Aplikace matematiky

František Zítek

Některé analogie necentrálního t-testu

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 1, 38–46

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102551

NĚKTERÉ ANALOGIE NECENTRÁLNÍHO t-TESTU

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Došlo dne 27. března 1956.) DT:519.271

Článek pojednává o analogiích necentrálního t založených na jiných statistikách, než je obvykle používaná směrodatná odchylka. Je obecně odvozeno rozložení těchto modifikovaných t-statistik a jsou ukázány možnosti aplikací. Kromě toho jsou uvedeny kritické hodnoty pro test používající průměrné odchylky.

1. Úvod

Klasický Studentův t-test byl několikráte modifikován. Jednak již v roce 1939 JOHNSON a WELCH [4] prostudovali jeho necentrální analogii, jednak E. LORD [6], [7] v roce 1947 nahradil v centrálním t-testu výběrovou směrodatnou odchylku s výběrovým rozpětím R. Byla tu tedy celkem nasnadě myšlenka obě tyto modifikace spojit a nahradit s rozpětím i v necentrálním t-testu; to se mi podařilo v podstatě vyřešit v [10]. Kromě toho se tímto problémem zabývali u nás hlouběji též pracovníci statistického oddělení VÚTT [1]. Účelem tohoto článku je, podat zcela obecnou formulaci a řešení základního problému a současně ukázat některé známé i méně známé možnosti použití testů takto vytvořených.

Základní problém, z něhož se tu obvykle vychází, lze formulovati asi takto: je dán normální $N(\mu, \sigma)$ základní soubor s frekvenční funkcí

$$\varphi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.1}$$

s neznámými parametry μ a σ a dále konstanty T $(-\infty < T < \infty)$ a p $(0 < p < 1)$. Máme pak rozhodnouti, zda je správná hypothesa H_p vyjádřená nerovností

$$\int_T^\infty \varphi(x; \mu, \sigma) \, \mathrm{d}x \leqq p\,. \tag{1.2}$$

Jedno z možných řešení tohoto úkolu vede právě k použití necentrálního t a jeho modifikací.

2. Obecné *U*-rozložení

Budiž ξ_a náhodná proměnná normální s frekvenční funkcí $\varphi(x; a, 1)$. Budiž η nezáporná náhodná proměnná, stochasticky nezávislá na ξ_a, se spojitou distribuční funkcí $F(x)$. Distribuční funkci podílu

$$\frac{\xi_a}{\eta} \tag{2.1}$$

označme obecně $K(x; a, \eta)$.

Používajíce známého obratu (viz na př. [2]), odvodíme snadno výraz pro K:

$$K(x; a, \eta) = 1 - x\int_0^\infty F(y) \, . \, \varphi(xy - a; 0, 1) \, \mathrm{d}y \tag{2.2}$$

pro $x > 0$, kdežto pro $x < 0$ bude

$$K(x; a, \eta) = - x\int_0^\infty F(y) \, . \, \varphi(xy - a; 0, 1) \, \mathrm{d}y \tag{2.3}$$

a dále ovšem

$$K(0; a, \eta) = \int_{-\infty}^0 \varphi(x; a, 1) \, \mathrm{d}x \, . \tag{2.4}$$

Jak se snadno přesvědčíme, je distribuční funkce $K(x; a, \eta)$ při daném x monotonní — a to nerostoucí — funkcí argumentu a; tato vlastnost je ostatně zřejmá již z (2.1).

Rozložení s touto distribuční funkcí K budeme obecně v dalším nazývati U-rozložení.

3. Některé příklady *U*-rozložení

Označme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prvky prostého náhodného výběru o rozsahu n z normálního $N(\mu, \sigma)$ základního souboru; dále budiž

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{výběrový průměr} \, ,$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{výběrová směrodatná odchylka} \, ,$$

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \quad \text{výběrová průměrná odchylka} \, ,$$

$$R = \max_{1 \leq i \leq n} x_i - \min_{1 \leq i \leq n} x_i \quad \text{výběrové rozpětí} \, .$$

Obecně označíme pak S libovolnou výběrovou statistiku $S = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, která vyhovuje těmto podmínkám:

a) je nezáporná pro libovolné výběrové hodnoty x_i;

b) má spojitou distribuční funkci;

c) pro libovolné reálné a platí

$$S(x_1 + a, x_2 + a, \ldots, x_n + a) \equiv S(x_1, x_2, \ldots, x_n) .$$

Ze známé věty Dalyovy [3] vyplývá pak specielně stochastická nezávislost statistik S a $\bar{x}$.

