Ladislav Mejzlík

Aplikácia metódy sietí na riešenie problémov prúdenia podzemnej vody pod hydrotechnickými stavbami

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 6, 399–430

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102543`

ČLÁNKY

APLIKÁCIA METÓDY SIETÍ NA RIEŠENIE PROBLÉMOV PRÚDENIA PODZEMNEJ VODY POD HYDROTECHNICKÝMI STAVBAMI

LADISLAV MEJZLÍK

(Došlo dne 13. února 1956.) DT: 624.131.6:627.8

Aplikácia metódy sietí na riešenie rovinného permanentného laminárneho prúdenia podzemnej vody v rôznych prostrediach (homogénne, nehomogénne, izotropné, anizotropné). Číselný príklad gravitačný múr s poprsným múrom na nehomogénnom podloží).

Obsah

Úvod

Prúdenie podzemnej vody pod hydrotechnickými stavbami sa v poslednej dobe u nás aj v cudzine stáva predmetom stále starostlivejšieho skúmania. Zatiaľ čo ešte koncom minulého storočia sa napríklad vztlakové účinky vody presakujúcej pod priehradami nebrali vôbec do úvahy a často sa o ich existencii nevedelo, máme dnes už početné teoretické spisy ako aj výsledky rozsiahlych meraní spravených pre tento účel. V posledných rokoch nastáva v skúmaní pohybu podzemných vôd nový veľký rozmach najmä zásluhou veľkých úspechov sovietskych bádateľov.

Je to preto, že účinky presakujúcej vody majú veľký vplyv na hlavné dimenzie vodných diel a že stavebne-technické opatrenia majúce za účel tieto nepriaznivé účinky paralyzovať bývajú veľmi nákladné. Je preto snahou projektantov poznať vopred priebeh vztlaku, hydraulických spádov, priesakových rýchlostí a množstiev pri návrhu vodného diela. Prúdenie podzemnej vody podlieha určitým fyzikálnym zákonom a dá sa po istých zjednodušeniach abstrahovať na matematický problém riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc alebo previesť na riešenie na základe fyzikálnej analógie.

Predložené pojednanie sa zaoberá približným riešením diferenciálnych rovníc, ktorým prúdenie podzemnej vody podlieha, a to tzv. metódou sietí. Táto metóda má oproti iným matematickým cestám niektoré podstatné výhody:

a) presnosť dá sa ľubovolne stupňovať (ovšem len za cenu počtárskej práce),

b) nie je náročná na odbornú kvalifikáciu riešiteľa,

c) je univerzálna a dajú sa ňou s rovnakými teoretickými ťažkostmi riešiť aj veľmi zložité problémy prúdenia,

d) značná časť práce sa dá „zmechanizovať", takže ju môžu prevádzať aj málo kvalifikované sily, ktoré vlastnej problematike nemusia ani rozumieť.

Ako nevýhodu treba uviesť množstvo počtárskej práce. Príklad uvedený v oddiele VII. si vyžiadal na 350 pracovných hodín. Na omluvu uveďme, že aj iné matematické cesty sú časove náročné a že pochybujeme, že by ktorákoľvek z nich bola shôdnejšia. Takisto v tomto prípade môžeme povedať, že aj riešenie analógiami by bolo obtiažné vzhľadom na nehomogenitu v priepustnosti v pomere až 1 : 7500.

Autor tohoto článku chce podať praktický a konkrétny návod na riešenie problémov, ktoré sa v praxi skutočne vyskytujú. Nezaoberá sa preto odvodením a kritikou rovníc pre pohyb podzemnej vody, presnosťou prevodu diferenciálnej rovnice na diferenčný tvar, konvergenčnými otázkami a najmä opomíja odhad chyby. O týchto otázkach sa láskavý čitateľ dozvie viac od povolanejších autorov uvedených na konci článku. Ak bude čitateľ postupovať podľa ďalej uvedených smerníc, môže si byť istý, že chyba v jeho riešení bude hlboko pod presnosťou dosažiteľnou v predpokladoch, najmä v koeficiente priepustnosti.

I. Definícia podzemnej vody

Vodou v pôde rozumieme vodu v kvapalnom stave nachádzajúcu sa pod zemským povrchom, v priestorách hornín; a to vodu, ktorá nie je kryštalicky ani chemicky viazaná.

Vodu v pôde delíme na vodu viazanú povrchovým napätím a vodu podliehajúcu gravitácii.

V našom pojednaní budeme sa zaoberať výhradne vodou podliehajúcou gravitácii, ktorá sa obyčajne nazýva podzemnou alebo spodnou vodou. Táto môže byť stojatá alebo tečúca, s voľnou hladinou alebo napätá.

II. Predpoklady o prúdení podzemnej vody

Pri našich úvahách budeme sa zaoberať výhradne prúdením laminárnym, ktoré nastáva vo veľkej väčšine prípadov v podzákladiu vodných stavieb. Ak totižto horniny majú lasy a trhliny, v ktorých by pri očakávaných spádoch mohol nastať turbulentný tok, snažíme sa ich technickými opatreniami utesniť. Laminárny priesak môže byť rovinný alebo priestorový. V ďalšom budeme sa zaoberať väčšinou len priesakom rovinným. Taký druh prúdenia nastáva poväčšine pod najvyššími časťami vodných stavieb, ktoré sú pre stanovenie charakteristických rozmerov konštrukcie smerodajné. Ak sa u základovej horniny vyskytne vrstevnatosť nerovnobežná s normálou na vodné dielo, môžeme priesak taktiež považovať za rovinný, ovšem v smere vrstevnatosti.

Ďalej ešte predpokladáme, že prostredie, ktorým sa priesak deje sa nedeformuje a že teda nemení v dôsledku síl presakovaním vyvolaných svoju priepustnosť. Taktiež predpokladáme, že presakujúca voda je nestlačiteľná a má stálu viskozitu. Budeme sa takisto zaoberať len permanentným prúdením, nakoľko za tohoto stavu býva konštrukcia vodnej stavby najnebezpečnejšie namáhaná (výnimku tvoria zemné hrádze). Vo svojich úvahách budeme ďalej predpokladať platnosť Darcyho zákona

$$v = k \cdot J \, ,$$

v = priesaková rýchlosť,

k = koeficient priepustnosti prostredia,

J = hydraulický spád.

III. Rovnice pre rovinné, permanentné a laminárne prúdenie podzemnej vody v rôznych prostrediach

V tejto časti uvedieme diferenciálne rovnice pre rovinné, permanentné a laminárne prúdenie podzemnej vody, a to v tvaroch vhodných pre prevod na riešenie metódou sietí.

Os X budeme predpokladať horizontálnu, os Y zvislú, jej kladný smer zdola nahor.

a) Homogénne izotropné prostredie.

Homogénnym prostredím pre prúdenie podzemnej vody nazývame prostredie, ktoré má v každom mieste rovnaké vlastnosti čo do priepustnosti.

Izotropné prostredie pre prúdenie podzemnej vody je také, ktoré má v danom mieste vo všetkých smeroch rovnakú priepustnosť.

Homogenita a izotropnosť sú teda dve vlastnosti vzájomne neodvislé.

Rovnice pre zložky v_x a v_y priesakovej rýchlosti a rovnica kontinuity sú:

$$v_x = -\frac{k}{\gamma_v}\frac{\partial p}{\partial x}\,, \tag{1}$$

$$v_y = -\frac{k}{\gamma_v}\frac{\partial p}{\partial y} - k\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0\,. \tag{3}$$

v_x, (v_y) — zložka rovnobežná s osou X (Y) priesakovej rýchlosti v, ktorá je kladná, ak sa voda pohybuje kladným smerom súradnej osi,

γ_v — objemová váha presakujúcej vody,

p — tlak presakujúcej vody.

Dosadením (1) a (2) do (3) s ohľadom na to, že $k =$ konšt. (homogenita) je:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0\,. \tag{4}$$

Ak zavedieme potenciálnu funkciu v tvare

$$\Phi = -k\left(\frac{p}{\gamma_v} + y\right), \tag{5}$$

je

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,, \tag{6}$$

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,. \tag{7}$$

Potenciálna funkcia Φ musí takisto vyhovovať rovnici

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 . \tag{8}$$

b) Nehomogénne izotropné prostredie s hladko premennou priepustnosťou.

Nehomogénnym prostredím pre prúdenie podzemnej vody nazývame prostredie v ktorom sa priepustnosť miestne mení.

Hladkou premennosťou priepustnosti rozumieme okolnosť, že funkcia určujúca koeficient priepustnosti ako aj jej prvé derivácie (vo všetkých smeroch) sú v celej oblasti, ktorou sa priesak deje, spojité.

Premenný koeficient priepustnosti označme tu k_{xy}. Rovnice pre zložky priesakovej rýchlosti sú

$$v_x = - \frac{k_{xy}}{\gamma_v} \frac{\partial p}{\partial x} , \tag{9}$$

$$v_y = - \frac{k_{xy}}{\gamma_v} \frac{\partial p}{\partial y} - k_{xy} . \tag{10}$$

Rovnica kontinuity má tvar (3).

Dosadením (9) a (10) do (3) dostávame

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xy} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{xy} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \gamma_v \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} = 0 . \tag{11}$$

Prevedením naznačených úkonov dostávame:

$$k_{xy} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial k_{xy}}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma_v \frac{\partial k_{xy}}{\partial y} = 0 . \tag{12}$$

Zavedením

$$\Phi_n = - \left(\frac{p}{\gamma_v} + y \right) \tag{13}$$

môžeme rovnicu (11) alebo (12) písať takto:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xy} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{xy} \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \right) = 0 \tag{14}$$

a zložky priesakovej rýchlosti sú

$$v_x = k_{xy} \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \quad (15) , \qquad v_y = k_{xy} \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} . \quad (16)$$

c) Izotropné prostredie s pretržite premennou priepustnosťou.

Tu predpokladáme, že prostredie, ktorým sa priesak deje, je rozčlenené na rad dielčich homogénnych oblastí na sebe naväzujúcich. V dielčich oblastiach platia rovnice (1) až (8). Na hraniciach dielčich oblastí musí byť v obidvoch prípadoch splnená podmienka spojitosti zložiek v_ν priesakovej rýchlosti normálnych k hranici:

$$v_{\nu,I} = v_{\nu,II} \,. \tag{17}$$

Ide vlastne o vzájomne závislé určenie okrajových podmienok stýkajúcich sa dielčich oblastí.

Potenciálna funkcia Φ sa však nemôže použiť v tvare danom rovnicou (5), ale musí sa použiť buď funkcia tlaku p, alebo funkcia ψ v tvare

$$\psi = -\left(\frac{p}{\gamma_v} + y\right).$$

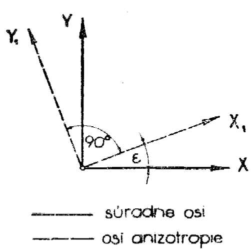
Rovnice (6) a (7) pre zložky priesakovej rýchlosti v dielčich oblastiach sú:

$$v_x = k_i \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (18)\,, \qquad v_y = k_i \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (19)$$

a rovnica (8) prejde na tvar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \,. \tag{20}$$

d) Anizotropné homogénne prostredie so stálymi vzájomne na seba kolmými osami anizotropie.



Obr. 1. Osi anizotropie.

Anizotropiou (vzhľadom k priepustnosti) voláme vlastnosť podložia, kedy jeho priepustnosť je v rôznych smeroch rôzna. Osami anizotropie voláme smery, v ktorých v danom mieste je priepustnosť maximálna a minimálna. Stálymi sú tieto osi vtedy, ak v každom mieste oblasti majú tieto osi rovnaký smer. Použijeme nasledovné označenie:

X_1, Y_1 — súradné osi rovnobežné s osami anizotropie,
x_1, y_1 — súradnice na osách X_1, Y_1,
ε — uhol medzi horizontálou a osou X_1.

(Pozri obr. 1.)

