

Aplikace matematiky

Jan Polášek

Anulární lopatka v osově symetrickém proudovém poli

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 5, 334–375

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102539>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ANULÁRNÍ LOPATKA V OSOVĚ SYMETRICKÉM PROUDOVÉM POLI

JAN POLÁŠEK

(Došlo dne 13. října 1955.)

DT:621.63 533.1.532.5

Je podána obecná teorie potenciálního obtékání tenké anulární lopatky v osově symetrickém proudě. Je vypracováno řešení přímého a nepřímého problému. Výsledky jsou dány ve tvaru trigonometrických řad.

Přehled základních označení

$\Phi(x, y)$	potenciál rychlosti osově symetrického proudy	m^2/sek ,
$\Psi(x, y)$	proudová funkce osově symetrického proudy	m^3/sek ,
V	rychlost primárního, osově symetrického proudy	m/sek ,
V_r, V_τ	radiální a azimutální složka primární rychlosti	m/sek ,
v_r, v_τ	radiální a azimutální složka rychlosti indukované vírovými kroužky	m/sek ,
U	povrchová rychlost na lopatce	m/sek ,
v_x, v_y	axiální a radiální složka rychlosti	m/sek ,
Γ	cirkulace vírového kroužku	m^2/sek ,
$\bar{\gamma}$	hustota cirkulace spojitého rozložení vírových kroužků na anulární lopatce	m/sek ,
r	poloměr vírového kroužku	m ,
x, y, θ	válcové souřadnice,	
ϱ, β	polární souřadnice,	
t, φ		
R	poloměr náhradního oblouku	m ,
ω	rozevřená lopatky (středový úhel náhradního oblouku),	
$R(1 + \eta), \varphi$	souřadnice meridiánového řezu anulární lopatky,	
α	úhel nastavení anulární lopatky,	
$\lambda = \frac{\omega R}{8r_s}$	parametr,	
K, E	úplné eliptické integrály,	
k	modul eliptických integrálů,	
g_n	Fourierovy koeficienty v rozvoji hustoty cirkulace,	
B_n	Fourierovy koeficienty v rozvoji funkce $\frac{d\eta}{d\varphi}$,	
μ_n, ν_n	Fourierovy koeficienty složek primární rychlosti.	

Úvod

Mezi hlavní zdroje ztrát u bubnových i jiných ventilátorů patří ztráty vznikající nehomogenitou proudu vstupujícího do oběžných lopatek a odtrháváním proudu, resp. zpětným prouděním na oblíně vstupního hrdla ventilátoru. Proudové poměry ve vstupu k ventilátoru je možno zlepšit vhodným tvarem oblíny vstupního hrdla a správně zvolenou vstupní vodící anulární lopatkou. Z tohoto důvodu jsme v práci [2] vybudovali teorii obtékání tenké anulární lopatky v osově symetrickém proudu. Tato teorie byla vybudována jako teorie prvního řádu v tom smyslu, že v ní byly pokládány za malé veličiny jednak poměr délky lopatky k její vzdálenosti od osy symetrie, jednak odchylky meridiánového řezu lopatky od kruhového oblouku; veličiny druhého řádu byly (byť ne důsledně všechny) zanedbávány. Později v práci [4] jsme vybudovali, nejprve pro rovinné proudění, přesnější teorii, v níž jsou uvažovány všechny veličiny až do druhého řádu.

V předložené práci podáváme zobecnění této teorie na osově symetrický případ. Za malé veličiny prvního řádu pokládáme v tomto případě jednak odchylku meridiánu lopatky od kruhového oblouku, jednak poměr délky lopatky k (osminásobku) její vzdálenosti od osy symetrie (viz veličinu λ , rovnice (4,13)); všechny veličiny, vznikající násobením dvou veličin prvního řádu, ještě respektujeme. Logarithmus malé veličiny nepokládáme za „velkou“ veličinu, jejímž násobením se řád veličiny sníží.