Je zřejmé, že všechny tři uvedené výběrové statistiky s, m, R a právě tak i četné další statistiky používané pro odhad parametru σ, jako na př. Giniho střední diference g a pod., splňují uvedené podmínky a) až c).

Budiž dáno reálné číslo p $(0 < p < 1)$; definujme si pak novou statistiku U_p jako

$$U_p = \sqrt{n} \, . \, \frac{\mu + l_p\sigma - \bar{x}}{S} , \tag{3.1}$$

kde l_p je reálné číslo splňující

$$p = \int_{l_p}^{\infty} \varphi(x; 0, 1) \, \mathrm{d}x . \tag{3.2}$$

Vyjádříme-li nyní U_p ve tvaru

$$U_p = \frac{\sqrt{n} \, . \, \frac{\mu - \bar{x}}{\sigma} + l_p\sqrt{n}}{\frac{S}{\sigma}} , \tag{3.3}$$

vidíme ihned, že U_p má U-rozložení s distribuční funkcí $K\left(x; l_p\sqrt{n}, \frac{S}{\sigma}\right)$. Volíme-li pak za S různé výběrové statistiky, splňující podmínky a) až c), dostaneme různé konkretní tvary statistiky U_p s distribučními funkcemi danými výrazy (2.2), (2.3), (2.4), kde za F je vzata příslušná distribuční funkce. Tak na příklad při $S = s$ dostaneme klasické necentrální t Johnsona a Welche; při $S = R$ dostaneme jako U_p necentrální analogii Lordova u. Ve speciálním případě $p = 0,5$, kdy $l_p = 0$, bude ovšem

$$U_{0,5} = \sqrt{n} \, . \, \frac{\mu - \bar{x}}{S} \tag{3.4}$$

s distribuční funkcí $K\left(x; 0, \frac{S}{\sigma}\right)$. Jsou to pak známé centrální statistiky: při $S = s$ je $U_{0,5}$ — až na nenáhodný faktor závislý jen na n — přímo Studentovým t; při $S = R$ dostaneme jako $U_{0,5}$ Lordovo u [6]. Použití statistik m a g nebylo, zdá se, dosud prostudováno ani v tomto centrálním tvaru.

Kromě uvedených jednoduchých statistik můžeme za S bráti též aritmetický průměr resp. součet nebo jinou vhodnou funkci hodnot statistik získaných z několika výběrů z téhož základního souboru. Označíme-li obecně

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} S^{(i)} ,$$

kde $S^{(i)}$ je statistika S určená z hodnot i-tého z k daných nezávislých výběrů o stejném rozsahu n, bude distribuční funkce proměnné S_k k-násobnou konvolucí $F^{(k)}$ distribuční funkce F statistiky S. Tak na příklad v případě výběrového rozpětí R (vezmeme přitom aritmetický průměr místo prostého součtu), bude

$$\bar{R}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} R^{(i)}$$

a odtud utvořené U_p

$$U_p = \sqrt{n} \cdot \frac{\mu + l_p\sigma - \bar{x}}{\bar{R}_k},$$

(kde $\bar{x}$ je *celkový* výběrový průměr), má opět U-rozložení. V centrálním případě bylo $U_{0,5}$ tohoto typu studováno již Lordem [6] a Rådem [8], necentrálním případem se zabýval M. Bilwachs [1].

Postup, který jsme si právě ukázali, má však ještě jiný význam než je zlepšení výsledku způsobené snížením rozptylu odhadu parametru σ. V důsledku podmínky c) je rozložení statistiky S nezávislé na populačním průměru μ. Budiž tedy dán výběr $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ze základního souboru $N(\mu, \sigma)$ a druhý výběr (nezávislý na prvním) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ze základního souboru $N(\mu + a\sigma, \sigma)$. Potom statistika

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\bar{y} - \bar{x}}{S(y) + S(x)}$$

má, jak se snadno přesvědčíme, opět U-rozložení, a to s distribuční funkcí $K\left(x;\, a\sqrt{\frac{n}{2}}, \frac{S_2}{\sigma}\right)$. Význam této skutečnosti poznáme lépe v dalším paragrafu na příkladu testů.

