

Aplikace matematiky

Vladimír Panc

Stabilita tenkostěnných trub a nádob se ztuženým pláštěm při rovnoměrném vnějším radiálním přetlaku

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 5, 376–393

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102540>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

STABILITA TENKOSTĚNNÝCH TRUB A NÁDOB SE ZTUŽENÝM PLÁŠTĚM PŘI ROVNOMĚRNÉM VNĚJŠÍM RADIÁLNÍM PŘETLAKU

VLADIMÍR PANC

(Došlo dne 2. března 1956.)

DT.621.81-46.539.3/4

Řešení stability válcových skořepin s kružnicovou střednicí průřezu, opatřených soustavou příčných i podélných výztuh, podle zjednodušené teorie. Odvozený vzorec dává pro speciální případ trouby vyztužené pouze příčně hodnoty kritického přetlaku bližší výsledkům zkoušek než všechny dosud existující vzorce. Zjednodušená teorie může pak být východiskem pro řešení složitějších dosud neřešených problémů.

I. Úvod

Předložená stať je věnována problému bezpečnosti proti vyboulení pláště tenkostěnných trub a nádob s kružnicovou střednicí průřezu, jejichž stěny jsou ztuženy v určitých vzdálenostech příčnými a případně i podélnými výztuhami, při působení rovnoměrného vnějšího radiálního přetlaku. Uvedený problém má v technické praxi stavební i strojní značnou důležitost při projektování různých konstrukcí, na př. podzemních reservoárů, podtlakových nádob, podvodních potrubí, parních kotlů a pod.

Vzorec pro kritický radiální přetlak p_{kr} nekonečně dlouhé trouby

$$p_{kr} = \frac{3m^2}{m^2 - 1} \frac{EJ}{r^3} = \frac{m^2}{m^2 - 1} \frac{E}{4} \left(\frac{\delta}{r} \right)^3 \tag{1}^1$$

nevyhovuje pro kratší trouby (nádoby) se ztuženými koncovými průřezy ani pro trouby se ztuženým pláštěm. Z autorova výzkumu plyne, že vzorec (1) dává dostatečně přesné hodnoty přetlaku na mezi stability pouze v případě velmi dlouhé trouby s nepřilíh tenkou stěnou, a to asi při $\frac{r}{l} < 0,05$ a $\frac{\delta}{r} > 0,01$,

¹⁾ Viz Technický průvodce svazek třetí „Nauka o pružnosti a pevnosti“, 1950, str. 309. V uvedeném vzorci značí:

m — Poissonovu konstantu, E — modul pružnosti v tahu, $J = \frac{1}{12} \delta^3$ — moment setrvačnosti průřezu stěny, δ — tloušťka stěny a r — poloměr křivosti střednice průřezu.

kde l značí vzdálenost ztužených průřezů. V ostatních případech jsou hodnoty dané vzorcem (1) zcela chybné.

Stabilitou trub opatřených v určitých vzdálenostech příčnými výztuhami při rovnoměrném vnějším radiálním přetlaku se zabývala řada vědců, zejména R. LORENZ [1], R. V. SOUTHWELL [2], R. v. MISES [3], R. MAYER [4], W. FLÜGGE [5] a S. TIMOŠENKO [6]. Tito autoři odvodili pro zmíněný problém několik různých vzorců, z nichž theoreticky nejpřesnější je klasické řešení Misesovo, které též uvádí Prof. S. Timošenko. Misesův vzorec též dosud nejlépe souhlasil s výsledky zkoušek, zpravidla však dává hodnoty kritického přetlaku o 20% i více vyšší než hodnoty změřené. Zcela nesprávné jsou vzorce Mayerovy, který se při jejich odvození dopustil dvou zásadních chyb. Předpokládal totiž a priori, že střednice průřezu v každém případě vybočí ve dvou vlnách, což je v rozporu jak s výsledky zkoušek tak i přesnějších teorií, a kromě toho zanedbal účinek smykových napětí, která u tenkostěnných konstrukcí hrají významnou a často rozhodující úlohu. Hodnoty kritického přetlaku vypočtené podle Mayerových vzorců se pak liší od výsledků zkoušek a přesnějších teorií i o několik set procent. Mayerovy vzorce jsou uvedeny též na str. 309 zmíněného Technického průvodce²⁾, a protože v určitých případech dávají hodnoty kritického přetlaku značně vyšší než správné a jindy opět značně nižší, varuje autor před jejich užíváním.

Předložený problém představuje jeden ze základních případů lokální stability (vybočení stěny tenkostěnné konstrukce mezi jejími příčnými výztuhami) tenkostěnných prismatických konstrukcí se ztuženým průřezem, kterým se v moderní technické literatuře obvykle dává název tenkostěnné pruty. Teorii těchto konstrukcí při jejich pružné rovnováze, kmitání i jejich celkové stabilitou se zabývala v posledních dvou desetiletích řada vědců zejména v SSSR³⁾. Problém jejich stability lokální zůstává však stále otevřený. Sem náleží na př. i vyboulení stěny ocelového nosníku průřezu I, které též tvoří jeden ze základních problémů a není vlastně dosud uspokojivě vyřešeno.

Odvození Misesova vzorce pro stabilitu tenkostěnné trouby s příčnými výztuhami je dosti theoreticky obtížné a pracné, takže je sotva lze použít jako východisko pro řešení některých jiných složitějších případů. Proto se autor snažil sestavit systém zjednodušujících výchozích hypotéz, které by vedly k technicky přesné teorii lokální stability tenkostěnných konstrukcí se ztuženým průřezem. Těmito hypotézami jsou předpoklad ohybové napjatosti v podélných řezech a membránové (bezmomentové) v řezech příčných a předpoklad nulového poměrného protažení ve směru tečny ke střednici průřezu. Zjednodušenou teorií lze pak pro problém stability tenkostěnných

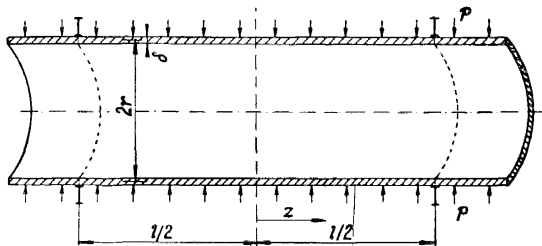
²⁾ Viz vzorce označené (393b) a (393c).