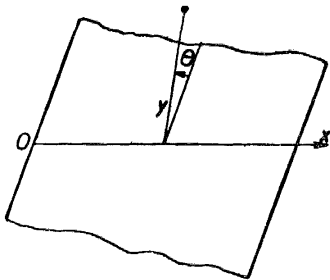
Jako v rovinné teorii předpokládáme i zde, že vedle uvedených „malých“ veličin prvního řádu“ je také středový úhel ω kruhového oblouku, nahrazujícího lopatku, malý; konkrétně to znamená, že rozvíjíme podle mocnin ω a ve výsledných vzorcích zanedbáváme mocniny ω od čtvrté počínaje (bez ohledu na to, jsou-li násobeny členem prvního nebo druhého řádu). Pro $\lambda = 0$, t. j. v rovinném případě, podržujeme při takto voleném zanedbávání tytéž členy jako v [4] a dopouštíme se tedy i při $\omega = \pi$ chyby jen asi 2%; u členů s faktorem λ klesají koeficienty u prvních mocnin ω pomaleji, takže není možno spokojiti se menším počtem členů, přestože jejich chyba se objeví ve výsledných vzorcích násobena malým faktorem λ .

Podobně jako v rovinné teorii obtékání tenkého profilu v nehomogenním silně zakřiveném proudovém poli [4] pokládáme anulární lopatku za osamocnou, t. j. superponujeme pole rozložených vírových kroužků ekvivalentních anulární lopatce na osově symetrické pole primárního proudu. Osově symetrické proudění je zpravidla vytvořeno pevnými stěnami. Superponované pole rozložených vírových kroužků poruší obecně okrajové podmínky na těchto stěnách. Abychom toto porušení vyrovnali, musíme k oběma uvedeným polím přidat ještě doplňkové proudové pole, které nemá singularit v prostoru vyplněném prouděním a vyrovná porušení okrajových podmínek, způsobené superponovaným polem lopatkových vírových kroužků. Aby vzorce, podané v této

práci, platily, musíme si myslit toto doplňkové pole zahrnuto v primárním poli (a tedy znát je dříve než začneme počítat anulární lopatku). V další práci [5] je popsáno, jak je toho možno dosáhnouti v případě vstupního hrdla odstředivých lopatkových strojů.

1. Potenciální, osově symetrické proudění

Budeme se zabývat potenciálním, osově symetrickým prouděním ideální, nestlačitelné tekutiny. Nejprve si zavedeme válcové souřadnice x, y, θ (obr. 1).



Obr. 1.

Osa x je osou symetrie. Souřadnice v libovolné meridiánové rovině pak budou x, y . Vzhledem k předpokládané osové symetrii je proudění úplně určeno, je-li známo rozložení rychlosti v půlrovině $-\infty < x < \infty, y > 0$. Poněvadž proudění je nevířivé, existuje potenciál rychlosti Φ , který hovoří třírozměrné Laplaceově rovnici. Protože se však jedná o osově symetrické proudění, bude potenciál rychlosti funkcí jenom proměnných x a y . Laplaceova rovnice pro $\Phi(x, y)$ ve válcových souřadnicích se pak zjednoduší na tvar:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0. \quad (1,1)$$

Zavedeme si dále t. zv. „Stokesovu proudovou funkci“ $\Psi(x, y)$ rovnicemi:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -y \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = y \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (1,2)$$

Z rovnic (1,1) a (1,2) plyne, že výraz

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

je úplný diferenciál. Vyloučíme-li funkci Φ z rovnic (1,2), dostaneme diferenciální rovnici pro proudovou funkci $\Psi(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = 0. \quad (1,3)$$

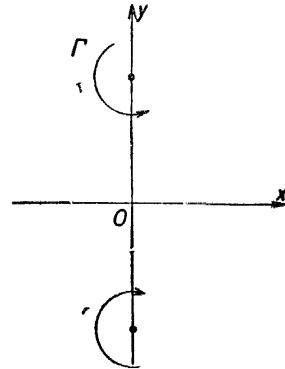
Proudová funkce $\Psi(x, y)$ nabývá na každé proudnici v meridiánové rovině konstantní hodnotu. Veličina $2\pi\Psi$ udává tok tekutiny jednotkové hustoty mezi danou proudnicí a proudnicí $\Psi = 0$.