Zložky v_{x1} a v_{y1}, priesakovej rýchlosti sú:

$$v_{x1} = -k_{x1}\left(\frac{1}{\gamma_v}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \sin \varepsilon\right), \tag{21}$$

$$v_{y1} = -k_{y1}\left(\frac{1}{\gamma_v}\frac{\partial p}{\partial y_1} + \cos \varepsilon\right). \tag{22}$$

Dosadením (21) a (22) do (3) dostávame

$$k_{x1}\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + k_{y1}\frac{\partial^2 p}{\partial y_1^2} = 0 \,. \tag{23}$$

Položením

$$\Phi_a = -\left(\frac{p}{\gamma_v} + x_1 \sin \varepsilon + y_1 \cos \varepsilon\right) \tag{24}$$

môžeme zložky priesakovej rýchlosti písať v tvare

$$v_{x1} = k_{x1} \frac{\partial \Phi_a}{\partial x_1} \quad (25), \qquad v_{y1} = k_{y1} \frac{\partial \Phi_a}{\partial y_1} \tag{26}$$

a rovnicu (23) v tvare

$$k_{x1} \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial x_1^2} + k_{y1} \frac{\partial^2 \Phi_a}{\partial y_1^2} = 0 \,. \tag{27}$$

e) Anizotropné nehomogénne prostredie s hladko premennou priepustnosťou s premennými, ale vždy vzájomne na seba kolmými osami anizotropie.

Osi anizotropie tvoria sústavu vzájomne na seba kolmých čiar $\xi =$ konšt. a $\eta =$ konšt., kde

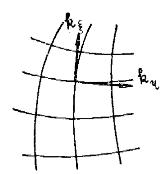
$$\xi = f_1(x, y) \; ; \quad \eta = f_2(x, y) \,.$$

(Pozri obr. 2.)

Koeficienty priepustnosti k_ξ a k_η v smere tyčníc k čiaram $\xi =$ konšt. a $\eta =$ konšt. nech sú extrémne a určujú mieru anizotropie.

Označme ds_1 a ds_2 prvky dĺžky na týchto osách a ďalej

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2} \; ; \quad H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \,. \tag{28}$$



Obr. 2. Premenná anizotropnosť.

Potom má rovnica kompatibility tvar:

$$\frac{\partial (H_2 v_\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial (H_1 v_\eta)}{\partial \eta} = 0 \,. \tag{29}$$

Tu značí

$$v_\xi = -k_\xi \frac{\partial h}{\partial s_1} = -k_\xi \frac{1}{H_1} \frac{\partial h}{\partial \xi} \,, \tag{30}$$

$$v_\eta = -k_\eta \frac{\partial h}{\partial s_2} = -k_\eta \frac{1}{H_2} \frac{\partial h}{\partial \eta} \,, \tag{31}$$

$$h = \frac{p}{\gamma_v} + y \,. \tag{32}$$

Dosadením (30) a (31) do (29) máme:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(k_\xi \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial h}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(k_\eta \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) = 0 \,. \tag{33}$$

* * * *

Týmto sme vyčerpali všetky možnosti prostredí, ktoré sa môžu prakticky vyskytnúť.

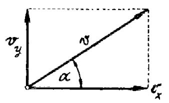
* * * *

f) Zistenie priesakového množstva.

Priesakové množstvo Q tečúce cez voľajakú hranicu $c = f(x, y)$ obdržíme integráciou zložky priesakovej rýchlosti v_ν normálnej k hranici c:

$$Q = \oint_c v_\nu \, \mathrm{d}s \, . \tag{34}$$

Ak je hranica c uzatvorená, potom množstvo Q musí byť nulové.



Obr. 3. Výsledná priesaková rýchlosť.

g) Výsledná priesaková rýchlosť.

Výslednou priesakovou rýchlosťou menujeme maximálnu priesakovú rýchlosť v danom mieste.

Výslednú priesakovú rýchlosť v ľubovoľnom bode neležiacom na hranici dielčich oblastí (definovaných skoršie) dostaneme podľa vzťahu

$$v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)} \tag{35}$$

a jej smer je

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{v_y}{v_x} \, . \tag{36}$$

(Pozri obr. 3.)

IV. Okrajové podmienky

Účelom riešenia prúdenia podzemnej vody je nájsť k daným okrajovým podmienkam funkciu tlaku vody p v póroch zeminy, alebo potenciálnu funkciu Φ (Φ_a, Φ_n, ψ).

Tento problém možno matematicky formulovať takto: riešiť zmiešanú okrajovú úlohu (s dostatočne hladkými okrajovými podmienkami) pre rovnicu eliptického typu v obmedzenej oblasti.

Bez dôkazu (ktorý sa vymyká rámcu tohoto pojednania) uvádzame, že riešenia skôr uvedených diferenciálnych rovníc sú jediné.

Okrajové podmienky pre riešenie vyšeuvedených rovníc sú v praksi najčastejšie dané:

1. Potenciálom Φ, (Φ_a, Φ_n, ψ) alebo tlakom p na okrajoch oblasti (za okraj v tomto zmysle je treba považovať aj singulárny bod).

2. Zložkou priesakovej rýchlosti na okraji oblasti normálnou k tomuto okraju. (Táto zložka môže byť daná aj nepriamo ako na pr. na hranici dielčich oblastí podmienkou rôznej priepustnosti dielčich oblastí.)

3. Tak zvanou voľnou hladinou, t. j. jednak nulovou poradnicou tlaku na určitej čiare a súčasne nulovou zložkou priesakovej rýchlosti kolmou k nej, pričom poloha voľnej hladiny je vopred neznáma.

V. Riešenia prúdenia podzemnej vody

Riešenia skôr uvedených diferenciálnych rovníc obvyklými matematickými cestami narážajú na značné ťažkosti a vyžadujú mimoriadne znalosti v tomto obore, ktoré projektanti zameraní na širšiu problematiku navrhovania vodných diel málokedy mávajú. S ohľadom na zložité pomery v podzákladí vodných stavieb je možné len celkom výnimočne nájsť explicitnú formulku, ktorá by riešila vyššie uvedenú úlohu. Pre numerické vyriešenie danej konkrétnej sústavy je pre projektantov veľmi výhodné ak sa podarí riešenie buď grafické alebo pomocou fyzikálnej analógie.

U nás sa grafickými metódami zaoberal najmä prof. Bažant ml.; podrobné pojednania nájdeme v jeho dielach „Proudění podzemní vody a jeho vliv na navrhování základů staveb, zvláště jezů", „Kreslení proudových sítí". Tieto diela sú u nás snadno dostupné. Poskytujú rýchle a spoľahlivé výsledky v prípadoch, keď podložie je homogénne alebo zložené z niekoľkých oblastí s pomerne málo rozdielnou priepustnosťou. Dajú sa taktiež použiť v jednoduchších prípadoch anizotropných podloží.

Taktiež metóda analógií je dostatočne prepracovaná a čitateľ nájde podrobné návody v dielach Aravina, Hetényiho atď. Analógia elektrického poľa sa môže užiť v prípadoch homogénnych a aj nehomogénnych a izotropných podloží, analógia elektrickej siete vo všetkých prípadoch.

VI. Aproximatívne riešenia metódou sietí

1. Všeobecne.

V našom pojednaní budeme sa podrobnejšie zaoberať približnými riešeniami počtárskymi, kedy sa riešenie základnej diferenciálnej rovnice prevedie tak zvanou metódou siete na systém algebraických simultánnych lineárnych rovníc.

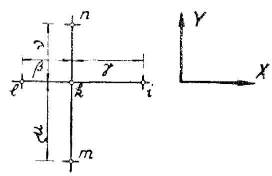
Metóda spočíva v tom, že hľadanú funkciu (nech už ide o tlak p, alebo potenciálne funkcie Φ, Φ_a, Φ_n, ψ) nahradíme v určitom rozsahu (danom zvolenou sieťou) funkciou jednoduchšou. V prípade riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc druhého radu, aké sa pri prúdení podzemných vôd vyskytujú, postačí, ak náhradnou funkciou F bude polynom druhého stupňa, tedy

$$F = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2 \,. \tag{37}$$

Náhradnú funkciu F vyjadríme pomocou jej (zatiaľ neznámych) poradníc v uzloch siete, ktorú vhodne zvolíme a ktorou pokryjeme oblasť priesaku, pričom položíme podmienku danú základnou diferenciálnou rovnicou, tedy napríklad

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \,.$$

Derivácie vyjadríme pomocou skôr zmienených poradníc v uzloch siete. Tak dostaneme pre každý uzol siete jednu lineárnu algebraickú rovnicu. Súhrn týchto rovníc vytvorí systém, ktorého vyriešením dospejeme k hľadaným poradniciam v uzloch siete. Z takto získaných poradníc vytvoríme si už snadno prehľad o prúdení podzemnej vody a odvodíme z nich všetky priesakové rýchlosti, hydraulické spády, priesakové množstvá atď.



Obr. 4. Ortogonálna nepravidelná sieť.

2. Voľba siete.

Riešenie je tým presnejšie, čím je sieť hustšia. S hustotou siete rastie však tiež, a to veľmi rýchle (najmenej s kvadrátom), rozsah počtárskej práce. Je tedy nutné určiť mieru a spôsob ako sieť voliť. Na základe prevedených výpočtov konkrétnych prípadov, ktoré boli zrovnané s riešeniami presnými, alebo s riešeniami na základe analógií, je možné sieť považovať za dostatočnú vtedy, ak pri základovej škáre stavebného objektu má okolo 7 až 9 uzlov. V okolí objektu je treba oká siete asi v troch radoch pod, pred a za ním ponechať v rozmeroch daným počtom ôk pri základovej škáre. Ďalej sa môže sieť zredovať tak rýchlo ako je to len možné. Postup pri zreďovaní siete bude osvetlený neskoršie. Je taktiež výhodné (ačkoľvek nie nutné) aby uzly siete ležali na lomoch základovej škáry. Je však treba, aby na každý pád sa uzly umiestnili na rozhranie oblastí s rôznou priepustnosťou a na okraj oblasti, ktorou sa priesak deje vôbec.

Zo všetkých druhov siete sa za najvhodnejšie považuje sieť pravoúhla a štvorcová. Okrem výhod pomerne dobrej presnosti umožňuje jednoduché a rýchle zostavenie rovníc. Pre jednoduché prípady vystačíme so 60—70 uzlami, prípady dosť zložité si vyžiadajú aj 150 uzlov.

3. Prevod diferenciálnych rovníc na diferenčný tvar.

Nižšie uvedieme prevody diferenciálnych rovníc oddielu III na diferenčný tvar. Budeme brať zreteľ len na ortogonálne siete (okrem jedného prípadu), pričom odvodíme rovnice pre nerovnostranné siete. Rovnice pre siete štvorcové si láskavý čitateľ napíše ľahko sám, keď položí $\beta = \gamma = \mu = \nu$ a prevedie elementárne úpravy. Označenie uzlov siete a jej strán je zrejmé z obrázku 4.

a) Homogénne izotropné prostredie.

Rovnice (1) a (2) pre zložky priesakovej rýchlosti v bode k siete (pozri obr. 4) v diferenčnom tvare sú:

$$(v_x)_k = -\frac{k}{\gamma_v}\,\frac{(\gamma^2-\beta^2)\,p_k - \gamma^2 p_l + \beta^2 p_i}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}\,, \tag{38}$$

$$(v_y)_k = -\frac{k}{\gamma_v}\,\frac{(\nu^2-\mu^2)\,p_k - \nu^2 p_m + \mu^2 p_n}{\mu\nu(\mu+\nu)} - k\,. \tag{39}$$

Rovnica (4) sa prevedie takto:

$$\frac{p_l}{\beta(\beta+\gamma)}+\frac{p_i}{\gamma(\beta+\gamma)}+\frac{p_m}{\mu(\mu+\nu)}+\frac{p_n}{\nu(\mu+\nu)}-\left(\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\mu\nu}\right)p_k=0\,. \tag{40}$$

Zhodne možno previesť aj rovnicu (8).

Zložky priesakovej rýchlosti ako funkcie poradníc potenciálnej funkcie Φ (pozri rovnicu 5):

$$(v_x)_k=\frac{(\gamma^2-\beta^2)\,\Phi_k-\gamma^2\Phi_l+\beta^2\Phi_i}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}\,, \tag{41}$$

$$(v_y)_k=\frac{(\nu^2-\mu^2)\,\Phi_k-\nu^2\Phi_m+\mu^2\Phi_n}{\mu\nu(\mu+\nu)}\,. \tag{42}$$

b) Izotropné prostredie s hladko premennou priepustnosťou.