³⁾ Základ této teorie položili svými díly zejména profesori V. Z. Vlasov a A. A. Uman-skij.

trub se ztuženým pláštěm odvodit poměrně velmi snadno nový vzorec, který ve speciálním případě trouby vyztužené pouze příčně, lépe souhlasí s výsledky zkoušek, jimiž Mises prokázal dostatečnou správnost svého odvození⁴⁾.

II. Základní vzorec zjednodušené theorie

Označme souřadnice bodu střednicové plochy pláště ve směru osy skořepiny z a ve směru střednice průřezu o poloměru r úhlem φ . Počátek souřadnic z volme ve středním průřezu mezi dvěma přilehlými příčnými výztuhami,



Obr. 1. Podélný řez troubou opatřenou příčnými výztuhami.

jejichž vzdálenost značme l (obr. 1). Pružná posunutí bodu střednicové plochy pláště značme $u = u(z, \varphi)$ ve směru osy z , $v = v(z, \varphi)$ ve směru tečny ke střednici průřezu a $w = w(z, \varphi)$ ve směru normály (obr. 2). Poloměr křivosti pretvořené střednice průřezu značme $\rho = \rho(z, \varphi)$. Dále označme ε_z (ε_s) poměrné

protažení vláken ve směru osy z (tečny ke střednici průřezu), γ smykové posunutí ve střednicové ploše a κ změnu křivosti střednice průřezu. Mezi těmito složkami pružného pretvoření elementu a složkami pružného posunutí bodu střednicové plochy pláště platí známé vztahy⁵⁾

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{\partial u}{\partial z}, & \varepsilon_s &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - w \right), \\ \gamma &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\rho \partial \varphi}, & \kappa &= \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Podle předpokladu nulového poměrného protažení ve směru tečny ke střednici průřezu $\varepsilon_s = 0$ plyne

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = w \quad (3)$$

a čtyři vztahy (2) se zjednoduší vyloučením složky posunutí v , pro kterou platí relace (3), na tři vztahy tvaru

⁴⁾ Viz cit. stať [3].

⁵⁾ Viz na př. rovnice (261) v monografii [6] prof. S. Timošenka (angl. vyd. str. 434, ruské vyd. str. 441).

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\rho \partial \varphi^2} {}^6),$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right). \quad (4)$$

Pro složky měrných sil N_z , S a M podle obr. 2 a vztahů (4) uijíme relací

$$N_z = E \delta \varepsilon_z = E \delta \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$S = G \delta \gamma, \quad \frac{\partial S}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{m}{2(m+1)} E \delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\rho \partial \varphi^2} \right),$$

$$M = -E \frac{\delta^3}{12} \kappa =$$

$$= -E \frac{\delta^3}{12 \rho^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right). \quad (5)$$

Složky sil N_s a T jest pak určit ze statických výminek rovnováhy prvku stěny.

Obdobně jako všichni citovaní autoři předpokládáme přetvoření malá proti původnímu poloměru r střednice průřezu i proti poloměru křivosti ρ přetvořené střednice průřezu.

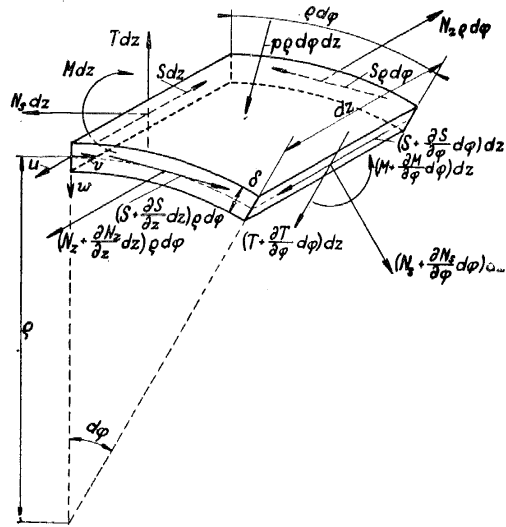
Pro poloměr křivosti ρ platí pak podle posledního vztahu (4)

$$\kappa = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r},$$

$$\rho \doteq r - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right). \quad (6)$$

III. Výminky rovnováhy

Složkové výminky rovnováhy prvku pláště ve směru osy z , tečny ke střednici průřezu, normály a momentová výminka k ose z jsou podle obr. 2 po krácení součinem $dz \cdot d\varphi$



Obr. 2. Zatížení prvku pláště skořepiny podle zjednodušené theorie.

⁶⁾ Zanedbáme veličinu malou vyššího řádu $-\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_z}{\partial z} \varrho + \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= 0, \\
\frac{\partial N_s}{\partial \varphi} + \frac{\partial S}{\partial z} \varrho - T &= 0, \\
p\varrho + N_s + \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, \\
T\varrho - \frac{\partial M}{\partial \varphi} &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Vyloučením složek N_s a T , které jsou definovány druhou a čtvrtou rovnicí (7), odvodíme se zanedbáním veličin malých vyššího řádu pro ostatní tři složky dvě diferenciální podmínky

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_z}{\partial z} r + \frac{\partial S}{\partial \varphi} &= 0, \\
p \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial z \partial \varphi} r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^4 M}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Dosaďme do rovnic (8) vztahy (5) a upravme

$$\begin{aligned}
r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{m}{2(m+1)} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{r \partial \varphi^2} \right) &= 0, \\
p \frac{12r^3}{E\delta^3} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{6m}{m+1} \frac{r^4}{\delta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 u}{r \partial \varphi^2 \partial z} \right) + \\
+ \frac{\partial^6 w}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Z první rovnice (9) plyne

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{2(m+1)}{m} r \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u}{r \partial \varphi^2} \tag{10}$$

a ze druhé odvodíme dosazením vztahu (10) a úpravou

$$\begin{aligned}
p \frac{12r^3}{E\delta^3} \left(\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left[\frac{2(m+1)}{m} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] + \\
+ \left(\frac{\partial^6}{\partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left[\frac{2(m+1)}{m} r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{12r^6}{\delta^2} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Homogenní diferenciální rovnice (11) osmého řádu v parciálních derivacích je základní rovnicí daného problému.