Složky rychlosti v_x a v_y ve směru osy x a y v meridiánové rovině jsou dány rovnicemi:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ v_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1,4)$$

Vzhledem k lineárnosti a homogenitě Laplaceovy rovnice platí pro potenciál i proudovou funkci princip superposice, t. j. potenciál i proudová funkce proudění, které vzniklo složením několika potenciálních proudění, rovná se součtu potenciálů, respektive proudových funkcí příslušných jednotlivým prouděním.

Základním proudovým elementem v této práci je, jak bylo již řečeno v úvodu, vírový kroužek. Proudová funkce vírového kroužku poloměru r s cirkulací Γ , ležícího v rovině $x = 0$ a majícího osu v ose x , je



Obr. 2.

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \frac{\Gamma \sqrt{(r+y)^2 + x^2}}{2\pi} \left[\left(1 - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{k^2}{2} \int_0^{i\pi} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}} - \int_0^{i\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta} d\eta \right), \quad 1) \end{aligned} \quad (1,5)$$

kde

$$k^2 = \frac{4ry}{(r+y)^2 + x^2}. \quad (1,6)$$

Zavedeme-li si pro úplné eliptické integrály prvního, resp. druhého druhu obvyklé označení:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{i\pi} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta}}, \\ E &= \int_0^{i\pi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \eta} d\eta, \end{aligned} \quad (1,7)$$

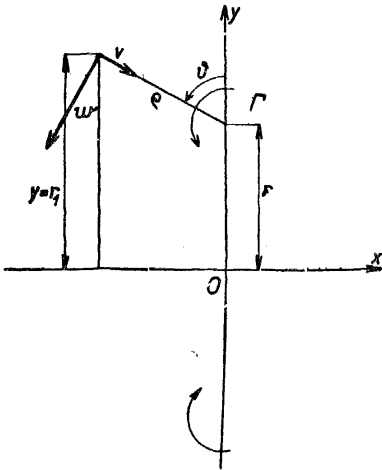
můžeme výraz pro proudovou funkci pevného vírového kroužku napsat také ve tvaru:

$$\Psi(x, y) = \frac{\Gamma \sqrt{(r+y)^2 + x^2}}{2\pi} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K - E \right]. \quad (1,8)$$

¹⁾ Proudová funkce vírového kroužku je uvedena na př. v [1], str. 85, odvození je na př. v [2], str. 8—11.

2. Rychlostní pole pevného vírového kroužku

Pro další úvahy, které budeme provádět, je výhodnější zavést v meridiánové rovině (x, y) polární souřadnice (ϱ, ϑ) s pólem v bodě $(0, r)$ a základním směrem v ose y (obr. 3). Rychlost indukovanou vírovým kroužkem v bodě (ϱ, ϑ) rozložíme na složky v, w , jak patrně z obr. 3.



Obr. 3.

Pro transformaci platí rovnice:

$$x = -\varrho \sin \vartheta, \quad y = r + \varrho \cos \vartheta \quad (2,1)$$

$$k^2 = \frac{4r(r + \varrho \cos \vartheta)}{4r^2 + \varrho^2 + 4r\varrho \cos \vartheta}.$$

Složky rychlosti v a w , indukované vírovým kroužkem, jsou:

$$v = -\frac{1}{y\varrho} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta},$$

$$w = -\frac{1}{y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho}. \quad (2,2)$$