4. Testy s použitím statistik U_p

V tomto paragrafu si nejprve provedeme řešení základního problému formulovaného v **1**. Test hypothesy H_p provedeme obvyklým způsobem, bude založen na statistice

$$\sqrt{n} \cdot \frac{T - \bar{x}}{S}; \tag{4.1}$$

příslušný α-procentní kritický obor bude pak dán množinou hodnot menších než je kořen $x_\alpha^{(p)}$ rovnice (v x)

$$\alpha = K\left(x;\, l_p\sqrt{n}, \frac{S}{\sigma}\right). \tag{4.2}$$

Skutečně, je-li

$$\int_T^\infty \varphi(x; \mu, \sigma)\, \mathrm{d}x \leqq p,$$

pak platí

$$T \geqq \mu + l_p\sigma ,$$

a tedy také

$$\sqrt{n}\,\frac{T - \bar{x}}{S} \geqq \sqrt{n}\,\frac{\mu + l_p\sigma - \bar{x}}{S} = U_p .$$

Jestliže však

$$x_\alpha^{(p)} \geqq \sqrt{n}\,\frac{T - \bar{x}}{S} ,$$

pak tím spíše

$$x_\alpha^{(p)} \geqq U_p ,$$

avšak pravděpodobnost splnění této nerovnosti je právě α.

Mějme nyní dány dva normální základní soubory $N(\mu', \sigma)$ a $N(\mu'', \sigma)$. Hodnoty parametrů μ', μ'' a σ nejsou známé. Hypothesa, kterou máme ověřiti, budiž dána nerovností

$$\mu' - \mu'' \geqq a \,.\, \sigma > 0 . \tag{4.3}$$

K testu použijeme statistiky

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\bar{x}' - \bar{x}''}{S' + S''} , \tag{4.4}$$

kde $\bar{x}'$ resp. $\bar{x}''$ je aritmetický průměr z výběru o rozsahu n z prvého resp. z druhého základního souboru a obdobně S' a S'' jsou příslušné S-statistiky. Statistika (4.4) má opět U-rozložení. Kritický α-procentní obor je pak opět dán množinou hodnot menších než kořen $\tilde{x}_\alpha^{(a)}$ rovnice (v x)

$$\alpha = K\left(x; a\sqrt{\frac{n}{2}}, \frac{S_2}{\sigma}\right).$$

Skutečně, je-li

$$\mu' - \mu'' = b \,.\, \sigma , \quad b \geqq a > 0 ,$$

pak (4.4) má distribuční funkci $K\left(x; b\sqrt{\frac{n}{2}}, \frac{S_2}{\sigma}\right)$, avšak z nerovnosti

$$K\left(x; b\sqrt{\frac{n}{2}}, \frac{S_2}{\sigma}\right) \leqq K\left(x; a\sqrt{\frac{n}{2}}, \frac{S_2}{\sigma}\right)$$

vidíme, že pravděpodobnost splnění nerovnosti

$$\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{\bar{x}' - \bar{x}''}{S' + S''} \leqq \tilde{x}_\alpha^{(a)}$$

je nejvýše rovna α.

5. Mohutnost testů

K zhodnocení praktické použitelnosti statistických testů se v klasické theorii používá pojmu t. zv. mohutnosti testu, případně *OC*-křivek. Operační charakteristika (*OC*) udává pravděpodobnost přijetí testované hypothesy jako funkci skutečné hodnoty testovaného parametru — v našem případě p (resp. a).

Označíme-li τ „skutečnou hodnotu" parametru p, t. j. číslo určené vztahem

$$T = \mu + l_\tau \cdot \sigma\,, \tag{5.1}$$

pak pravděpodobnost přijetí hypothesy (1.2), kterou můžeme nyní vyjádřiti též ve tvaru $\tau \leq p$, je dána výrazem

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{n}\,\frac{\mu + l_\tau\sigma - \bar{x}}{S} > x_\alpha^{(p)}\right\} = \mathbf{P}\{U_\tau > x_\alpha^{(p)}\}\,.$$

OC-křivka je tedy v intervalu $0 < \tau < 1$ dána rovnicí

$$y(\tau) = 1 - K\left(x_\alpha^{(p)};\, l_\tau\sqrt{n},\, \frac{S}{\sigma}\right). \tag{5.2}$$

Obdobně v případě testu hypothesy (4.3) bude příslušná *OC*-křivka dána rovnicí

$$y(b) = 1 - K\left(\tilde{x}_\alpha^{(a)};\, b\sqrt{\frac{n}{2}},\, \frac{S_2}{\sigma}\right). \tag{5.3}$$

V obou případech lze souřadnice *OC*-křivky snadno vyjádřiti ve tvaru integrálů (2.2) resp. (2.3).