IV. Řešení základní rovnice při volné deplanaci krajních průřezů⁷⁾

Podmínka volné deplanace krajních průřezů je totožná s podmínkou nulových měrných normálních sil N_z v těchto průřezích. Přitom v krajních průřezích vzhledem k jejich ztužení je nulové radiální i tangenciální posunutí. Podle toho okrajové podmínky řešeného problému s přihlédnutím k prvému vztahu (5) jsou

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad w = 0, \quad v = 0 \quad (12)$$

pro $z = \pm \frac{l}{2}$.

Rovnici (11), podmínkám (12) jakož i výminkám rovnováhy (7) elementu pláště vyhovuje funkce

$$u = u_0 \sin n\varphi \sin \alpha z, \quad (13)$$

kde n je celé číslo udávající počet vln, v nichž vybočí střednice průřezu, a hodnota parametru α je

$$\alpha = (2k - 1) \frac{\pi}{l}, \quad (14)$$

značí-li k celé číslo.

Dosazením příslušných derivací funkce (13) do rovnice (11) a úpravou odvodíme nový vzorec pro radiální přetlak p na mezi stability

$$p = \frac{E\delta^3}{12r^3} \left[n^2 - 1 + \frac{12r^2}{\delta^2} \frac{\alpha^4 r^4}{n^2(n^2 - 1) \left[\frac{2(m-1)}{m} \alpha^2 r^2 + n^2 \right]} \right]. \quad (15)$$

Kritická hodnota přetlaku p_{kr} konstrukcí vyztužených pouze příčně je pak dána minimem tohoto výrazu. Do vzorce (15) dosadíme tedy hodnotu parametru α podle vztahu (14), při čemž pro minimum platí zřejmě $k = 1$, a nalezneme zkusmo takové celé číslo n , které dá minimum přetlaku p .

Řešený případ možné volné deplanace krajních průřezů má pro technickou praxi největší význam. Pro plech s moduly pružnosti v tahu $E = 2,1 \cdot 10^6$ kg/cm² a ve smyku $G = 0,81 \cdot 10^6$ kg/cm², čemuž odpovídá Poissonova konstanta $m = 3,375$, byla podle vzorce (15) vypočtena tab. I. hodnot kritického přetlaku pro různé poměry $\frac{r}{l}$ a $\frac{\delta}{r}$. Při jiném modulu pružnosti v tahu \bar{E} materiálu pláště avšak při téže Poissonově konstantě platí hodnoty kritického přetlaku uvedené v tab. I. vynásobené poměrem $\frac{\bar{E}}{E}$.

⁷⁾ Deplanací průřezu nazýváme ve shodě s teorií tenkostěnných prutů zkřivení — zborcení původně rovinného příčného průřezu konstrukce.

Tab. I. Hodnoty kritického přetlaku trub s přitěnými výtubami v případě možné volné deplance ztuzených průřezů při $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 a $G = 0,81 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$.

$\frac{\delta}{r} \cdot 10^2$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
0,00	0,004	0,034	0,113	0,269	0,525	0,91	1,44	2,15	3,06	4,20	5,59	7,26	9,23	11,5	14,2	17,2	20,6	24,5	28,8	33,6
0,05	0,015	0,097	0,271	0,479	0,787	1,22	1,81	2,57	3,53	4,72	6,17	7,89	9,91	12,3	15,0	18,0	21,5	25,4	29,8	34,6
0,10	0,031	0,189	0,487	0,962	1,71	2,79	4,27	6,23	8,72	11,8	14,4	16,9	19,6	22,7	26,2	30,0	34,3	38,9	44,0	49,6
0,15	0,047	0,272	0,723	1,35	2,89	4,22	5,94	8,14	10,9	14,2	18,2	23,0	28,5	34,9	42,3	50,7	60,1	70,7	82,5	95,6
0,20	0,063	0,353	1,03	1,98	3,43	5,50	8,32	12,0	16,3	20,3	24,9	30,2	36,4	43,4	51,4	60,4	70,4			
0,25	0,081	0,459	1,21	2,55	4,52	6,81	9,85	13,8	18,7	24,8	32,1	40,8	51,1	60,1	68,4	79,4				
0,30	0,095	0,529	1,51	2,96	5,21	8,44	12,5	16,8	22,1	28,5	36,2	45,3								
0,35	0,111	0,638	1,70	3,61	6,02	9,44	14,1	20,1	27,3	34,4	42,7	52,3								
0,40	0,126	0,705	1,94	3,97	7,16	10,9	15,7	22,0	29,9	39,6										
0,45	0,142	0,801	2,21	4,43	7,74	12,5	18,0	24,6	32,8											
0,50	0,157	0,886	2,40	5,05	8,52	13,5	20,2	28,1	36,7											
0,55	0,174	0,964	2,66	5,42	9,52	14,7	21,6	30,5												
0,60	0,188	1,06	2,92	5,85	10,3	16,2	23,3													
0,65	0,205	1,14	3,11	6,38	11,0	17,6	25,5													
0,70	0,219	1,22	3,34	6,92	11,8	18,6	27,8													
0,75	0,234	1,31	3,61	7,28	12,7	19,7														
0,80	0,251	1,40	3,82	7,71	13,6	21,1														
0,85	0,264	1,47	4,02	8,21	14,2	22,6														
0,90	0,279	1,56	4,25	8,79	15,0	23,8														
0,95	0,296	1,66	4,51	9,14	15,8															
1,00	0,309	1,73	4,73	9,54	16,7															
1,05	0,324	1,80	4,92	9,98	17,5															
1,10	0,341	1,89	5,13	10,5	18,1															
1,15	0,354	1,98	5,36	11,0	18,8															
1,20	0,368	2,06	5,62	11,4	19,6															
1,25	0,384	2,13	5,82	11,8																

Tab. II. Počet vln n , jimž odpovídají hodnoty p_{nr} podle tab. I.