Při derivování proudové funkce vírového kroužku uijeme známých vzorců pro derivace úplných eliptických integrálů:²⁾

$$\frac{dK}{dk^2} = -\frac{1}{2k^2} K + \frac{1}{2k^2(1-k^2)} \cdot E,$$

$$\frac{dE}{dk^2} = \frac{1}{2k^2} (E - K). \quad (2,3)$$

Derivace modulu eliptických integrálů jsou:

$$\frac{\partial k^2}{\partial \varrho} = -\frac{4r\varrho(2r + \varrho \cos \vartheta)}{(4r^2 + \varrho^2 + 4r\varrho \cos \vartheta)^2},$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial \vartheta} = -\frac{4r\varrho^2 \sin \vartheta}{(4r^2 + \varrho^2 + 4r\varrho \cos \vartheta)^2}. \quad (2,4)$$

Zavedeme-li si ještě označení

$$r_1 = y = r + \varrho \cos \vartheta, \quad (2,5)$$

dostaneme po provedení příslušných derivací a po jednoduché úpravě:

$$r_1 v = \frac{r \sin \vartheta}{2\pi} \cdot \frac{1}{(4r_1^2 + \varrho^2 - 4r_1\varrho \cos \vartheta)^{1/2}} \cdot (K - E),$$

²⁾ Viz [3], str. 78.

$$r_1 w = \frac{-\Gamma}{2\pi(4r_1^2 + \varrho^2 - 4r_1\varrho \cos \vartheta)^{3/2}} \cdot \left\{ (\varrho + 2r_1 \cos \vartheta - 2\varrho \cos^2 \vartheta) \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right] - \frac{1}{\varrho} (2r_1^2 - 3r_1\varrho \cos \vartheta + \varrho^2 \cos^2 \vartheta) [E - (1 - k^2) K] \right\}. \quad (2,6)$$

V dalším budeme potřebovat hodnoty proudové funkce Ψ a složek rychlosti v a w jen pro malá ϱ , t. j. k^2 blízká jedničce. Použijeme známých rozvoju:³⁾

$$K = A + \frac{A-1}{4} (1 - k^2) + \frac{9}{64} \left(A - \frac{7}{6}\right) (1 - k^2)^2 + \frac{25}{256} \left(A - \frac{37}{30}\right) (1 - k^2)^3 + \dots, \quad (2,7)$$

$$E = 1 + \frac{1}{2} \left(A - \frac{1}{2}\right) (1 - k^2) + \frac{3}{16} \left(A - \frac{13}{12}\right) (1 - k^2)^2 + \frac{15}{128} \left(A - \frac{6}{5}\right) (1 - k^2)^3 + \dots,$$

kde

$$A = \frac{1}{2} \log \frac{16}{1 - k^2}.$$

Dosadíme-li rozvoje (2,7) do pravé strany rovnice (1,8) a zanedbáme-li členy řádu ϱ^3 , dostaneme:

$$\Psi = \frac{\Gamma r_1}{2\pi} \left\{ A - 2 - \frac{\varrho \cos \vartheta}{2r_1} (A - 2) + \frac{\varrho^2}{8r_1^2} \left[A \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\vartheta\right) - \frac{1}{2} + \cos 2\vartheta \right] \right\}. \quad (2,8)$$

Derivováním výrazu (2,8) nebo dosazením rozvoju (2,7) do pravých stran rovnic (2,6) a zanedbáním členů řádu ϱ^2 dostaneme výrazy pro složky rychlosti indukované vírovým kroužkem:

$$r_1 v = \frac{\Gamma r}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \vartheta}{2r_1} (A - 1) + \frac{\varrho \sin \vartheta \cos \vartheta}{4r_1^2} (A - 1) \right\},$$

$$r_1 w = \frac{\Gamma r}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\varrho} - \frac{\cos \vartheta}{2r_1} (A - 2) - \frac{\varrho}{8r_1^2} \left[A (3 + 2 \cos^2 \vartheta) - \frac{5}{2} - 5 \cos^2 \vartheta \right] \right\}. \quad (2,9)$$

Položíme-li ještě v soulase se zanedbáváním členů řádu ϱ^2

$$A = \log \frac{8r_1}{\varrho} - \frac{1}{2} \frac{\varrho}{r_1} \cos \vartheta,$$