6. Test s použitím průměrné odchylky m

V tomto odstavci si provedeme podrobně řešení základního problému testu hypothesy (1.2) v tom případě, kdy za S bereme výběrovou průměrnou odchylku m. Test je založen na statistice

$$\sqrt{n}\,\frac{T - \bar{x}}{m}\,. \tag{6.1}$$

Distribuční funkce F v integrálech (2.2) a (2.3) je v tomto případě dána na př. tabulkami [5]. Kritické hodnoty testu, t. j. kořeny rovnice

$$\alpha = K\left(x;\, l_p\sqrt{n},\, \frac{m}{\sigma}\right), \tag{6.2}$$

byly vypočteny pro tyto hodnoty parametrů:

$l_p = 1{,}645$ a $1{,}960$ (t. j. p asi 0,05 a 0,025);

$\alpha = 0{,}05;\ 0{,}025;\ 0{,}01;$

$n = 5, 6, \ldots, 10$

a jsou uvedeny v připojené tabulce, přepočteny již vzhledem k praktickému používání pro jednodušší statistiku

$$\frac{T - x}{m} . \tag{6.3}$$

Řešení rovnice (6.2) bylo provedeno tak, že pro předem vhodně zvolené hodnoty x byly numerickou integrací (Booleovým pravidlem) napočítány příslušné

Tabulka kritických hodnot statistiky (6.3)

l_p	1,645			1,960		
α	0,01	0,025	0,05	0,01	0,025	0,05
n						
5	0,709	0,895	1,069	1,005	1,200	1,385
6	0,795	0,971	1,130	1,097	1,277	1,448
7	0,870	1,033	1,181	1,167	1,339	1,500
8	0,928	1,084	1,225	1,225	1,390	1,544
9	0,977	1,126	1,262	1,276	1,434	1,582
10	1,020	1,161	1,293	1,320	1,473	1,616

hodnoty funkce K pro daná l_p a n. Vzhledem k uvažovaným hodnotám p a α bylo přitom možno omeziti se na formuli (2.2). Kořeny $x_\alpha^{(p)}$ byly pak určeny zpětnou interpolací (Aitkenovou methodou). K numerické integraci bylo použito tabulek [5] distribuční funkce F a tabulek [9] funkce ψ:

$$\psi(x) = 2\sqrt{2} \cdot \varphi(x\sqrt{2}; 0, 1) ,$$

takže K byla počítána ze vztahu ($x > 0$):

$$K\left(x\sqrt{2}; l_p\sqrt{n}, \frac{m}{\sigma}\right) = 1 - \frac{x}{2}\int_0^\infty F(y) \cdot \psi\left(xy - l_p\sqrt{\frac{n}{2}}\right) \mathrm{d}y .$$

Za pečlivé provedení numerických výpočtů je autor zavázán sl. M. Markové z oddělení matematické statistiky MÚ ČSAV.

7. Příklad

Na závěr uvedeme si jeden konkretní příklad pro osvětlení praktického postupu při testování hypothesy (1.2) pomocí statistiky (6.3). Použijeme přitom dat klasického příkladu Studentova citovaného též Lordem v [6]: skupině deseti pacientů byly podávány dva uspávací prostředky **A** a **B** a bylo měřeno, o kolik hodin se tím prodloužil jejich spánek. Byly zjištěny tyto hodnoty:

pacient č.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A — x	1,9	0,8	1,1	0,1	−0,1	4,4	5,5	1,6	4,6	3,4
B — y	0,7	−1,6	−0,2	−1,2	−0,1	3,4	3,7	0,8	0,0	2,0
rozdíl z	1,2	2,4	1,3	1,3	0,0	1,0	1,8	0,8	4,6	1,4

Úkolem bude ověřiti, zda

a) prostředek **A** způsobuje prodloužení doby spánku alespoň o půl hodiny v alespoň 95% případů;

b) prodloužení spánku způsobené prostředkem **A** je v alespoň 95 případech ze sta aspoň o $\frac{3}{4}$ hodiny delší než při použití prostředku **B**.

