen (3) wurde lediglich an die ersten vier Glieder von ihrer unendlichen Zahl beschränkt. Unter dieser Beschränkung wurde dann die Formel (5a) für

die grösste Tangentialbeanspruchung des behandelten Querschnitts ermittelt. Für die Berechnung des Torsionswiderstandsmomentes wurden die diesbezüglichen goniometrischen Funktionen des Argumentes $\frac{\pi}{5}$ und deren Potenzen durch genaue Werte ausgedrückt, da es sich gezeigt hat, dass die Genauigkeit der Lösung durch den Verlust der Dezimalstellen ziemlich beeinflusst wird, wenn man die tabellarischen Annäherungswerte benützt.