³⁾ Viz [3], str. 76; symbolem log se rozumí přirozený logaritmus.

dostaneme:

$$\begin{aligned}
 r_1 v &= -\frac{I r}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \vartheta}{2r_1} \log \varrho + \frac{\sin \vartheta}{2r_1} \left(\log \frac{1}{8r_1} + 1 \right) + \frac{\sin 2\vartheta}{8r_1^2} \varrho \log \varrho + \right. \\
 &\quad \left. + \varrho \frac{\sin 2\vartheta}{8r_1^2} \left(\log \frac{1}{8r_1} + 2 \right) \right\}, \\
 r_1 w &= \frac{I r}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\varrho} + \frac{\cos \vartheta}{2r_1} \log \varrho + \frac{\cos \vartheta}{2r_1} \left(\log \frac{1}{8r_1} + 2 \right) + \frac{4 + \cos 2\vartheta}{8r_1} \varrho \log \varrho + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varrho}{8r_1^2} \left[(4 + \cos 2\vartheta) \left(\log \frac{1}{8r_1} + 2 \right) - 2 + \frac{3}{2} \cos 2\vartheta \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{2,10}$$

3. Nahrazení anulární lopatky v osově symetrickém proudě spojitým rozložením vírových kroužků

V dalším se budeme zabývat tenkou anulární lopatkou. Obdobně jako v dvojrozměrné teorii, kde tenký profil je ekvivalentní spojitému rozložení vírových vláken, je i tenká anulární lopatka v osově symetrickém proudě ekvivalentní vírovým kroužkům spojitě rozloženým po lopatce. Úloha naléztí intenzitu vírových kroužků z daného tvaru lopatky nebo naopak vede na singulární integrální rovnice se složitými jádry. Zde se spokojíme, jako v dvojrozměrné teorii nosných vírových ploch, přibližným řešením úlohy. Nejprve přiřadíme k anulární lopatce část povrchu anuloidu, mající s uvažovanou lopatkou společnou náběžnou a odtokovou hranu. Z důvodu osové symetrie můžeme všechny úvahy provádět v jediné meridiánové půlovině; meridiánový řez této anuloidové plochy je tedy kruhový oblouk, jehož počáteční a koncový bod jsou totožné s počátečním a koncovým bodem meridiánového řezu anulární lopatky a jehož poloměr R je zvolen tak, aby tento, t. zv. „náhradní oblouk“, aproximoval pokud možná dobře meridiánový řez anulární lopatky (obr. 4).

Pro další úvahy si v meridiánové půlovině zavedeme nový systém polárních souřadnic (t, φ) (obr. 4 a 5). Počátek tohoto systému položíme do středu O kružnice náhradního oblouku a za základní směr zvolíme spojnicí středu O s průsečíkem N náběžné hrany lopatky s meridiánovou rovinou. Úhel φ počítáme kladně ve směru naznačeném na obr. 5, t. j. ve směru od náběžné k odtokové hraně. Středový úhel náhradního oblouku označíme ω a předpokládáme, že $\omega < \pi$. Rovnice meridiánového řezu anulární lopatky v této soustavě bude:

$$t = R[1 + \eta(\varphi)], \quad 0 \leq \varphi \leq \omega, \tag{3,1}$$

při čemž

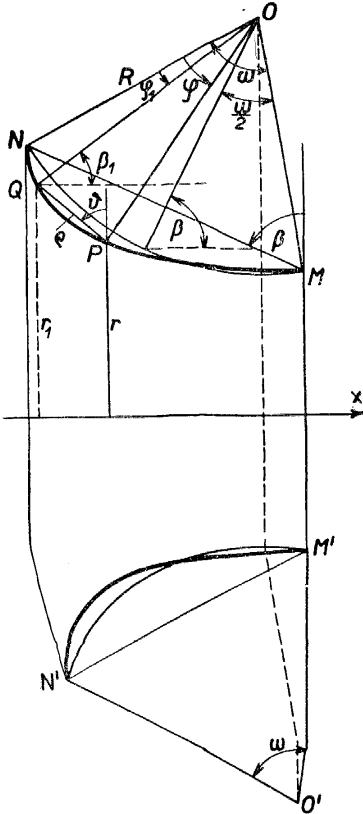
$$\eta(O) = \eta(\omega) = 0. \tag{3,2}$$