$\frac{r}{z}$	$\frac{\delta \cdot 10^3}{r}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
0,00		2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0,05		3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
0,10		4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0,15		5	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0,20		6	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
0,25		7	6	5	5	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3
0,30		7	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3
0,35		8	7	6	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3
0,40		8	7	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4
0,45		9	7	7	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4
0,50		9	8	7	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4
0,55		10	8	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5
0,60		10	8	8	7	7	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5
0,65		10	9	8	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5
0,70		11	9	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6
0,75		11	9	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6
0,80		12	10	9	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6
0,85		12	10	9	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6	6	6
0,90		12	10	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	6	6	6	6	6	6
0,95		13	10	9	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	6	6	6	6	6	6
1,00		13	11	10	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	6	6	6	6	6	6
1,05		13	11	10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	6	6	6	6	6	6	6
1,10		13	11	10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	6	6	6	6	6	6	6
1,15		14	11	10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	6	6	6	6	6	6	6
1,20		14	12	10	10	9	9	9	9	9	9	9	9	9	6	6	6	6	6	6	6
1,25		14	12	11	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	6	6	6	6	6	6	6

Pokud kritický přetlak určený podle vzorce (15) vyvozuje v konstrukci napětí vyšší než je mez průtahu, nemá již jeho hodnota praktického významu. V těchto případech jest konstrukci navrhnout jen s ohledem na pevnost materiálu, respektive pro hodnotu kritického přetlaku položit

$$p_{kr} = \frac{\delta}{r} \sigma_p, \quad (16)$$

kde σ_p značí mez průtahu⁸⁾. Při výpočtu tab. I. a rovněž v tab. II., ve které jsou uvedena čísla n příslušející hodnotám tab. I., byla předpokládána mez průtahu $\sigma_p = 1900 \text{ kg/cm}^2$ a hodnoty přetlaku s odpovídajícími čísly n při napětí vyšším než σ_p jsou odděleny tlustší čarou.

V. Srovnání se zkouškami a s řešením Misesovým

Srovnáme hodnoty kritického přetlaku určené podle vzorce (15) s výsledky zkoušek, které uvádí R. v. Mises v citované stati, při čemž ovšem stejně s ním dosazujeme $E = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ a $m = 10/3$. Z tohoto srovnání provedeného v tab. III. plyne, že vzorec (15) se výsledkům zkoušek blíží lépe než vzorec Misesův. Hodnoty kritického přetlaku určené podle vzorce (15) jsou vždy nižší než hodnoty podle Misesova vzorce.

Tab. III. Srovnání odvozeného vzorce a vzorce Misesova s výsledky zkoušek.

r_{cm}	$\frac{r}{l}$	$\frac{\delta}{r}$	$p_{kr} \text{ (kg/cm}^2\text{) podle}$			$a = 100\%$		
			zkoušky a	autora b	Misesa c	b se liší od a o %	c se liší od a o %	b je nižší než c o %
50,00	0,4708	0,01620	24,0	25,4	30,0	5,8	25,0	19,2
50,00	0,2525	0,02280	32,0	33,9	39,0	5,9	21,9	15,9
48,25	0,2208	0,02632	31,6	40,8	45,0	29,1	42,4	13,3
68,55	0,7500	0,00926	9,0	10,1	11,9	12,2	32,2	20,0
7,62	0,1000	0,01434	4,6	4,3	4,8	6,5	4,3	10,9
10,16	0,1330	0,01074	2,75	2,6	2,85	5,5	3,6	9,1
10,16	0,1000	0,01074	2,18	2,0	2,15	8,3	1,4	6,9

V posledních třech sloupcích tab. III. jsou uvedeny procentuální rozdíly, a sice v prvním rozdíl výsledků vzorce (15) od výsledků zkoušek, ve druhém rozdíl vzorce Misesova od zkoušek a v posledním procento, o které vzorec (15) dává hodnoty nižší než vzorec Misesův, při čemž za základ (100%) byla vzata hodnota p_{kr} zjištěná zkouškou.

⁸⁾ Konstrukce totiž pružného vybočení není schopna. Podle teorie plasticity však velmi rychle ztrácí svou stabilitu při přetlaku, který vyvodí normálné napětí blízké mezi průtahu.

Větší neshody theorie se zkouškami u třetího a čtvrtého uvedeného měření jest přičíst tomu, že zkoušené svařované trouby měly patrně již počáteční deformace způsobené výrobou. U posledních tří měření, která provedl již v roce 1858 Fairbairn na pečlivě vyrobených modelech, vyhovuje poněkud lépe vzorec Misesův. Vzorec (15) dává pro tyto případy vždy hodnoty nižší než změřené. Avšak skutečnost, že pro poslední model dává i vzorec Misesův nižší hodnotu než jaká byla změřena, ač by měl theoreticky v každém případě dáti hodnotu vyšší, přivádí na myšlenku, že buď měl materiál poněkud vyšší modul pružnosti, než s jakým bylo počítáno, anebo se zde projevil účinek tuhosti výztuh v krajních průřezích modelů z roviny těchto výztuh⁹⁾.