Rovnice (9) a (10) pre zložky priesakovej rýchlosti v bode k siete (pozri obr. 4) sú:

$$(v_x)_k=-\frac{k_{xy}}{\gamma_v}\,\frac{(\gamma^2-\beta^2)\,p_k-\gamma^2p_l+\beta^2p_i}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}\,, \tag{43}$$

$$(v_y)_k=-\frac{k_{xy}}{\gamma_v}\,\frac{(\nu^2-\mu^2)\,p_k-\nu^2p_m+\mu^2p_n}{\mu\nu(\mu+\nu)}\,. \tag{44}$$

Rovnica (11) v diferenčnom tvare znie:

$$ap_l+bp_i+cp_m+dp_n+ep_k+f=0\,. \tag{45}$$

Tu značí:

$$\begin{aligned}
a&=\frac{1}{\beta+\gamma}\left[\frac{1}{\beta}\left(2-\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\right)k_k+\frac{1}{\beta+\gamma}\left(\frac{\gamma^2}{\beta^2}\,k_l-k_i\right)\right],\\
b&=\frac{1}{\beta+\gamma}\left[\frac{1}{\gamma}\left(2-\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\right)k_k+\frac{1}{\beta+\gamma}\left(\frac{\beta^2}{\gamma^2}\,k_i-k_l\right)\right],\\
c&=\frac{1}{\mu+\nu}\left[\frac{1}{\mu}\left(2-\frac{\nu-\mu}{\mu}\right)k_k+\frac{1}{\mu+\nu}\left(\frac{\nu^2}{\mu^2}\,k_m-k_n\right)\right],\\
d&=\frac{1}{\mu+\nu}\left[\frac{1}{\nu}\left(2-\frac{\mu-\nu}{\nu}\right)k_k+\frac{1}{\mu+\nu}\left(\frac{\mu^2}{\nu^2}\,k_n-k_m\right)\right],\\
e&=k_k\left\{\frac{1}{\beta\gamma}\left[\frac{(\gamma-\beta)^2}{\beta\gamma}-2\right]+\frac{1}{\mu\nu}\left[\frac{(\nu-\mu)^2}{\mu\nu}-2\right]\right\}+\\
&\quad+\frac{\gamma-\beta}{\gamma+\beta}\left(\frac{k_i}{\gamma^2}-\frac{k_l}{\beta^2}\right)+\frac{\nu-\mu}{\mu+\nu}\left(\frac{k_n}{\nu^2}-\frac{k_m}{\mu^2}\right),\\
f&=\gamma_v\left(\frac{\nu-\mu}{\mu\nu}\,k_k-\frac{\nu}{\mu(\mu+\nu)}\,k_m+\frac{\mu}{\nu(\mu+\nu)}\,k_n\right).
\end{aligned} \tag{46}$$

Rovnica (12) v diferenčnom tvare je:

$$a(\Phi_n)_l+b(\Phi_n)_i+c(\Phi_n)_m+d(\Phi_n)_n+e(\Phi_n)_k=0\,. \tag{47}$$

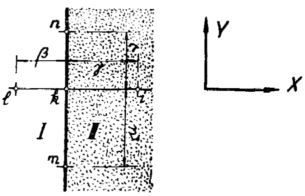
Koeficienty a až e sú rovnaké ako je udané vo vzorcoch (46).

Zložky priesakovej rýchlosti ako derivácie potenciálnej funkcie Φ_n sú (pozri rovnice (15) a (16)):

$$(v_x)_k = k_{xy}\frac{(\gamma^2-\beta^2)(\Phi_n)_k - \gamma^2(\Phi_n)_l + \beta^2(\Phi_n)_i}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}, \tag{48}$$

$$(v_y)_k = k_{xy}\frac{(\nu^2-\mu^2)(\Phi_n)_k - \nu^2(\Phi_n)_m + \mu^2(\Phi_n)_n}{\mu\nu(\mu+\nu)}. \tag{49}$$

c) Izotropné prostredie s pretržito premennou priepustnosťou.



Obr. 5. Izotropné prostredie s pretržito premennou priepustnosťou, rozhranie dielčich oblastí je zvislé.

V tomto prípade je treba sieť usporiadať tak, aby:

c1) jej uzly ležali na hranici dielčich oblastí,

c2) alebo uzly ležali na priesečíku hraníc viacerých dielčich oblastí.

V dielčich oblastiach, ktoré sú samy o sebe homogénne, sa použijú vzťahy (38) až (42); zbýva tedy uviesť rovnice, ktoré platia na rozhraní dielčich oblastí.

ad c1) Uvedieme rovnice pre tri prípady polohy rozhrania:

c1a) Rozhranie je zvislé (pozri obr. 5).

Zložky priesakovej rýchlosti sú:

V dielčej oblasti I:

$$(v_x)_{k,I} = (v_x)_{k,II} = -\frac{k_I}{\gamma_v}\frac{(\gamma^2-\beta^2)\,p_k - \gamma^2 p_l + \beta^2 p_i'}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}, \tag{50}$$

$$(v_y)_{k,I} = -\frac{k_I}{\gamma_v}\frac{(\nu^2-\mu^2)\,p_k - \nu^2 p_m + \mu^2 p_n}{\mu\nu(\mu+\nu)} - k_I; \tag{51}$$

v dielčej oblasti II:

$$(v_x)_{k,II} = (v_x)_{k,I} = -\frac{k_{II}}{\gamma_v}\frac{(\gamma^2-\beta^2)\,p_k - \gamma^2 p_l' + \beta^2 p_i}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}, \tag{52}$$

$$(v_y)_{k,II} = -\frac{k_{II}}{\gamma_v}\frac{(\nu^2-\mu^2)\,p_k - \nu^2 p_m + \mu^2 p_n}{\mu\nu(\mu+\nu)} - k_{II}. \tag{53}$$

Tu značí:

k_I, (k_{II}) — koeficient priepustnosti dielčej oblasti I(II).

$$p_l' = \frac{1}{\beta k_I + \gamma k_{II}}\left[\frac{\beta^2-\gamma^2}{\gamma}(k_I - k_{II})\,p_k + (\beta+\gamma)\,k_I p_l + \frac{\beta^2}{\gamma}(k_{II}-k_I)\,p_i\right], \tag{54}$$

$$p_i' = \frac{1}{\beta k_I + \gamma k_{II}}\left[\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta}(k_{II} - k_I)\,p_k + \frac{\gamma^2}{\beta}(k_I-k_{II})\,p_l + (\beta+\gamma)\,k_{II} p_i\right]. \tag{55}$$

Zložky priesakovej rýchlosti ako derivácie potenciálnej funkcie ψ sú:

$$(v_x)_{k,I} = (v_x)_{k,II} = k_I \frac{(\gamma^2 - \beta^2)\,\psi_k - \gamma^2\psi_l + \beta^2\psi_i'}{\beta\gamma(\beta + \gamma)}\,, \tag{56}$$

$$(v_y)_{k,I} = k_I \frac{(\nu^2 - \mu^2)\,\psi_k - \nu^2\psi_m + \mu^2\psi_n}{\mu\nu(\mu + \nu)}\,, \tag{57}$$

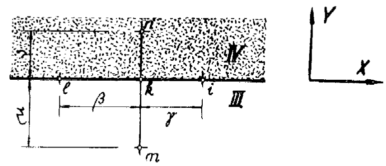
$$(v_x)_{k,II} = (v_x)_{k,I} = k_{II} \frac{(\gamma^2 - \beta^2)\,\psi_k - \gamma^2\psi_l' + \beta^2\psi_i}{\beta\gamma(\beta + \gamma)}\,, \tag{58}$$

$$(v_x)_{k,II} = k_{II} \frac{(\nu^2 - \mu^2)\,\psi_k - \nu^2\psi_m + \mu^2\psi_n}{\mu\nu(\mu + \nu)}\,. \tag{59}$$

Tu značí:

$$\psi_l' = \frac{1}{\beta k_I + \gamma k_{II}}\left[\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\gamma}(k_I - k_{II})\,\psi_k + (\beta + \gamma)\,k_I\psi_l + \frac{\beta^2}{\gamma}(k_{II} - k_I)\,\psi_i\right], \tag{60}$$

$$\psi_i' = \frac{1}{\beta k_I + \gamma k_{II}}\left[\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\beta}(k_{II} - k_I)\,\psi_k + \frac{\gamma^2}{\beta}(k_I - k_{II})\,\psi_l + (\beta + \gamma)\,k_{II}\psi_i\right]. \tag{61}$$



Obr. 6. Izotropné prostredie s protržito premennou priepustnosťou, rozhranie je vodorovné.

Pre uzol k použije sa nasledovná rovnica:
Vyjádrenie v termínoch funkcie p:

$$\frac{k_I}{\beta}\,p_l + \frac{k_{II}}{\gamma}\,p_i + (\beta k_I + \gamma k_{II})\left(\frac{1}{\mu^2 + \mu\nu}\,p_m + \frac{1}{\nu^2 + \mu\nu}\,p_n\right) - \left(\frac{\beta k_{II} + \gamma k_I}{\beta\gamma} + \frac{\gamma k_{II} + \beta k_I}{\mu\nu}\right) p_k = 0\,. \tag{62}$$

Funkcia ψ musí taktiež vyhovovať rovnici (62) namiesto p sa píše ψ.

c1b) Rozhranie je vodorovné (pozri obr. 6).

Zložky priesakovej rýchlosti v termínoch tlaku p sú:

v dielčej oblasti III:

$$(v_x)_{k,III} = -\frac{k_{III}}{\gamma_v}\,\frac{(\gamma^2 - \beta^2)\,p_k - \gamma^2 p_l + \beta^2 p_i}{\beta\gamma(\beta + \gamma)}\,, \tag{63}$$

$$(v_y)_{k,III} = (v_y)_{k,IV} = -\frac{k_{III}}{\gamma_v}\,\frac{(\nu^2 - \mu^2)\,p_k - \nu^2 p_m + \mu^2 p_n'}{\mu\nu(\mu + \nu)}\,k_{III}\,; \tag{64}$$

v dielčej oblasti IV:

$$(v_x)_{k,IV} = -\frac{k_{IV}}{\gamma_v}\,\frac{(\gamma^2 - \beta^2)\,p_k - \gamma^2 p_l + \beta^2 p_i}{\beta\gamma(\beta + \gamma)}\,, \tag{65}$$

$$(v_y)_{k,IV} = (v_y)_{k,III} = -\frac{k_{IV}}{\gamma_v}\,\frac{(\nu^2 - \mu^2)\,p_k - \nu^2 p_m' + \mu^2 p_n}{\mu\nu(\mu + \nu)} - k_{IV}\,. \tag{66}$$

Tu značí:

$$p'_m = \frac{1}{\mu k_{III} + \nu k_{IV}} \left[\frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu} (k_{III} - k_{IV})\, p_k + (\mu + \nu)\, k_{III} p_m + \right.$$
$$\left. + \frac{\mu^2}{\nu} (k_{IV} - k_{III})\, p_n + \gamma_v \mu(\mu + \nu)\,(k_{IV} - k_{III}) \right], \tag{67}$$

$$p'_n = \frac{1}{\mu k_{III} + \nu k_{IV}} \left[\frac{\nu^2 - \mu^2}{\mu} (k_{IV} - k_{III})\, p_k + \frac{\nu^2}{\mu} (k_{III} - k_{IV})\, p_m + \right.$$
$$\left. + (\mu + \nu)\, k_{IV} p_n + \gamma_v \nu(\mu + \nu)(k_{IV} - k_{III}) \right]. \tag{68}$$

Zložky priesakovej rýchlosti ako derivácie potenciálnej funkcie φ sú:
v dielčej oblasti III:

$$(v_x)_{k,III} = k_{III} \frac{(\gamma^2 - \beta^2)\, \varphi_k - \gamma^2 \varphi_l + \beta^2 \varphi_i}{\beta\gamma(\beta + \gamma)}, \tag{69}$$

$$(v_y)_{k,III} = (v_y)_{k,IV} = k_{III} \frac{(\nu^2 - \mu^2)\, \varphi_k - \nu^2 \varphi_m + \mu^2 \varphi'_n}{\mu\nu(\mu + \nu)}; \tag{70}$$

v dielčej oblasti IV:

$$(v_x)_{k,IV} = k_{IV} \frac{(\gamma^2 - \beta^2)\, \varphi_k - \gamma^2 \varphi_l + \beta^2 \varphi_i}{\beta\gamma(\beta + \gamma)}, \tag{71}$$

$$(v_y)_{k,IV} = (v_y)_{k,III} = k_{IV} \frac{(\nu^2 - \mu^2)\, \varphi_k - \nu^2 \varphi'_m + \mu^2 \varphi_n}{\mu\nu(\mu + \nu)}. \tag{72}$$