Hranici významnosti zvolme $\alpha = 0{,}025$.

Přitom činíme základní předpoklad, že uvedené hodnoty prodloužení doby spánku lze považovati za prvky *náhodného* výběru z *normálních* základních souborů. Označme μ a σ parametry příslušné náhodné proměnné x a μ' a σ' parametry rozložení náhodné proměnné $z = x - y$. Hypothesy a) a b) můžeme pak formulovati ve tvaru (1.2) jako

$$\text{a)}\ \int_{-0,5}^{\infty} \varphi(t; -\mu, \sigma)\,\mathrm{d}t < 0{,}05$$

a

$$\text{b)}\ \int_{-0,75}^{\infty} \varphi(t; -\mu', \sigma')\,\mathrm{d}t < 0{,}05\,.$$

Vypočítáme nyní průměry a průměrné odchylky:

$$\bar{x} = 2{,}33\,,\quad m_x = 1{,}716\,;\quad \bar{z} = 1{,}58\,,\quad m_z = 0{,}812\,.$$

Pro a) máme tak

$$\frac{T - (-\bar{x})}{m_x} = \frac{-0{,}5 + 2{,}33}{1{,}716} = 1{,}066$$

a pro b)

$$\frac{T' - (-\bar{z})}{m_z} = \frac{-0{,}75 + 1{,}58}{0{,}812} = 1{,}022\,.$$

Jak vidíme z připojené tabulky, jsou obě hodnoty významné. Obě hypothesy a) i b) můžeme tedy (na hranici významnosti 2,5%) zamítnouti.

(Při volbě $\alpha = 0{,}01$ by tyto hodnoty nebyly významné.)

LITERATURA

[1] *M. Bilwachs:* Necentrální t-test s použitím rozpětí (sdělení na I. pracovní konferenci čsl. matematických statistiků, Praha, červen 1954).

[2] *H. Cramér:* Random variables and probability distributions; Cambridge Tracts in Mathematics, No 36, Cambridge, 1937.

[3] *J. F. Daly:* On the use of the sample range in an analogue of Student's t-test; AMS, 17 (1946), 71—74.

[4] *N. L. Johnson, B. L. Welch:* Applications of the non-central t-distribution; Biometrika, 31 (1939), 362—389.

[5] *H. J. Godwin, H. O. Hartley:* Tables of the probability integral of the mean deviation in normal samples; Biometrika, 33 (1943—46), 259—264.

[6] *E. Lord:* The use of range in place of standard deviation in the t-test; Biometrika, 34 (1947), 41—67.

[7] *E. Lord:* The power of the modified t-test (u-test) based on range; Biometrika, 37 (1950), 64—77.

[8] *L. Råde:* A note on a modified t-test; Skandinavisk Aktuarietidskrift, 37 (1954), 65—70.

[9] Tables of Probability Functions, I, Federal Works Agency; New York, 1941.

[10] *F. Zítek:* O použití rozpětí v jistém problému kontroly jakosti. Necentrální U-test. (Nepublikovaná domácí státní práce na přírodovědecké fakultě KU, březen 1952.)

Резюме

НЕКОТОРЫЕ АНАЛОГИИ НЕЦЕНТРАЛЬНОГО t-ТЕСТА

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek)

(Поступило в редакцию 27/III 1956 г.)

В работе дается генеральная дискуссия нецентрального t-теста, в котором стандартное отклонение s заменено некоторыми другими статистиками, как, например, R, m или g. Построены тесты для гипотез (1.2) и (4.3). В таблице даны критические значения для теста гипотезы (1.2), пользующегося выборочным средним отклонением m, для некоторых значений n, p и α.

Summary

ON CERTAIN ANALOGUES OF THE NON-CENTRAL t-TEST

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Received March 27, 1956.)

The paper gives a general discussion of the non central t-test modified by substituting some less efficient statistics as e. g. R, m or g to the sample standard deviation s. Tests for the hypotheses (1.2) and (4.3) are then constructed. Critical values of the statistic (6.3) for a test of (1.2) are given in the Table for some values of n, p and α.