Srovnajme ještě pro různé poměry $\frac{r}{l}$ a $\frac{\delta}{r}$ výsledky vzorce (15) s hodnotami podle Misesova vzorce, který můžeme považovat za theoreticky téměř zcela přesné řešení zmíněného problému. Toto srovnání je uvedeno v tab. IIIa., v jejímž každém poli je v první řádce uvedena hodnota p_{kr} s odpovídajícím počtem vln n určená podle vzorce Misesova, ve druhé řádce hodnoty vypočtené podle vzorce (15) a ve třetí procentuální rozdíl obou hodnot kritického přetlaku při základu (100%) rovném p_{kr} podle Misesova vzorce, který má při užití symbolice tvar

$$p = \frac{E\delta^3}{12r^3} \left[\frac{m^2}{m^2 - 1} \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \frac{1}{m}}{1 + \left(\frac{n}{\Delta r}\right)^2} \right) + \frac{12r^2}{\delta^2} \frac{1}{(n^2 - 1) \left[1 + \left(\frac{n}{\Delta r}\right)^2 \right]^2} \right].$$

Z tab. IIIa. je jasně vidět, že počet vln n při kritickém přetlaku určený podle obou srovnávaných vzorců je stejný, při čemž Misesův vzorec byl zejména dobře zkouškami potvrzen právě co do počtu vln n . Odehlyky v hodnotách p_{kr} podle obou vzorců rostou pak při vzrůstající tloušťce stěny a při zkracování konstrukce, avšak i pro skořepiny velmi krátké zůstávají v technicky přípustných mezích. Přitom lze usuzovat, že u kratších skořepin budou odehlyky změřených hodnot kritického přetlaku od Misesova vzorce největší, což do jisté míry potvrzuje i tab. III. Připojením příčných výztuh, ať již nýtovaným či navařovaným, dochází totiž k určitému porušení ztužených průřezů a tyto porušené průřezy snižují pak skutečnou hodnotu kritického přetlaku proti hodnotě theoretické tím více čím jsou bližší.

Z uvedených srovnání vyplývá pak důležitý závěr. Je jimi totiž prokázána dostatečná přesnost zjednodušené theorie, a tedy přípustnost systému výchozích hypotéz, proti přesnější a mnohem složitější theorii užitě Misesem v řešeném speciálním případě.

⁹⁾ Jestliže příčné výztuhy brání do určité míry deplauaci krajních průřezů, jde vlastně o částečné (pružné) vetknutí.

Tab. IIIa. Srovnání vzorce odvozeného podle zjednodušené teorie se vzorcem Misesovým.

$\frac{\delta}{r} \cdot 10^2$	$\frac{r}{l}$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
0,2	0,389 — 5	2,20 — 4	6,19 — 4	13,7 — 4	22,6 — 3	34,2 — 3	49,6 — 3	69,5 — 3	69,5 — 3 60,4 — 3 13,1
	0,353 — 5 9,3	1,98 — 4 10,0	5,50 — 4 11,1	12,0 — 4 12,4	20,3 — 3 10,2	30,2 — 3 11,7	43,4 — 3 12,5		
0,4	0,797 — 7	4,58 — 6	12,6 — 5	26,1 — 5					
	0,705 — 7 10,5	3,97 — 6 13,3	10,9 — 5 13,5	22,0 — 5 15,7					
0,6	1,22 — 8	6,96 — 7	19,5 — 6						
	1,06 — 8 13,1	5,85 — 7 15,9	16,2 — 6 16,9						
0,8	1,66 — 10	9,46 — 8	26,4 — 7						
	1,40 — 10 15,7	7,71 — 8 18,5	21,1 — 7 20,1						
1,0	2,09 — 11	12,05 — 9							
	1,73 — 11 17,2	9,54 — 9 20,8							
1,2	2,55 — 12	14,8 — 10							
	2,06 — 12 19,2	11,4 — 10 23,0							

VI. Vliv dokonalého vetknutí krajních průřezů

Dokonalé vetknutí krajních průřezů vystihují okrajové podmínky

$$u = 0, \quad w = 0, \quad v = 0 \quad (17)$$

pro $z = \pm \frac{l}{2}$.

Rovnici (11) a rovněž výminkám (7) vyhovuje v tomto případě funkce

$$u = \sin n\varphi (A \sin \alpha z + B \operatorname{sh} \beta z), \quad (18)$$

kde A a B jsou libovolné konstanty, n zde opět udává počet vln křivky vybočení střednice průřezu a pro hodnoty parametrů α a β platí vzorec

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= + \frac{m+1}{m} n^2 (n^2 - 1) \frac{c}{r^2} \left[\sqrt{1 + \frac{m^2}{(m+1)^2} \frac{1}{(n^2 - 1)c} + 1} \right], \\ \beta^2 &= + \frac{m+1}{m} n^2 (n^2 - 1) \frac{c}{r^2} \left[\sqrt{1 + \frac{m^2}{(m+1)^2} \frac{1}{(n^2 - 1)c} - 1} \right], \end{aligned} \quad (19)$$

v nichž c značí

$$c = \frac{pr}{E\delta} - \frac{\delta^2}{12r^2} (n^2 - 1). \quad (20)$$

Okrajové podmínky (17) dávají pak vztah mezi konstantami A a B a implicitní transcendentní vzorec pro kritický přetlak ve tvaru rovnice pro hodnoty parametrů α a β

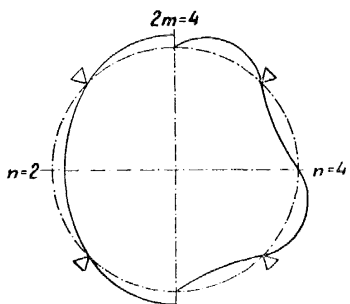
$$\left[n^2 + \frac{2(m+1)}{m} \alpha^2 r^2 \right] + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha l}{2}}{\operatorname{tgh} \frac{\beta l}{2}} \left[n^2 - \frac{2(m+1)}{m} \beta^2 r^2 \right] = 0. \quad (21)$$

Výpočet je tedy velmi pracný a je možný methodou regula falsi. Protože dokonalým vetknutím krajních průřezů se kritický přetlak proti hodnotám tab. I. zvýší, tkví určité usnadnění výpočtu v tom, že počet vln křivky vybočení střednice průřezu bude zde alespoň roven číslu n podle tab. II.