Tu značí:

$$\varphi'_m = \frac{1}{\mu k_{III} + \nu k_{IV}} \left[\frac{\mu^2 - \nu^2}{\nu} (k_{III} - k_{IV})\, \varphi_k + (\mu + \nu)\, k_{III} \varphi_m + \frac{\mu^2}{\nu} (k_{IV} - k_{III})\, \varphi_n \right], \tag{73}$$

$$\varphi'_n = \frac{1}{\mu k_{III} + \nu k_{IV}} \left[\frac{\nu^2 - \mu^2}{\mu} (k_{IV} - k_{III})\, \varphi_k + \frac{\nu^2}{\mu} (k_{III} - k_{IV})\, \varphi_m + (\mu + \nu)\, k_{IV} \varphi_n \right]. \tag{74}$$

Pre uzol k použije sa nasledovná rovnica (vyjadrenie v termínoch funkcie p):

$$(\mu k_{III} + \nu k_{IV}) \left[\frac{p_l}{\beta(\beta + \gamma)} + \frac{p_i}{\gamma(\beta + \gamma)} \right] + \frac{k_{III}}{\mu}\, p_m + \frac{k_{IV}}{\nu}\, p_n -$$
$$- \left(\frac{\mu k_{III} + \nu k_{IV}}{\beta\gamma} + \frac{\nu k_{III} + \mu k_{IV}}{\mu\nu} \right) p_k = \gamma_v (k_{III} - k_{IV}). \tag{75}$$

Ak použijeme pre riešenie funkciu φ, nahradíme (75) rovnicou:

$$(\mu k_{III} + \nu k_{IV}) \left[\frac{\varphi_l}{\beta(\beta + \gamma)} + \frac{\varphi_i}{\gamma(\beta + \gamma)} \right] + \frac{k_{III}}{\mu}\, \varphi_m + \frac{k_{IV}}{\nu}\, \varphi_n -$$
$$- \left(\frac{\mu k_{III} + \nu k_{IV}}{\beta\gamma} + \frac{\nu k_{III} + \mu k_{IV}}{\mu\nu} \right) \varphi_k = 0. \tag{76}$$

c1c) Rozhranie je šikmé.

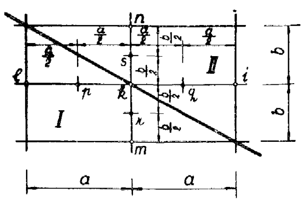
Zostavenie rovníc ozrejmíme na príklade (pozri obr. 7). V takom prípade je treba voliť sieť tak, aby hranica prechádzala uzlami siete.

Rovnica pre uzol k znie:

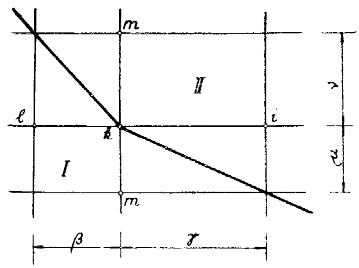
$$k_I \frac{b^2}{a^2}(p_l - p_k) + k_{II}\frac{b^2}{a^2}(p_i - p_k) + k_I(p_m - p_k) + $$
$$+ k_{II}(p_n - p_k) = \gamma_v b(k_I - k_{II}) . \tag{77}$$

Ak zavedieme funkciu ψ musí pre uzol k platiť:

$$k_I \frac{b^2}{a^2}(\psi_l - \psi_k) + k_{II}\frac{b^2}{a^2}(\psi_i - \psi_k) + k_I(\psi_m - \psi_k) + k_{II}(\psi_n - \psi_k) = 0 . \tag{78}$$



Obr. 7. Izotropné prostredie s pretržito premennou priepustnosťou, rozhranie je šikmé.



Obr. 8. Izotropné prostredie s pretržito premennou priepustnosťou, rozhranie je šikmé a lomené.

Výpočet zložiek priesakovej rýchlosti v uzle k je zdĺhavý a zložitý; bude preto vhodnejšie na tieto usudzovať zo zložiek, ktoré môžeme priamo a jednoducho vypočítať u stredobodoch p, q, r, s (pozri obr. 7).

Podobne postupujeme aj keď šikmé rozhranie ide v smere druhej uhlopriečky ôk siete (pozri obr. 7), pravidlo je, že pre koeficienty neznámych p_l, p_i ... sa použije koeficient priepustnosti v tom istom uzle.

ad c2) Zostavenie rovníc pre izotropnú nehomogénnu oblasť zloženú z viacerých homogénnych oblastí. Tu zbýva odvodiť rovnicu pre uzol, v ktorom sa:

c2a) hranica lomí,

c2b) stýkajú hranice viacerých dielčich oblastí.

c2a) Lom hranice.

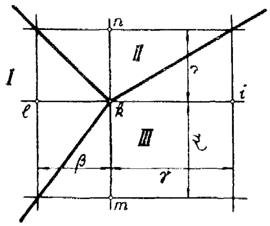
Zostavenie rovnice ukážeme na príklade (pozri obr. 8). Podľa skôr uvedených pravidiel, je treba sieť voliť tak, aby uzly ležali na lomenej hranici.

Pre uzol k musí platiť:

$$\frac{k_I}{\beta(\beta+\gamma)}(p_l - p_k) + \frac{k_{II}}{\gamma(\beta+\gamma)}(p_i - p_k) + \frac{k_I}{\mu(\mu+\nu)}(p_m - p_k) +$$
$$+ \frac{k_{II}}{\nu(\mu+\nu)}(p_n - p_k) = \frac{\gamma_r}{\mu+\nu}(k_I - k_{II}) . \tag{79}$$

Ak použijeme funkciu ψ, rovnica znie:

$$\frac{k_I}{\beta(\beta + \gamma)} (\psi_l - \psi_k) + \frac{k_{II}}{\gamma(\beta + \gamma)} (\psi_i - \psi_k) + \frac{k_I}{\mu(\mu + \nu)} (\psi_m - \psi_k) + \\ + \frac{k_{II}}{\nu(\mu + \nu)} (\psi_n - \psi_k) = 0 \,. \tag{80}$$



Obr. 9. Izotropné prostredie s pretržito premennou priepustnosťou, styk viacerých dielčich oblastí.

O výpočte priesakových zložiek platí to isté ako v odstavci c1c, práve tak ako o zostavení rovnice pre iný smer lomenej hranice.

c2b) V uzle sa stýka viac hraníc dielčich oblastí.

Ak hranice dielčich oblastí prechádzajú uzlami siete podobne ako na pr. v obrázku 9, rovnica pre uzol k má tvar:

$$\frac{k_l}{\beta(\beta + \gamma)} (p_l - p_k) + \frac{k_i}{\gamma(\beta + \gamma)} (p_i - p_k) + \\ + \frac{k_m}{\mu(\mu + \nu)} (p_m - p_k) + \frac{k_n}{\nu(\mu + \nu)} (p_n - p_k) = \frac{\gamma_b}{\mu + \nu} (k_n - k_m) \,, \tag{81}$$

kde indexy $l, i \ldots$ koeficientu priepustnosti k udávajú, že ide o koeficienty tej oblasti, v ktorej ležia uzly $l, i \ldots$. Pri použití funkcie ψ je rovnica:

$$\frac{k_l}{\beta(\beta + \gamma)} (\psi_l - \psi_k) + \frac{k_i}{\gamma(\beta + \gamma)} (\psi_i - \psi_k) + \frac{k_m}{\mu(\mu + \nu)} (\psi_m - \psi_k) + \\ + \frac{k_n}{\nu(\mu + \nu)} (\psi_n - \psi_k) = 0 \,. \tag{82}$$

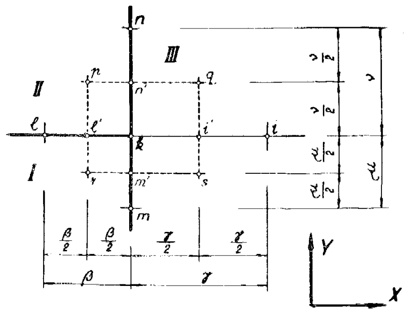
O zložkách priesakovej rýchlosti platí to isté, ako bolo zmienené v odstavci c1c).

Často sa vyskytne uzol, v ktorom sa hranice stýkajú podobne ako je to naznačené na obr. 10, t. j. prípad kedy sa hranice stotožňujú s okami siete. Vtedy sa použije rovnica (81) lebo (82), ale s tým rozdielom, že namiesto koeficientov priepustnosti k_l, k_m, k_n (vzťahuje sa len na obr. 10) sa použijú priemerné koeficienty k'_l, k'_m, k'_n podľa rovnice:

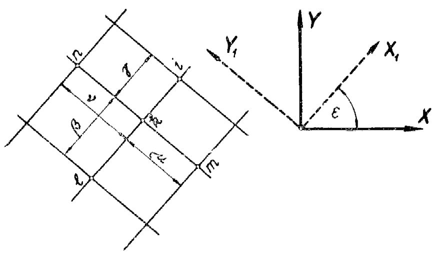
$$\begin{aligned} k'_l &= \frac{k_I \mu + k_{II} \nu}{\mu + \nu} \,, \\ k'_m &= \frac{k_I \beta + k_{III} \gamma}{\beta + \gamma} \,, \\ k'_n &= \frac{k_{II} \beta + k_{III} \gamma}{\beta + \gamma} \,, \end{aligned} \tag{83}$$

Pri stanovení priemerných koeficientov sa postupuje tak, že sa vedú symetrály medzi uzlami l, k; k, i; k, m; k, n. Tým vznikne rovnobežník p, q, r, s. Dĺžky úsekov napr. p, l'; r, l' ... (pozri obr. 10) udávajú potom váhu koeficientov priepustnosti dielčich oblastí I a II, akou sa zúčastňujú na priemernom koeficiente k'_l (pozri rovnice (83)).

d) Anizotropné homogénne prostredie so stálymi vzájomne na seba kolmými osami anizotropie.



Obr. 10. Izotropné prostredie s pretržito premennou priepustnosťou, styk viacerých dielčich oblastí.



Obr. 11. Anizotropné homogénne prostredie so stálymi vzájomne na seba kolmými osami anizotropie; nerovnostranná ortogonálna sieť.

V tomto prípade je nutné voliť sieť rovnobežne s osami anizotropie.

Rovnice pre zložky priesakovej rýchlosti sú (pozri obr. 11):

$$(v_{x1})_k = -k_{x1}\left[\frac{1}{\gamma_v}\,\frac{(\gamma^2-\beta^2)\,p_k-\gamma^2 p_l+\beta^2 p_i}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}+\sin\varepsilon\right], \tag{84}$$

$$(v_{y1})_k = -k_{y1}\left[\frac{1}{\gamma_v}\,\frac{(\nu^2-\mu^2)\,p_k-\nu^2 p_m+\mu^2 p_n}{\mu\nu(\mu+\nu)}+\cos\varepsilon\right]. \tag{85}$$

Dosadením (84) a (85) do rovnice kompatibility (3) máme:

$$\frac{k_{x1}}{\beta(\beta+\gamma)}\,p_l+\frac{k_{x1}}{\gamma(\beta+\gamma)}\,p_i+\frac{k_{y1}}{\mu(\mu+\nu)}\,p_m+$$
$$+\frac{k_{y1}}{\nu(\mu+\nu)}\,p_n-\left(\frac{k_{x1}}{\beta\gamma}+\frac{k_{y1}}{\mu\nu}\right)p_k=0\,. \tag{86}$$

Ak použijeme potenciálnu funkciu Φ_a v tvare (24), píšeme zložky priesakovej rýchlosti v uzle k takto:

$$(v_{x1})_k = k_{x1}\,\frac{(\gamma^2-\beta^2)\,\Phi_{ak}-\gamma^2\Phi_{al}+\beta^2\Phi_{ai}}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}, \tag{87}$$

$$(v_{y1})_k = k_{y1}\,\frac{(\nu^2-\mu^2)\,\Phi_{ak}-\nu^2\Phi_{am}+\mu^2\Phi_{an}}{\mu\nu(\mu+\nu)}. \tag{88}$$

Rovnica pre uzol k v termínoch potenciálnej funkcie Φ_a je (pozri rovnicu 24):

$$\frac{k_{x1}}{\beta(\beta+\gamma)}\Phi_{al}+\frac{k_{x1}}{\gamma(\beta+\gamma)}\Phi_{ai}+\frac{k_{y1}}{\mu(\mu+\nu)}\Phi_{am}+ \\ +\frac{k_{y1}}{\nu(\mu+\nu)}\Phi_{an}-\left(\frac{k_{x1}}{\beta\gamma}+\frac{k_{y1}}{\mu\nu}\right)\Phi_{ak}=0\,. \tag{89}$$

e) Anizotropné nehomogénne prostredie.

e1) Osi anizotropie majú stály smer, koeficienty k_{x1}, k_{y1} sú hladko premenné.