Poloha náhradního oblouku v meridiánové půlovině je určena polohou středu O a úhlem β sevřeným tětivou náhradního oblouku MN a kolmicí

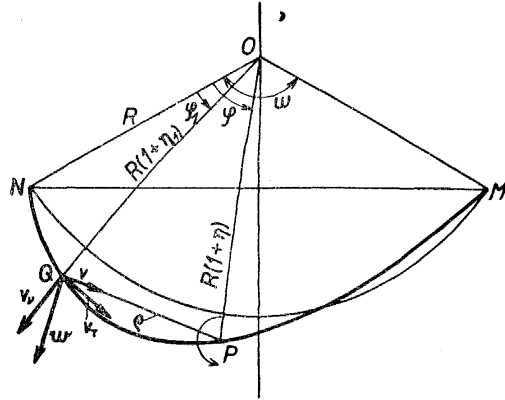
na osu symetrie. Úhel β měříme od kolmice na osu symetrie k tětivě MN kladně ve stejném smyslu jako úhel φ .

Označíme-li $\gamma(\varphi) R d\varphi^1$ intenzitu cirkulace vírových kroužků na elementárním oblouku kolem bodu $P[R(1 + \eta), \varphi]$, budou složky „náhradní rychlosti“ (název náhradní rychlost zavádíme v této práci pro součin rychlosti a vzdálenosti od osy symetrie) indukované v bodě $Q[R(1 + \eta_1), \varphi_1]$ podle (2,10):

$$r_1 dv = -\frac{r\gamma}{2\pi} \left\{ \frac{\sin \vartheta}{2r_1} \left(\log \frac{\varrho}{sr_1} + 1 \right) + \right. \\ \left. + \varrho \frac{\sin 2\vartheta}{sr_1^2} \left(\log \frac{\varrho}{sr_1} + 2 \right) \right\} R d\varphi,$$



Obr. 4.



Obr. 5.

$$r_1 dw = \frac{r\gamma}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\varrho} + \frac{\cos \vartheta}{2r_1} \left(\log \frac{\varrho}{sr_1} + 2 \right) + \frac{\varrho}{sr_1^2} \left[(4 + \cos 2\vartheta) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\log \frac{\varrho}{sr_1} + 2 \right) - 2 + \frac{3}{2} \cos 2\vartheta \right] \right\} R d\varphi, \quad (3,3)$$

kde ϱ je délka spojnice bodů P, Q a ϑ úhel sevřený touto spojnicí a kolmicí na osu symetrie (obr. 4). Cirkulaci vírových kroužků počítáme kladně ve stejném směru jako bereme kladný smysl úhlu φ .

¹⁾ Lineární hustota cirkulace vírových kroužků v bodě $[R(1 + \eta), \varphi]$ je rovna

$$\bar{\gamma}(\varphi) = \gamma(\varphi) \frac{1}{1 + \eta} \doteq (1 - \eta) \gamma(\varphi).$$

Úhel, který svírá spojnice bodů PQ s tětivou P_0Q_0 na náhradním oblouku, označíme ε (obr. 6). Úhel ε měříme od spojnice PQ k tětivě P_0Q_0 kladně ve stejném smyslu jako úhel φ . Pro elementy radiální a azimutální složky indukované náhradní rychlosti dostaneme:

$$\begin{aligned} r_1 dv_r &= \pm \left[r_1 dw \cos \left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2} - \varepsilon \right) - r_1 dv \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2} - \varepsilon \right) \right], \\ r_1 dv_r &= \pm \left[r_1 dw \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2} - \varepsilon \right) + r_1 dv \cos \left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2} - \varepsilon \right) \right], \end{aligned} \quad (3,4)$$