Pro $\frac{r}{l} = 0,25$ a $\frac{\delta}{r} \cdot 10^2 = 1,2$ je na př. kritický přetlak při dokonalé vetknutých okrajích skořepiny $p_{kr} = 9,78 \text{ kg/cm}^2$ a počet vln $n = 5$.

VII. Vliv podélných výztuh

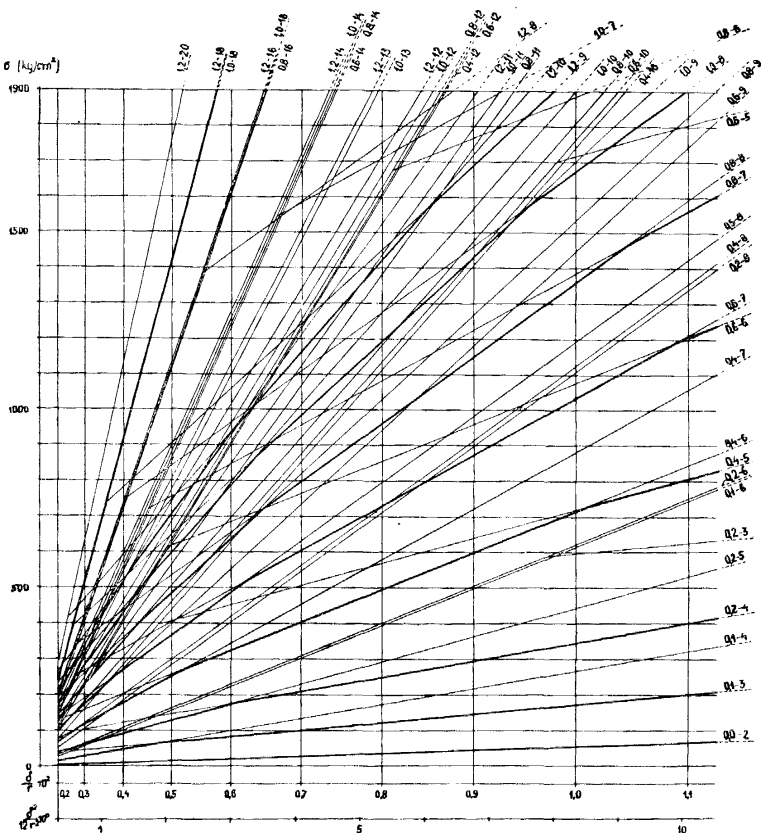
Podle vzorce (15) vypočteme tedy hodnotu kritického přetlaku p_{kr} pro plášť trouby nebo válcové nádoby ztužené pouze příčnými výztuhami tak, že určíme takové celé číslo n , pro něž je přetlak p minimální. Z toho plyne, že při použití pouze příčných výztuh lze hodnotu kritického přetlaku měnit jednak tloušťkou stěny a jednak vzdáleností příčných výztuh. Provedením



Obr. 3. První dva možné tvary křivky vybočení střednice průřezu při provedení čtyř podélných výztuh.

podélných výztuh lze však hodnotu p_{kr} zvýšit i změnou počtu vln, v nichž vybočí střednice průřezu, tedy změnou čísla n .

Rozdělme střednici průřezu $2m$ body pod stejnými středovými úhly a do těchto bodů umístíme podélné výztuhy. Tím jsou již, ovšem až při určité tuhosti podélných výztuh, dány nulové body křivky vybočení střednice průřezu (obr. 3) a hodnota kritického přetlaku se v tomto případě vypočte ze vzorce (15) jako minimum hodnot odpovídajících $n = km$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Jestliže



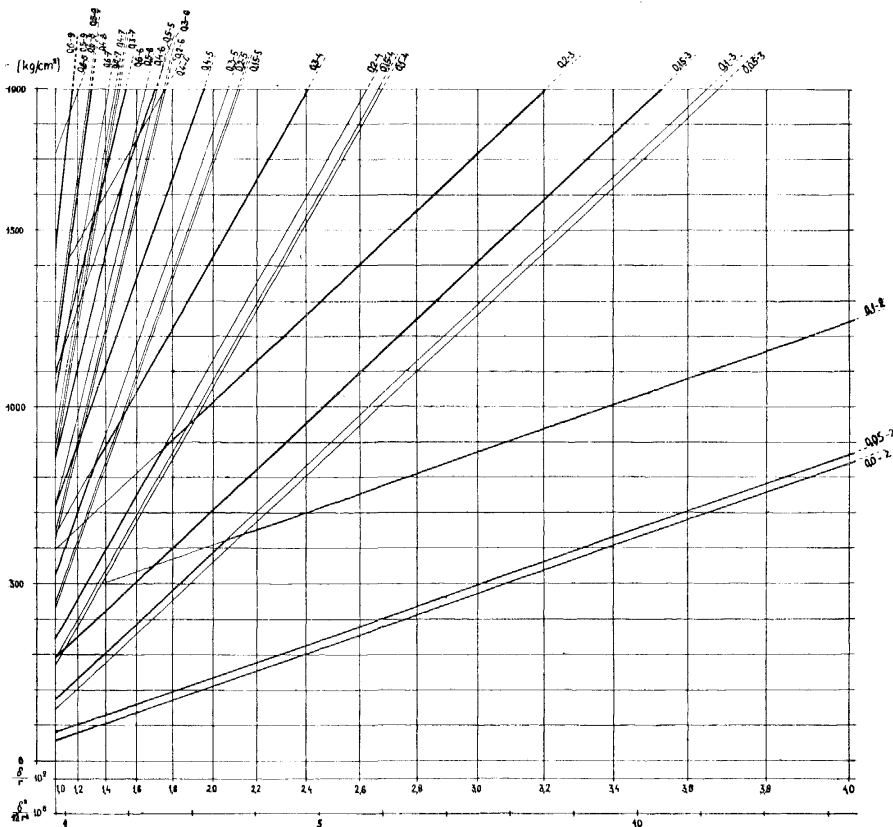
Obr. 4a. Diagram pro určení kritického normálního napětí pro trouby opatřené příčnými i podélnými výztuhami v případě možné volné deplance ztužených průřezů.