Diferenciálne rovnice pre zložky priesakovej rýchlosti (používame označenie rovnaké ako v obr. 11) sú rovnaké ako rovnice (21) a (22) s tým, že k_{x1} a k_{y1} sú funkciou polohy. Ich dosadením do rovnice kompatibility (3) dostávame:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_{x1}\frac{\partial p}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial y_1}\left(k_{y1}\frac{\partial p}{\partial y_1}\right)=0\,. \tag{90}$$

Diferenčné rovnice pre zložky priesakovej rýchlosti sú:

$$(v_{x1})_k=-(k_{x1})_k\left(\frac{1}{\gamma_v}\frac{(\gamma^2-\beta^2)\,p_k-\gamma^2p_l+\beta^2p_i}{\beta\gamma(\beta+\gamma)}+\sin\varepsilon\right), \tag{91}$$

$$(v_{y1})_k=-(k_{y1})_k\left(\frac{1}{\gamma_v}\frac{(\nu^2-\mu^2)\,p_k-\nu^2p_m+\mu^2p_n}{\mu\nu(\mu+\nu)}+\cos\varepsilon\right). \tag{92}$$

Ak rovnice (91) a (92) dosadíme do rovnice kompatibility (3), dostaneme diferenčnú rovnicu pre uzol k v tvare:

$$ap_l+bp_i+cp_m+dp_n+ep_k+f=0\,. \tag{93}$$

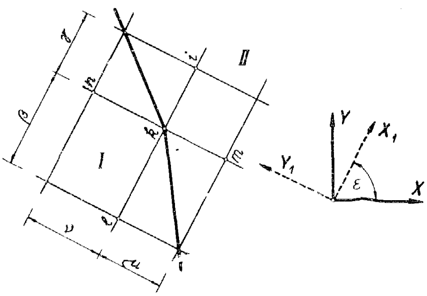
Tu značí:

$$\begin{aligned}
a&=\frac{1}{\beta+\gamma}\left\{\frac{(k_{x1})_k}{\beta}\left(2-\frac{\gamma-\beta}{\beta}\right)+\frac{1}{\beta+\gamma}\left[\frac{\gamma^2}{\beta^2}(k_{x1})_l-(k_{x1})_i\right]\right\},\\
b&=\frac{1}{\beta+\gamma}\left\{\frac{(k_{x1})_k}{\gamma}\left(2-\frac{\beta-\gamma}{\gamma}\right)+\frac{1}{\beta+\gamma}\left[\frac{\beta^2}{\gamma^2}(k_{x1})_i-(k_{x1})_l\right]\right\},\\
c&=\frac{1}{\mu+\nu}\left\{\frac{(k_{y1})_k}{\mu}\left(2-\frac{\nu-\mu}{\mu}\right)+\frac{1}{\mu+\nu}\left[\frac{\nu^2}{\mu^2}(k_{y1})_m-(k_{y1})_n\right]\right\},\\
d&=\frac{1}{\mu+\nu}\left\{\frac{(k_{y1})_k}{\nu}\left(2-\frac{\mu-\nu}{\nu}\right)+\frac{1}{\mu+\nu}\left[\frac{\mu^2}{\nu^2}(k_{y1})_n-(k_{y1})_m\right]\right\},\\
e&=\frac{(k_{x1})_k}{\beta\gamma}\left[\frac{(\gamma-\beta)^2}{\beta\gamma}-2\right]+\frac{(k_{y1})_k}{\mu\nu}\left[\frac{(\nu^2-\mu^2)}{\mu\nu}-2\right]+\\
&\quad+\frac{\gamma-\beta}{\beta+\gamma}\left[\frac{(k_{x1})_i}{\gamma^2}-\frac{(k_{x1})_l}{\beta^2}\right]+\frac{\nu-\mu}{\mu+\nu}\left[\frac{(k_{y1})_n}{\nu^2}-\frac{(k_{y1})_m}{\mu^2}\right],\\
f&=\gamma_v\cos\varepsilon\left[\frac{\nu-\mu}{\mu\nu}(k_{y1})_k-\frac{\nu}{\mu(\mu+\nu)}(k_{y1})_m+\frac{\mu}{\nu(\mu+\nu)}(k_{y1})_n\right]+\\
&\quad+\gamma_v\sin\varepsilon\left[\frac{\gamma-\beta}{\beta\gamma}(k_{x1})_k-\frac{\gamma}{\beta(\beta+\gamma)}(k_{x1})_l+\frac{\beta}{\gamma(\beta+\gamma)}(k_{x1})_i\right].
\end{aligned} \tag{94}$$

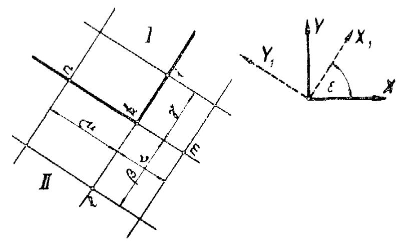
Ak použijeme potenciálnu funkciu Φ_a v tvare (24), sú zložky priesakovej rýchlosti:

$$(v_{x1})_k = (k_{x1})_k \frac{(\gamma^2 - \beta^2)\,\Phi_{ak} - \gamma^2\Phi_{al} + \beta^2\Phi_{ai}}{\beta\gamma(\beta + \gamma)}\,, \tag{95}$$

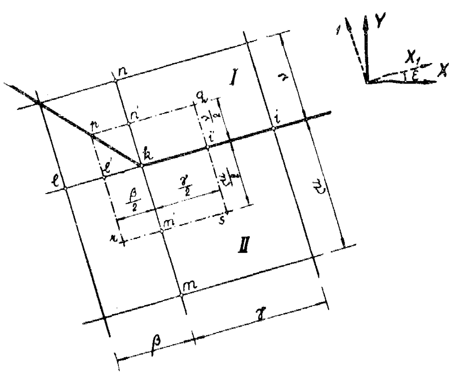
$$(v_{y1})_k = (k_{y1})_k \frac{(\nu^2 - \mu^2)\,\Phi_{ak} - \nu^2\Phi_{am} + \mu^2\Phi_{an}}{\mu\nu(\mu + \nu)}\,. \tag{96}$$



Obr. 12. Anizotropné nehomogénne prostredie s pretržitou priepustnosťou, rozhranie medzi dielčími oblasťami prechádza úhlopriečne cez polia siete.



Obr. 13. Anizotropné nehomogénne prostredie s pretržitou priepustnosťou, rozhranie sa stotožňuje so stranami siete.



Obr. 14. Anizotropné nehomogénne prostredie s pretržitou priepustnosťou, rozhranie ide čiastočne uhlopriečne a čiastočne sa stotožňuje so stranami siete.

Dosadením (95) a (96) do rovnice kompatibility (3) píšeme:

$$a\Phi_{al} + b\Phi_{ai} + c\Phi_{am} + d\Phi_{an} + e\Phi_{ak} = 0\,. \tag{97}$$

e2) Osi anizotropie majú stály smer, koeficienty k_{x1}, k_{y1} sa menia pretržite. Je treba voliť sieť rovnobežne s osami anizotropie a tak, aby hranica pretržitosti prechádzala uzlami siete. V dielčich oblastiach sú koeficienty k_{x1}, k_{y1} konštantné. Môžu tedy nastať prípady:

e2a) Rozhranie prechádza úhlopriečne cez polia siete (príklad pozri na obr. 12) je priame, alebo sa lomí,

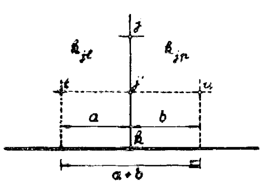
e2b) rozhranie sa stotožňuje s okami siete (príklad pozri na obr. 13), je priame, alebo sa lomí,

e2c) rozhranie ide čiastočne uhlopriečne a čiastočne sa stotožňuje s okami siete (príklad pozri na obr. 14).

Pri zostavovaní rovnice pre uzol k postupujeme vo všetkých prípadoch v zásade rovnako.

Rovnica v obecnom tvare znie:

$$\frac{(k_{x1})_{l'}}{\beta(\beta+\gamma)}(p_l - p_k) + \frac{(k_{x1})_{i'}}{\gamma(\beta+\gamma)}(p_i - p_k) +$$
$$+ \frac{(k_{y1})_{m'}}{\mu(\mu+\nu)}(p_m - p_k) + \frac{(k_{y1})_{n'}}{\nu(\mu+\nu)}(p_n - p_k) =$$
$$= \frac{\gamma_b \cos \varepsilon}{\mu+\nu}[(k_{y1})_{m'} - (k_{y1})_{n'}] + \frac{\gamma_b \sin \varepsilon}{\beta+\gamma}[(k_{x1})_{l} - (k_{x1})_{i'}] . \tag{98}$$



Obr. 15. Označenie pre výpočet náhradného koeficienta priepustnosti.

Koeficienty $(k_{x1})_{l'}$, $(k_{x1})_{i'}$ ... v rovnici (98) označujú priemerné koeficienty priepustnosti v smere X_1, prípadne Y_1 v pomocných bodoch l', i' ... ležiacich na polovičnej vzdialenosti medzi okrajovými bodmi schémy l, i ... a stredobodom k.

Tieto koeficienty sa určia následovne:

Vedieme symetrály ôk siete, ktoré na sebe vytínajú úseky $\overline{pr}, \overline{pq}$, ... Ak zavedieme označenie podľa obr. 15 označuje bod j ľubovoľný okrajový uzol schémy, čiara tu symetrálu, kj; a, b sú úseky vytnuté na symetrále tu symetrálami súsedných ôk; bod j' označuje bod na ľubovoľnej symetrále v príslušnom oku; k_{jl} a k_{jp} sú koeficienty priepustnosti (a to buď v smere tu alebo jk — podľa toho, ktorý koeficient potrebujeme) platné pre úsek tj' a $j'u$, ktoré musia byť konštantné na dĺžku tj' a $j'u$.

Priemerný koeficient priepustnosti kj' je potom

$$k_{j'} = \frac{ak_{jl} + bk_{jp}}{a+b} . \tag{99}$$

Ak použijeme potenciálnu funkciu v tvare (24), rovnica (98) sa zjednoduší takto:

$$\frac{(k_{x1})_{l'}}{\beta(\beta+\gamma)}(\Phi_{al} - \Phi_{ak}) + \frac{(k_{x1})_{i}}{\gamma(\beta+\gamma)}(\Phi_{ai} - \Phi_{ak}) +$$
$$+ \frac{(k_{y1})_{m'}}{\mu(\mu+\nu)}(\Phi_{am} - \Phi_{ak}) + \frac{(k_{y1})_{n'}}{\nu(\mu+\nu)}(\Phi_{an} - \Phi_{ak}) = 0 . \tag{100}$$

Zistenie zložiek priesakovej rýchlosti v uzle k je zdĺhavé a obťažné; je preto vhodnejšie tieto určiť v bodoch l', i' ... (pozri obr. 14) a z nich potom usudzovať na zložky rýchlosti v uzle k.

c3) Osi anizotropie majú premenný smer, ale sú stále vzájomne na seba kolmé.

V tomto prípade je výhodné voliť nepravidelnú sieť tak, aby jedna sústava ók sledovala smer maximálneho koeficienta priepustnosti (pozri obr. 16).

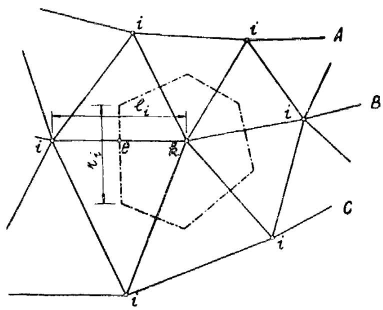
Na obrázku č. 16 sú to sledy ôk označené písmenami A, B, C. Tvar siete je ešte ďalej obmedzený podmienkou, aby vzniklé trojúholníky boli ostroúhle.

Diferenčná rovnice pre uzol k sa potom s výhodou zostavuje pre funkciu Φ_a v tvare (24) a je:

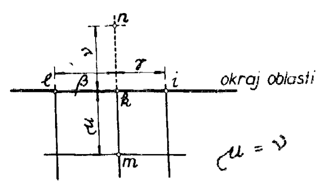
$$\sum (k_{ik})_e \frac{r_i}{l_i} (\Phi_{ai} - \Phi_{ak}) = 0 \,, \tag{101}$$

pričom za i dosadzujeme rad radom všetky uzly súsediace priamo s uzlom k. $(k_{ik})_e$ označuje koeficient priepustnosti v smere ik a v bode e.

Zložky priesakovej rýchlosti v uzle k je zdĺhavé vypočítať, môžeme na ne však usudzovať ze zložiek, ktoré zistíme pre body e.



Obr. 16. Anizotropné nehomogénne prostredie s premennými, ale stále vzájomne na seba kolmými osami anizotropie.



Obr. 17. Okrajové podmienky dané zložkou priesakovej rýchlosti normálnou k okraju.

4. Okrajové podmienky.

O možnostiach okrajových podmienok sme hovorili v oddieli IV, a teraz ukážeme, ako sa zavedú do výpočtu prevádzanom metódou sietí.

4a) Okrajové podmienky sú dané potenciálom Φ, (Φ_n, Φ_a, ψ) alebo tlakom p na okrajoch oblasti.

Zavedenie týchto okrajových podmienok do výpočtu je jednoduché. Známe poradnice v uzloch siete, ktoré padnú na okraj vytvoria vynásobením príslušným koeficientom rovnice písanej pro posledný uzol ležiaci ešte vo vnútri oblasti absolutný člen.

Pre uzly na okraji ovšem rovnice nepíšeme.

4b) Okrajové podmienky sú dané normálnou zložkou priesakovej rýchlosti na okraji.

Uzlové rovnice sa v tomto prípade musia písať aj pre body na okraji, kde je daná normálna zložka priesakovej rýchlosti.

V tomto prípade sa najvhodnejšie postupuje nasledovne: Sieť sa predĺži za okraj podľa obr. 17.

Daná normálna zložka $(v_\nu)_k$ priesakovej rýchlosti v uzle k na okraji sa vyjadrí následovne:

$$(v_\nu)_k = F(p_m, p_n, k, \gamma_v, \mu) . \tag{102}$$

Namiesto p možno použiť aj potenciálne funkcie.

Rovnica (102) sa usporiada podľa p_n, takže

$$p_n = F((v_\nu)_k, p_m, k, \gamma_v, \mu) . \tag{103}$$

Za p_n sa potom dosadí do rovnice písanej pre uzol k podľa skôr uvedených smerníc a podľa vlastností oblasti, ktorou sa priesak deje.

Uvedený postup vlastne značí, že fiktívny tlak p_n je určený tak, aby príslušný interpolačný polynom pri odvodzovaní diferenčných rovnic mal v uzle k predpísanú dotyčnicu.

4c) Okrajová podmienka v časti oblasti je daná tzv. voľnou hladinou. Na voľnej hladine o musia byť súčasne splnené následovné podmienky:

$$p_o = 0 \tag{104}$$

$$(v_\nu)_o = 0 . \tag{105}$$

Pri stanovení priebehu voľnej hladiny postupujeme nasledovne:

α) Odhadneme jej priebeh a navrhneme diferenčnú sieť, pritom na voľnej hladine položíme podmienku (105).

β) Takto daný problém vyriešime a zistíme priebeh p (v uzloch na odhadnutej voľnej hladine). Ak je $p_o < 0$ a ak v uzloch bezprostredne s voľnou hladinou súsediacich a ležiacich vo vzdialenosti 1 oka siete smerom do oblasti je $p > 0$, riešenie je v rámci možností docielenia presnosti metódou sietí správne a voľná hladina leží zhruba v mieste, kde $p = 0$.

γ) Ak podmienky uvedené v odstavci β splnené nie sú, treba odhad priebehu voľnej hladiny opraviť a riešenie podľa β opakovať.

4d) Vo veľmi mnohých prípadoch je oblasť, ktorou sa priesak deje, polorovinou. Takto dané okrajové podmienky neide dobre zachytiť metódou sietí. Mohli bysme síce vytvoriť sieť s okami rastúcimi smerom do poloroviny a v určitej vzdialenosti do objektu zvoliť oka smerom do poloroviny nekonečne dlhé, tým by sa však do výpočtu vniesla značná nepresnosť, nakoľko taký postup vedie na konštantnú priesakovú rýchlosť v smere ôk kolmých k nekonečným okám siete v uzloch, kde tieto nekonečné oká začínajú.

Doporučujú sa preto použiť podľa povahy problému nasledovné dva spôsoby:

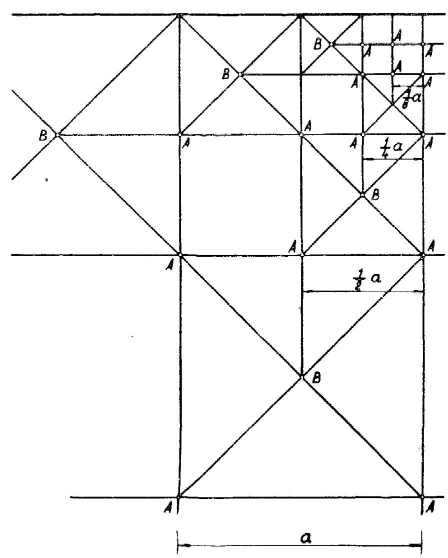
V dostatočnej vzdialenosti od objektu odhadne sa priebeh krajnej prúdnice a odhadne sa na nej priebeh potenciálu alebo tlaku p. K odhadu poslúži v homogénnych oblastiach skutočnosť, že prúdnice v dostatočnej vzdialenosti od objektu sú prakticky kružnicami a potenciálu po nich ubýva takmer rovnomerne. V iných prípadoch poslúži literatúra zaoberajúca sa riešením priesaku grafickými metódami, kedy je taktiež treba krajnú prúdnicu určovať odhadom.

Vo väčšine prípadov postačí ešte jednoduchší postup, ktorý sa praktikuje pri riešení prúdenia analógiami (na pr. analógiou elektrického poľa). V dostatočných vzdialenostiach od objektu zvolia sa hranice rovnobežné se súradnými osami, na ktorých sa buď predpokladá známy potenciál (alebo tlak p) alebo nulová normálna zložka priesakovej rýchlosti.

(Takto sme postupovali aj v konkrétnych príkladoch, ďalej riešených).

5. Zhustenie a zredenie siete a styk rôznych typov sietí.

Zhustenie sietí prevádza sa za účelom zvýšenia presnosti riešenia v miestach, kde potrebujeme podrobne poznať priebeh hľadanej funkcie a zredenie sa užíva k vôli zníženiu počtu neznámych, t. j. za účelom zníženia pracnosti riešenia. Zredenie je na mieste v tých častiach oblasti, kde nás priebeh prúdenia menej zaujíma, alebo kde sú nedostatočne známe vlastnosti podložia, takže pri jeho charakterizovaní sme sa museli dopustiť určitých približností, a ďalej v blízkosti okrajov, kde sme zaviedli približné okrajové podmienky (pozri odstavec 4e).



Obr. 18. Zhustenie a zredenie sietí. Štvorcová sieť.

5a) *Zhustenie* a zredenie štvorcových sietí.

Príklad je uvedený na obr. 18, kde sa uvádza zhustenie štvorcovej siete v obidvoch smeroch až na 1/8 hustoty základnej siete.

V uzloch typu A používame normálnych rovníc ako boli odvodené v skorších oddieloch. Sostavenie rovníc v uzloch typu B rovnako nepôsobí ťažkosti, nakoľko uhlopriečne oká zvierajú vzájomne pravé úhly, takže aj tu môžeme použiť normálnych rovníc pre osi pootočené o 45°.

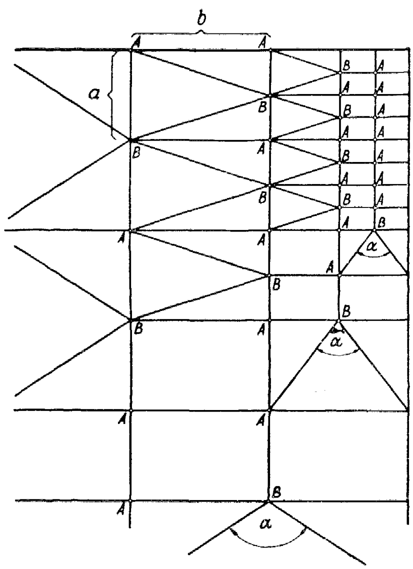
5b) Zhustenie a zredenie obdĺžnikových sietí.

Také siete je možné zhustiť vložením radu štvorcov, alebo, pokiaľ oká siete majú pomer max. 1 : 2, tiež podľa obrázku 19. Podmienkou je $\alpha < R$.

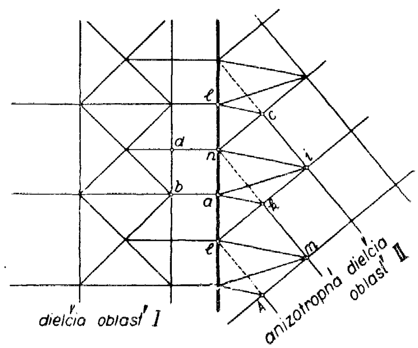
Tento spôsob zhustenia siete je vhodný najmä pri anizotropnej oblasti. Pri uzloch typu A používame normálnych rovníc pre ortogonálnu sieť, pri uzloch typu B použijeme rovnice (101).

5c) Siete ľubovoľného tvaru môžeme zhustiť alebo zrediť vložením pruhu nepravidelnej siete zloženej z ostrouhlých trojúholníkov.

5d) Nadviazanie dvoch typov sietí na seba prevedie sa podobne ako v odstavci 5c. Príklad pozri na obr. 20, kde je zakreslený prechod z štvorcovej siete v homogénnej a izotropnej oblasti I na ortogonálnu sieť v anizotropnej oblasti II.



Obr. 19. Zhustenie a zredenie sietí. Obdĺžniková sieť.



Obr. 20. Nadviazanie dvoch typov sietí na seba.

Pre zostavenie rovnice v uzle typu n používajú sa poradnice v uzloch n, a, d, e, c, i, pre uzol typu a poradnice v a, e, b, n, i, k, a pre uzol k poradnice v l, i, m, n, k.

6. Výpočet priesakového množstva.

Priesakové množstvo tečúce oblasťou zistíme integráciou zložky priesakovej rýchlosti normálnej k rezu, v ktorom priesakové množstvo zisťujeme. Pri použití metódy sietí je výhodné viesť taký rez buď uzlami siete (po okách) alebo stredom medzi uzlami siete (taktiež po okách). Zistené normálne zložky vynesú sa potom najlepšie graficky vo vhodnom merítku a plocha udávajúca priesakové množstvo tečúce kolmo na rez sa zistí planimetrovaním.

7. Vykreslenie hydrodynamickej sieťky.

Vyriešením systému lineárnych rovníc vzniklého z uzlových rovníc siete obdržíme poradnice tlaku p alebo potenciálnej funkcie Φ, (Φ_n, Φ_a, ψ) v uzloch siete. Ekvipotenciály zistíme interpoláciou (najlepšie grafickou) z vypočítaných poradníc.