číslo m je různé od čísla n , při kterém nabývá výraz (15) svého minima, vždy se podélnými výztuhami zvýší hodnota kritického přetlaku. V případě znázorněném na obr. 3, kde jsou naznačeny první dva možné tvary křivky vybočení střednice průřezu při provedení čtyř podélných výztuh, vypočteme hodnotu kritického přetlaku ze vzorce (15) jako minimum pro sudá n ($n = 2, 4, 6, \dots$). Možnost n lichého je totiž v tomto případě podélnými výztuhami vyloučena.

Ze vzorce (15) určíme odpovídající normální napětí

$$\sigma = \frac{pr}{\delta} = E \left[\frac{\delta^2}{12r^2} (n^2 - 1) + \frac{\lambda^4 r^4}{n^2(n^2 - 1) \left[\frac{2(m+1)}{n} \lambda^2 r^2 + n^2 \right]} \right]. \quad (22)$$

Podle vzorce (22) byly sestaveny diagramy (obr. 4a–b), kterými lze snadno vyřešit daný problém, a to i s ohledem na hospodárnost provedení. V diagramech čísla uvedená u každé přímky mají tento význam: prvé číslo značí poměr



Obr. 4b. Diagram pro určení kritického normálního napětí pro trouby opatřené příčnými i podélnými výztuhami v případě možné volné deplanace ztužených průřezů.

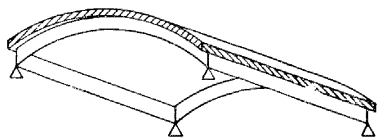
poloměru křivosti střednice průřezu ku vzdálenosti příčných výztuh, tedy $\frac{r}{l}$, druhé udává počet vln vybočení střednice průřezu, t. j. číslo n . Přitom silněji vytažené polygony, které jsou obálkou soustavy přímek pro poměr $\frac{r}{l} = \text{konst.}$, udávají hodnoty kritického napětí σ_{kr} v případě provedení pouze příčných výztuh.

Jestliže vzorec (22) dává pro $2m$ podélných výztuh, tedy dosazením $n = m$, vyšší hodnotu napětí σ_{kr} než pro $n = 2m$, platí ovšem hodnota nižší a křivka vybočení střednice průřezu by potom měla $4m$ nulových bodů. Zmíněný případ je v diagramech zřejmý z toho, že přímka pro určité n je zleva omezena přímkou pro $2n$. Pokud naopak na přímku pro určité n nenavazuje v diagramech zprava přímka pro $\frac{n}{2}$, značí to, že přímka pro $\frac{n}{2}$ je až nad mezi průtahu, a hodnoty kritického napětí udané přímkou n platí až do meze průtahu při n i $2n$ podélných výztuhách.

Pro uvedené diagramey bylo předpokládáno takové uložení krajních průřezů $z = \pm \frac{l}{2}$, které umožňuje jejich volnou deplanaci.

VIII. Válcová skořepina se ztuženými okraji

Vzorcem (15) lze určit též kritický přetlak válcové skořepiny s kružnicovou střednicí průřezu pevně podepřené po všech čtyřech okrajích (obr. 5). O okrajových výztuhách přitom předpokládáme pouze dokonalou tuhost na ohyb



Obr. 5. Válcová skořepina se ztuženými okraji.

v jejich hlavních rovinách setrvačnosti. V tomto případě funkci (13) nahradíme funkcí

$$u = u_0 \sin a\varphi \sin \alpha z, \quad (23)$$

kde hodnota parametru a závisí na středovém úhlu φ_0 střednice průřezu skořepiny a pro parametr α platí vzorec (14).

Aby byly splněny podmínky (7), je podle vztahů (10) a (23) zřejmo, že funkce w může mít pouze tvar

$$w = C \sin a\varphi \cos \alpha z, \quad (24)$$

kde C značí určitou konstantu. Protože při pevném podepření přímých okrajů skořepiny musí být $w = 0$ pro $\varphi = \pm \frac{\varphi_0}{2}$, plyne pro hodnotu parametru a

$$a = 2n \frac{\pi}{\varphi_0}, \quad (25)$$

značí-li n opět celé číslo, udávající počet vln křivky vybočení střednice průřezu¹⁰⁾.

Vzorec pro určení hodnoty kritického přetlaku odvodíme pak ze vzorce (15), v němž číslo n nahradíme hodnotou parametru a

$$p = \frac{E\delta^3}{12r^3} \left[a^2 - 1 + \frac{12r^2}{\delta^2} \frac{\alpha^4 r^4}{a^2(a^2 - 1) \left[\frac{2(m+1)}{m} \alpha^2 r^2 + a^2 \right]} \right]. \quad (26)$$

Přetlak p je zde tedy též závislý na hodnotách dvou parametrů a a α a jeho kritická hodnota je dána minimem výrazu (26). Jestliže hodnota parametru a podle vzorce (25) je celistvým násobkem čísla n , lze též snadno určit hodnotu kritického napětí podle diagramů 4a–b.