Prúdnice k daným ekvipotenciálam zistíme najrýchlejšie z podmienky ich ortogonality s ekvipotenciálami (ak sa jedná o podložie homogénne). Možno ovšem tiež postupovať polopočtársky a to tak, že sa zistia priesakové rýchlosti v niekoľkých vhodne zvolených rezoch a integráciou ďalej súčtová čiara, ktorej posledná poradnice dá priesakové množstvo tečúce rezom. Nad základňou súčtovej čiary vedieme potom priamky (rovnobežné so základňou), ktorých vzájomná vzdialenosť sa rovná k násobnému rozdielu dvoch súsedných ekvipotenciál (na pr. potenciály sú kreslené po 10% celkového rozdielu, to je napr. 5 m; poradnice súčtovej čiary majú rozmer k m — k je koeficient priepustnosti, a vzdialenosť vodorovných priamok potom bude 5 k m, ovšem v merítku nákresu).

Tieto priamky vytínajú na súčtovej čiare úseky; ak ich prenesieme do skôr zmieneného rezu, určujú polohu prúdnic. (Rezy ovšem môžu byť aj zalomené).

8. Riešenie systémov lineárnych algebraických rovníc.

Vzniklý systém rovníc je možné riešit nasledovnými spôsobmi:

a) iteráciou,

b) relaxáciou,

c) niektorou priamou metódou.

ad a) Nakoľko jednotlivé uzlové rovnice nemajú (okrem rovníc pri okrajoch oblasti) prevládajúci diagonálny člen (súčet absolútnych hodnôt všetkých nediagonálnych koeficientov je práve rovný koeficientu v diagonále systému), vyhliadky iterácie sú vôbec neisté a prípadná konvergencia veľmi pomalá. Tento spôsob je preto najnevýhodnejší z troch uvedených a v praxi sa nepoužíva.

ad b) Relaxácia, ktorá je vlastne cieľavedomou iteráciou, je vhodná:

α) ak použitá sieť je úplne pravidelná,

β) ak v danej oblasti platí len jeden typ, alebo nanajvýš dva typy uzlových rovníc,

γ) ak sa daný problém rieši len pre jeden druh okrajových podmienok.

Vtedy nie je obyčajne potreba k riešení počítacieho stroja, nakoľko jednoduché početné úkony sa robia naspamäť a výpočet postupuje rýchle vopred. Nadväzovanie jednotlivých dielčich oblastí a nepravidelná sieť spomaľujú početný postup veľmi dôkladne a ak k tomu pristúpi nutnosť riešiť problém pre dva alebo viac druhov okrajových podmienok (na pr. pre rôznu polohu drénov atď.), relaxácia je nevýhodná.

Relaxačný postup je podrobne popísaný v literatúre (pozri [44]).

ad c) Priamy spôsob riešenia systému lineárnych rovníc.

Z niekoľkých spôsobov priameho riešenia osvedčia sa najlepšie metóda skrátenej eliminácie popísaná v literatúre v diele [38].

VII. Príklady

V tejto časti ukážeme výsledky riešenia jedného konkrétneho prípadu prúdenia podzemnej vody. Podobné príklady nájde čitateľ v dielach uvedených na konci v literatúre pod číslami [1], [35], [36], [42], [44], [45].

Gravitačný múr na priepustnej vrstve.

V tomto príklade sa rieši prúdenie podzemnej vody pod gravitačnou priehradou. Múr je založený na veľmi mocnej vrstve silno rozpukanej, zvetralej a priepustnej vyvrelej horniny podloženej masívom sprehýbaných a polámaných bridlíc. Na styku hornín nachádza sa vrstva silno porušených kontaktov.

Priepustná vrstva je prerazená betónovým poprsným múrom oddilatovaným od telesa hrádze. Príslušná škára je starostlivo utesnená. Poprsný múr je zapustený asi 1 m do bridlíc a nadstavený injekčnou clonou. Pod múrom je prevedená dvojstupňová plošná injektáž, z ktorej spodný stupeň zasahuje do bridlíc.

Na vzdušnej strane poprsného múru v jeho spodnej tretine sa umiestňuje priebežný drén a odvodňuje sa do revíznej chodby v poprsnom múre. Ďalší priebežný drén je usporiadaný pri vzdušnej päte priehrady. Drén za poprsným múrom udržiava tlak vody na výške 1 m vodného stĺpca, zatiaľ čo drén na strane vzdušnej znižuje tlak na nulovú hodnotu. Priehrada je z vzdušnej strany zasypaná. Nakoľko by zásyp mohol pôsobiť nepriaznivé zvýšenie vztlaku pod múrom, podkládá sa pod neho plošný drén. Pre riešenie boli zavedené relatívne koeficienty priepustnosti, ktoré sa uvádzajú na obr. 21. Okrajové podmienky na vodorovnej spodnej hranici sa zaviedli tým, že sa za touto hranicou predpokladala nepriepustná hornina. Na zvislom ohraničení pred a za múrom sa predpokladal známy potenciál. Takto približne zavedené podmienky znehodnocujú riešenie v priľahlej časti; no tieto okrajové podmienky majú zanedbateľný vplyv na prúdenie pri objekte, ktoré nás zaujíma. Riešenie tohoto zložitého prípadu prúdenia podzemnej vody si vyžiadalo sieť o 141 vnútorných uzloch. Sieť je vykreslená na obr. 21.

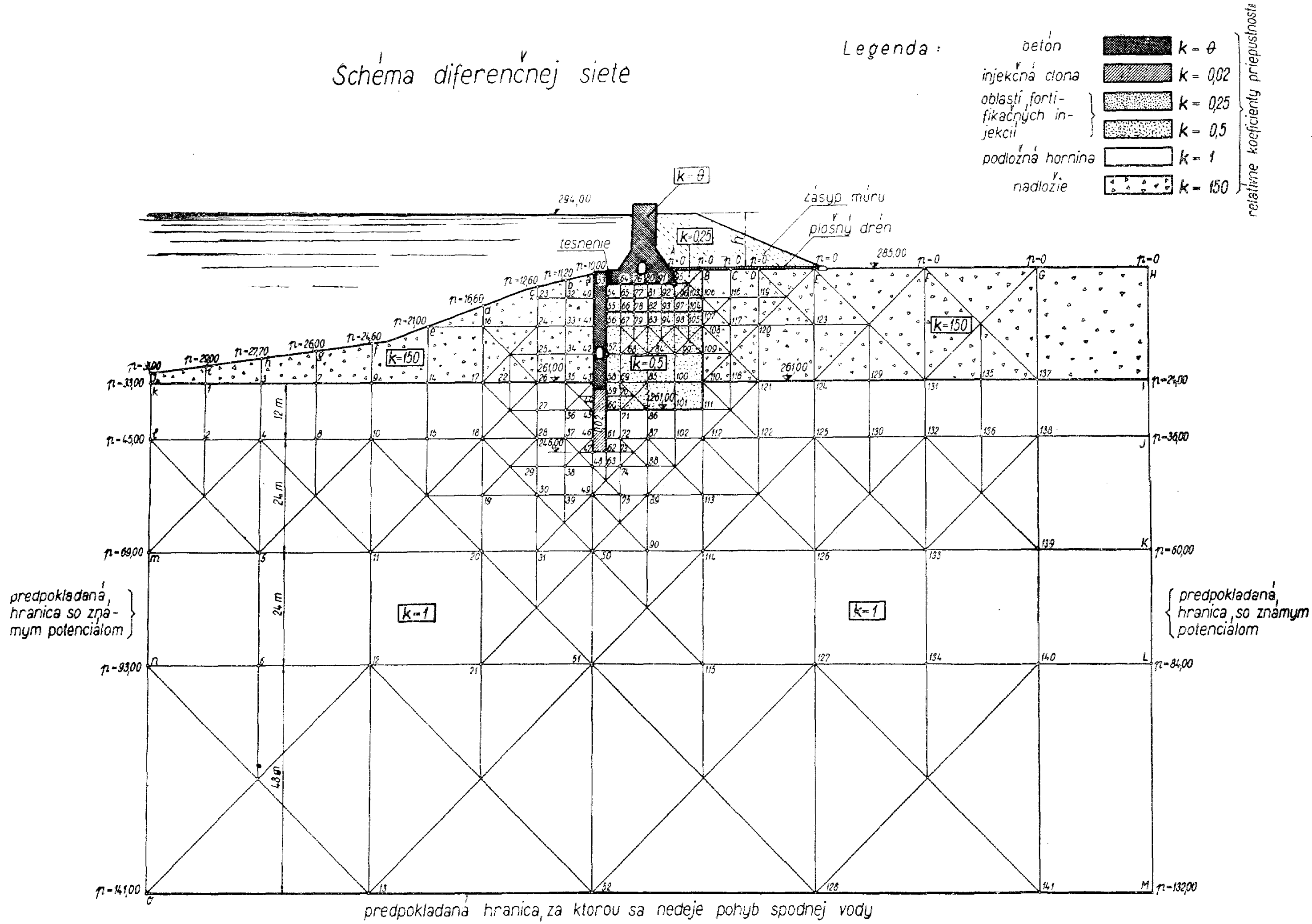
Problém sa vyriešil pre nasledovné tri eventuality:

1. Drén aj tesnenie medzi poprsným múrom a priehradou správne fungujú.

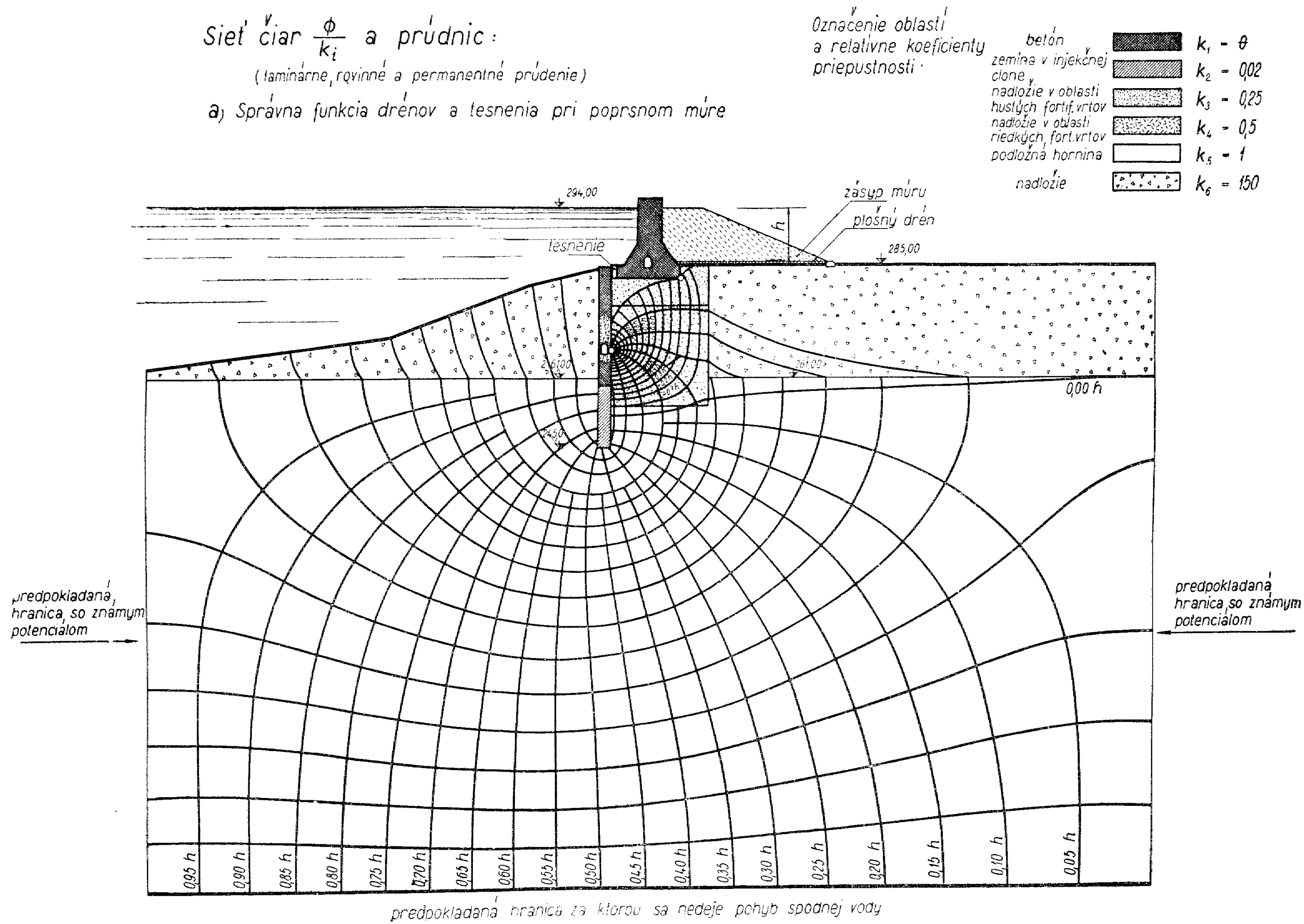
2. Drény sú upchaté, tesnenie medzi poprsným múrom a priehradou správne funguje.

3. Drény sú upchaté, tesnenia medzi poprsným múrom a priehradou je porušené a porušenie je tak veľké, že v trhline je plný hydrostatický tlak daný hĺbkou pod hladinou.

Pre nedostatok miesta tu uvádzame len hydrodynamickú sieťku pre prvú eventualitu funkcie sústavy (obr. 22).



Obr. 21. Znázornenie konštrukcie a rozvrženie siete.



Obr. 22. Hydrodynamická sieťka — drény a tesnenie v správnej funkcii.

Z výsledkov možno spraviť tieto uzávery:

a) Poprsný múr bránil veľmi účinne vzniku vztlaku pod hrádzou a podstatne predlžuje priesakovú dráhu a znižuje priesakové množstvo.

b) Drén za poprsným múrom je velmi účinný a ak sa podarí zaistiť, aby udržiaval tlak vody na 1 m vodného stĺpca, zbaví základ priehrady vztlaku vôbec. Odčerpá prakticky všetku presiaknutú vodu.

c) Drén na vzdušnej päte zdi postráda pri správnej funkcii drénu za poprsným múrom oprávnenie, nakoľko voda doňho sa dostavšia bude presakovať do drénu za poprsným múrom.

d) Je treba storostlivo previesť tesnenie medzi priehradou a poprsným múrom. Ak sa poruší, priehrada sa vystaví vysokému vztlaku a to najmä ak drén za poprsným múrom bude zle fungovať.

e) Plošnú injektáž podložia je treba previesť a to preto, že v prípade porušenia tesnenia by nastal hydraulický spád cca 1,0 medzi porušeným tesnením a drénom za poprsným múrom, čo je hodnota pre neošetrenú veľmi rozpukanú skalu neprípustná. Podinjektovanie taktiež znižuje spád v podložných bridliciach.

f) Vytvorenie injekčnej clony pod poprsným múrom je nutné, nakoľko rozpukaná skala prakticky priesaku nebráni, takže pri pomerne malom zapustení poprsného múru by okolo jejho konca nastalo zvýšené prúdenie.

g) Nepreinjektovaná skala sa vzhľadom k vysokej relatívnej priepustnosti nezúčastní na deformácií potenciálového poľa. Poprsný múr je namáhaný takmer plným vodným tlakom. Preto bolo oprávnené nebrať vo výpočte zreteľ na ešte priepustnejšiu vrstvu kontaktov medzi skalou a bridlicami. Táto vodonosná vrstva nemá v daných pomeroch priepustnosti bridly a skaly na potenciálové pole žiadny vplyv.

h) Pod zásypom na vzdušnej strane priehrady je treba aspoň na určitom úseku zriadiť plošný drén ako poistku proti zlyhaniu drénov.

ZOZNAM LITERATÚRY

Literatúra zaoberajúca sa prúdením podzemnej vody je veľmi rozsiahla a nemôžeme ju tu celú uvádzať. Ohľadne sovietskej literatúry, z ktorej uvádzame len najznámejšie diela, odkazujeme na úplný zoznam v knihe [42]. Podrobný zoznam diel zaoberajúcich sa metódou sietí uvádza práca [5].

[1] *Аравин, Нумеров:* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде, 1953.

[2] *Bažant ml.:* Proudění podzemní vody a jeho vliv na navrhování základů staveb, zvláště jezů, 1938.

[3] *Bažant:* Kreslení proudových sítí. Vodní hospodářství, 1954.

[4] *Bažant:* Stabilita nekohesních zemin v křivočarém vzestupném proudění, 1954.

[5] *Babuška-Mejzlík:* O řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí. Časop. pro pěstování matematiky, roč. 80 (1950).
[6] *Bezdíček:* Les souspressions dans un barrage en terre. III. pr. kongres, 1948.
[7] *Casagrande:* Seepage through dams. Journ. New Engl. Wat. Wks. Assoc., 1937, 131.
[8] *Dachler:* Grundwasserströmung, 1936.
[9] *Дворяшин:* О нормах на гравитационные плотины. Гидрот. Строит., 1936, VII, 12.
[10] *Дворяшин:* Расчет гравитационных плотин, 1938.
[11] *Floris:* Uplift pressure in gravity dams. Western Construction News, 1928, II.
[12] *Forchheimer:* Hydraulik, 1914.
[13] *Фильчаков-Панчишин:* Прибор для исследования фильтрации по методу ЕГДА, 1949.
[14] *Гришин:* Гидротехнические сооружения, 1954.
[15] *Hinds:* Upward pressures under dams. Trans. Am. Soc. Civ. Engnrs, 1929, 1527.
[16] *Houk:* Uplift pressure in gravity dams. Western Construction News, 1930, 344.
[17] *Houk:* Uplift pressures in masonry dams. Civil Engineering, 1932, 578.
[18] *Houk:* Dams and uplift. Engrs. News. Rec., 1932, II, 52.
[19] *Henry:* Stability of straight gravity dams. Trans. Am. Soc. Civ. Engnrs., 1934, 1041.
[20] *Hoffmann:* Permeazioni d'aqua e loro effeti nei muri di ritenuta, 1928.
[21] *Ježdík:* Statické řešení, 1946.
[22] *Ježdík:* Technický slovník naučný — heslo vztlak.
[23] *Kelen:* Gewichtsstaumauern und massive Wehre, 1933.
[24] *Kratochvil:* Vztlak a průsek betonovou zdí. Techn. obzor, 1940, 259.
[25] *Kratochvil:* Meracie prístroje a metódy pre sústavný výskum priehrad. Technik, 1946/47, 240.
[26] *Kratochvil:* Souspressions sur les fondations du barrage de Kníničky. III. pr. kongres, 1948.
[27] *Kratochvil:* Hydraulika, 1951.
[28] *Kratochvil:* Údolné priehrady, 1954.
[29] *Kratochvil:* Měření na betonové přehradě, 1949.
[30] *Kuchař:* Vztlak gravitačních zdí údolních přehrad. Techn. obzor, 1944, 265.
[31] *Ломизе:* Фильтрация в трещиноватых породах, 1951.
[32] *Lossmann:* Zakládání tížných přehrad, 1950.
[33] *Link:* Ueber Sohlenwasserdruck bei Staumauern mit entwässerten Gründungssohle. Zeitschrift für Bauwesen, 1919, 517.
[34] *Lane:* Flow net and electric analogy. Civ. Engineering, 1934.
[35] *Mejzlík:* Účinnosť drénov v základovej škáre hydrocentrály. Vodní hospodářství, 1954.
[36] *Mejzlík:* Vplyv plošnej injektáže na vztlak a priesak. Vodní hospodářství, 1955.
[37] *Mejzlík:* Metóda sietí. Stavebnícký časopis, 1954.
[38] *Mejzlík:* Riešenie systémov lineárnych rovníc priamymi metódami. Inž. stavby, 1954.
[39] *Pagliaro:* Sulle sottopressioni nelle dighe. L'energia elettrica, 1932.
[40] *Parsons:* Hydrostatic uplift in pervious soils. Trans. Am. Soc. Civ. Engnrs., 1928, 1317.
[41] *Павловский:* Теория движения грунтовых вод под гидротехническими сооружениями и ее основные приложения, 1922.
[42] *Полубаринова-Кочина:* Теория движения грунтовых вод, 1952.
[43] *Prokeš-Hálek-Rybnikář:* Elektrická analogie v hydrodynamice podzemní vody, proudící pod základy staveb. Vodní hospodářství, 1954.
[44] *Southwell:* Relaxation methods in theoretical physics.

[45] *Shaw, Southwell:* Relaxation methods applied to engineering problems. Problems relating to the perlocation of fluids through porous materials. Proc. Roy. Soc. London, 1941.
[46] *Schäfer:* Unterdruck bei Staumauern. Zeitschrift für Bauwesen, 1913, 101.
[47] *Soldan*: Die Berücksichtung des Unterdrucks bei Talsperren. Zentralblatt der Bauverwaltung, 1812, 134.
[48] *Schafenak:* Versuchstechnische Lösung von Grundwasserproblemen. Wasserwirtschaft, 1931, 1.
[49] *Selim:* Dams on porous media. Proc. Am. Soc. Civ. Engnrs., 1945, 1518.
[50] *Terzaghi:* Auftrieb und Kapillardruck an betonierten Talsperren. II. p. kongres, 1933, V, 5.
[51] *Terzaghi:* Beanspruchung von Gewichtsstaumauern durch das strömende Sickerwasser. Bautechnik, 1934, 379.
[52] *Tölke:* Der Einfluss der Durchströmung von Betonstaumauern auf die Stabilität. Ing. Arch., 1931, 291.
[53] *Tölke:* Wasserkraftanlagen, 1938.
[54] *Замарин:* Курс гидротехнических сооружений, 1940.
[55] *Замарин:* Расчет движения грунтовых вод, 1928.
[56] *Жуковский:* Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод, 1909.
[57] *Лейбензон:* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде, 1947.
[58] *Панов:* Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, 1951.

Резюме

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СЕТОК К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМ ПРОТЕКАНИЯ ПОДЗЕМНОЙ ВОДЫ ПОД ГИДРОТЕХНИЧЕСКИМ СООРУЖЕНИЯМИИ

ЛАДИСЛАВ МЕЙЗЛИК (Ladislav Mejzlík)

(Поступило в редакцию 13/II 1596 г.)

Автор рассматривает плоскостные задачи ламинарной, перманентной фильтрации подземной воды под гидротехническими сооружениями. Он предполагает насыщенность пор, несжимаемость жидкости и постоянную вязкость.

Приводит соответствующие дифференциальные уравнения в частных производных для однородных, неоднородных, изотропных и анизотропных сред. В следующем разделе излагает дифференционные переводы дифференциальных уравнений для ортогональных сеток и вместе с тем занимается составлением дифференционных уравнений на разделе однородных зон с разной проницаемостью. Дает также краткие инструкции для предложения сеток и оценивает разные возможные методы решения систем симультанных алгебраических уравнений. Занимается изменениями плотности сеток и подробно разбирает разные краевые условия.

В заключении работы приводит автор пример расчета противодавления в основании плотины с двумя дренами на неоднородном основании скремленном двухэтажной цементацией.

Zusammenfassung

DIE ANWENDUNG DER METHODE DER NETZE ZUR LÖSUNG VON PROBLEMEN DER GRUNDWASSERSTRÖMUNG UNTER WASSERBAUWERKEN

LADISLAV MEJZLÍK

(Eingegangen am 13. Februar 1956.)

Der Autor beschäftigt sich mit der Lösung ebener, laminarer, permanenter Strömungen des Grundwassers unter Wasserbauwerken. Er setzt die vollkommene Sättigung der Poren, Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeit und konstante Viskosität voraus. Es werden die zugehörigen partiellen Differentialgleichungen für homogene, unhomogene, isotrope und anisotrope Integrationsgebiete angegeben.

Im nächsten Absatz werden vom Autor Differenzenumformungen der Differentialgleichungen für orthogonale Netze angeführt. Besonders werden auch die Zusammenstellungen von Differenzengleichungen an den Rändern der homogenen Gebiete mit verschiedener Durchlässigkeit berücksichtigt. Eine kurze Anleitung für das Entwerfen von Netzen und die Auswertung verschiedener Lösungsmethoden der Systeme simultaner linearer algebraischer Gleichungen werden beschrieben, sowie auch die Änderungen der Dichte des Netzes und besonders die verschiedene Randbedingungen.

Am Ende der Arbeit ist ein Beispiel angeführt und zwar die Berechnung des Auftriebes unter einer Talsperre mit zwei Entwässerungsdränen auf nichthomogenem, durch zweistufige Flächeninjektage verfestigtem Grunde.