IX. Závěr

Vzorec (15) odvozený pro kritický přetlak válcové skořepiny s kružnicovou střednicí průřezu opatřené příčnými i podélnými výztuhami dává tedy podle tab. III. ve speciálním případě trouby vyztužené pouze příčně hodnoty kritického přetlaku bližší výsledkům zkoušek než vzorec Misesův, který je dosud považován za theoreticky nejpřesnější řešení tohoto problému, a který se též dosud nejvíce blížil provedeným měřením. Autor však pokládá za závažnější tu skutečnost, že podané odvození podle zjednodušené teorie je mnohem jednodušší a kratší než řešení Misesovo (v podaném odvození se řeší jediná parciální diferenciální rovnice (11), kdežto v odvození Misesově je třeba řešit soustavu tří simultánních parciálních diferenciálních rovnic), takže uvedenou teorii bude patrně možno řešit i lokální stabilitu složitějších obdobných dosud neřešených problémů. Zhruba přibližně lze odvozeného vzorce (22) pro kritické napětí užít při posouzení stability stěny nádoby se ztuženým pláštěm i při jiném jejím zatížení [7].

Co se týče návrhu výztuh při podaném řešení, pokládá autor za správný postup zvolit nejprve jejich vzdálenosti, určit hodnotu kritického přetlaku pláště a výztuhy pak dimenzovat na tento kritický přetlak s mírou bezpečnosti $\mu = 1$, a to s ohledem na jejich stabilitu i pevnost. Tím je totiž zaručeno, že celá konstrukce, t. j. její plášť i soustava výztuh, má stejnou míru bezpečnosti.

Hodnota kritického přetlaku p_{kr} , resp. kritického normálního napětí σ_{kr} , při použití příčných nebo příčných i podélných výztuh se snadno určí z uvede-

¹⁰⁾ Pro troubu, jejíž střednicí průřezu je úplná kružnice, je středový úhel $\varphi_0 = 2\pi$. Dosazením této hodnoty do výrazu (25) ovšem plyne $a = n$.

ных диаграмм. Proto i v krátkém čase lze provést několik návrhů s různým rozmístěním výztuh a vybrat řešení nejehospodárnější.

LITERATURA

- [1] *R. Lorenz*: Physikalische Zeitschrift, sv. 13, 1911, 241—257.
- [2] *R. V. Southwell*: Philosophical Magazine, sv. 25, 1913, 687.
- [3] *R. von Mises*: Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, sv. 58, 1914, 750.
- [4] *R. Mayer*: Z. d. Ver. d. Ing., sv. 53, 1914, 649; Die Knickfestigkeit, 1921, 128.
- [5] *W. Flügge*: Statik und Dynamik der Schalen, 1934, 189.
- [6] *S. Timoshenko*: Theory of Elastic Stability, 1936, 445; Устойчивость упругих систем 1955, 455.
- [7] *V. Pane*: Řešení vodorovných válcových nádob zatížených hydrostatickým přetlakem Inženýrské stavby, roč. 3, 1955, čís. 8.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБОК И СОСУДОВ СО СТЕНКАМИ УКРЕПЛЕННЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ВНЕШНЕМ РАДИАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ

ВЛАДИМИР ПАНЦ (Vladimír Pane)

(Поступило в редакцию 2/III 1956 г.)

В статье решается по новой, основательно упрощенной теории проблема устойчивости стенки цилиндрических оболочек с кругообразной средней линией поперечного сечения, укрепленных ребрами жесткости вдоль и поперек. Основными гипотезами этой упрощенной теории является предположение о напряженности изгиба в продольных сечениях, мембрановой (безмоментной) напряженности в поперечных сечениях, и предположение наличия нулевого относительного удлинения волокон в направлении касательном к средней линии сечения. Упростив таким образом данную проблему, можно сравнительно легко вывести формулу (15), которая в частном случае трубки, укрепленной ребрами жесткости только поперек, дает значения критического давления более близкие результатам, доставляемым опытами, чем все до сих пор известные формулы. Однако более значительным считает автор то обстоятельство, что приведенное решение упомянутой частной проблемы по приближенной теории гораздо проще и короче, чем классическое, теоретически точное решение Мизеса, так-

что этим упрощенным методом можно будет по всей вероятности воспользоваться и при решении локальной устойчивости аналогичных, и более сложных, пока нерешенных проблем.

Zusammenfassung

DIE STABILITÄT DÜNNWANDIGER ROHRE UND GEFÄSSE MIT VERSTEIFTEM MANTEL UNTER GLEICHMÄSSIGEM RADIALEM AUSSENDRUCK

VLADIMÍR PANC

(Eingegangen am 2. März 1956.)

Der vorliegende Beitrag löst nach einer wesentlich vereinfachten Theorie das Problem der Stabilität des Mantels der mit Quer- und Längsbewehrung versteiften kreiszylindrischen Schalen. Die Ausgangshypothesen dieser vereinfachten Theorie setzen einen Biegespannungszustand in den Längsschnitten, einen Membranzustand in den Querschnitten und eine dehnungslose Verformung der Fasern in der Tangentenrichtung zur Querschnittsmittellinie voraus. Mittels dieser Vereinfachungen lässt sich dann für das behandelte Problem verhältnismässig leicht die Formel (15) ableiten, nach der die berechnete Grösse des kritischen Aussendruckes im speziellen Falle eines nur in der Quer- richtung versteiften Rohres den Versuchsergebnissen besser entspricht als jene, die sich aus allen anderen schon bekannten Formeln ergibt. Als besonders schwerwiegend betrachtet der Autor den Umstand, dass die von ihm erbrachte Lösung des oben erwähnten speziellen Falles sich bedeutend einfacher und bequemer gestaltet als nach der klassischen, theoretisch exakten Lösung von R. v. Mises und dass man mittels dieser vereinfachten Theorie höchstwahrscheinlich auch die Lokalstabilität ähnlicher komplizierter, zurzeit noch nicht gelöster Probleme wird untersuchen können.