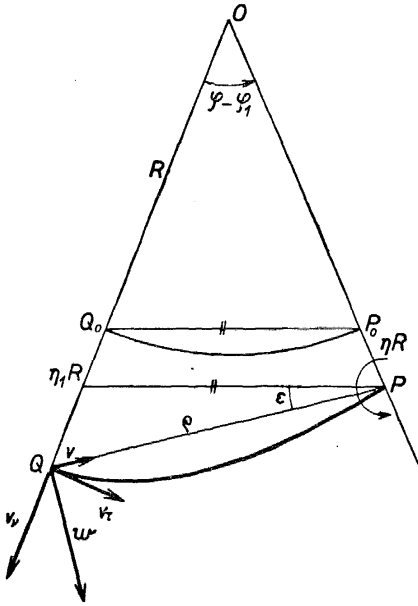
kde znaménko $+$ resp. $-$ platí pro $\varphi_1 < \varphi$ resp. $\varphi_1 > \varphi$.

Funkci η , její derivaci $\frac{d\eta}{d\varphi}$ a hodnotu cirkulace γ považujeme za malé veličiny prvního řádu a to v tom smyslu, že v této teorii budeme jejich součiny, jakožto veličiny druhého řádu, ještě uvažovat, kdežto součiny tří veličin prvního řádu budeme zanedbávat.⁵⁾

Z obrázku 6 je zřejmé, že platí

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= R^2 \{ (1 + \eta)^2 + (1 + \eta_1)^2 - \\ &- 2(1 + \eta)(1 + \eta_1) \cos(\varphi - \varphi_1) \} = \\ &= R^2 \{ 2(1 + \eta + \eta_1 + \eta\eta_1) [1 - \\ &- \cos(\varphi - \varphi_1)] + (\eta - \eta_1)^2 \}. \end{aligned}$$

V tomto výrazu můžeme zanedbat malé veličiny druhého řádu, neboť tím vzniklá chyba ve výsledných vzorcích bude řádu třetího a tedy v naší teorii již zanedbatelná.



Obr. 6.

$$\frac{\varrho^2}{R^2} = 4 \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} (1 + \eta + \eta_1),$$

a tedy

$$\frac{\varrho}{R} = 2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| \cdot \left[1 + \frac{1}{2} (\eta + \eta_1) \right]$$

⁵⁾ Malostí funkcí γ a $\frac{d\eta}{d\varphi}$ rozumíme na př. to, že v jejich trigonometrických rozvojech (4,2) a (5,6) jsou veličiny $g_0, n^2 g_n, n^2 B_n$ malé prvního řádu.

nebo

$$\frac{R}{\varrho} = \frac{1}{2 \left| \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right|} \cdot \left[1 - \frac{1}{2} (\eta + \eta_1) \right]. \quad (3,5)$$

Rovněž pro úhel ε platí s přesností malých veličin druhého řádu

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \cotg \frac{\varphi - \varphi_1}{2}. \quad (3,6)$$

Zavedeme-li si ještě označení:

$$\vartheta' = \begin{cases} \vartheta, & \text{pro } \varphi_1 < \varphi, \\ \vartheta - \pi, & \text{pro } \varphi_1 > \varphi, \end{cases} \quad (3,7)$$

dostaneme po dosazení výrazů (3,3), (3,5) a (3,6) do rovnic (3,4) a po zanedbání členů třetího řádu:

$$\begin{aligned} r_1 dv_r = & \pm \left\{ r_1 dw \left[1 + \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \right] \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} - r_1 dv \left[1 - \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \times \right. \right. \\ & \times \cotg^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left. \left. \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right\} = \frac{r\gamma}{\pi} \left\{ \frac{\omega}{4} (1 - \eta_1) \cotg \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \right. \\ & + \frac{\omega R}{4r_1} \cos \left(\vartheta' - \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right) \left[\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \log \frac{\omega R}{16r_1} + \right. \\ & + 2 + \frac{1}{2} (\eta + \eta_1) \left. \right] - \frac{\omega R}{4r_1} \sin \vartheta' \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \times \right. \\ & \times \cotg^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left. \right] + \frac{\omega R}{8r_1} (\eta - \eta_1) \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cdot \left(\cos \vartheta' - \sin \vartheta' \times \right. \\ & \times \cotg \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left. \right) \left[\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \log \frac{\omega R}{16r_1} + 2 \right] + \\ & + \frac{R^2 \omega}{8r_1^2} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cdot \left[\left(4 \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \cos \left(2\vartheta' - \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right) \right) \times \right. \\ & \times \left(\lg \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \log \frac{\omega R}{16r_1} + 2 \right) - \left(2 - \frac{3}{2} \cos 2\vartheta' \right) \times \\ & \left. \left. \times \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] \right\} \cdot \frac{d\varphi}{\omega}, \quad (3,8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 dv_t = & \pm \left\{ r_1 dw \left[1 - \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \cotg^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \right. \\ & + r_1 dv \left[1 + \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \right] \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left. \right\} = \frac{r\gamma}{2} \left\{ \frac{\omega}{4} \left[1 - \frac{1}{2} (\eta + \eta_1) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \cotg^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left. \right] - \frac{\omega R}{4r_1} \sin \left(\vartheta' - \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right) \times \\ & \times \left[\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \log \frac{R\omega}{16r_1} + 2 + \frac{1}{2} (\eta + \eta_1) \right] + \frac{\omega R}{4r_1} \sin \vartheta' \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \right] - \frac{\omega R}{8r_1} (\eta - \eta_1) \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \times \\
& \times \left(\sin \vartheta' + \cos \vartheta' \cotg \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right) \cdot \left(\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \right. \\
& \left. + \log \frac{\omega R}{16r_1} + 2 \right) + \frac{\omega R^2}{8r_1^2} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cdot \left[\left(4 \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin \left(2\vartheta' - \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right) \right) \left(\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \log \frac{\omega R}{16r_1} + 2 \right) - \right. \\
& \left. - \left(2 - \frac{3}{2} \cos 2\vartheta' \right) \cdot \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] \cdot \frac{d\varphi}{\omega}. \quad (3,9)
\end{aligned}$$

Pro další výpočty je výhodné zavést pomocný úhel β_1 (obr. 4)

$$\beta_1 = \beta - \frac{1}{2}\omega + \varphi_1, \quad (3,10)$$

který nezávisí na poloze vírového kroužku (φ), ale jenom na poloze vztaženého bodu (φ_1). Velmi snadno se můžeme přesvědčit, že platí:

$$\vartheta' = \beta - \frac{1}{2}\omega + \frac{\varphi + \varphi_1}{2} + \varepsilon = \beta_1 + \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \varepsilon. \quad (3,11)$$

Až dosud jsme neučinili žádný předpoklad o poloměru anulární lopatky (r_1). V dalším však budeme předpokládat, že vzdálenosti bodů na lopatce od osy symetrie (r_1) jsou proti délce náhradního oblouku ωR tak veliké, že veličiny

$$\lambda_1 = \frac{\omega R}{8r_1}, \quad (3,11a)$$

jsou malé prvního řádu ve smyslu dříve uvedeném. Užijeme-li označení (3,10) – (3,11a) a zanedbáme-li malé veličiny třetího řádu, zjednoduší se rovnice (3,8) a (3,9) na tvar:

$$\begin{aligned}
r_1 dv_v = & \frac{r\gamma}{\pi} \left\{ \frac{\omega}{4} (1 - \eta_1) \cotg \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + 2\lambda_1 \cos \beta_1 \left[\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \right. \right. \\
& \left. \left. + \log \frac{\lambda_1}{2} + 2 \right] - 2\lambda_1 \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left[\sin \beta_1 \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \cos \beta_1 \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] \right\} \frac{d\varphi}{\omega}, \quad (3,12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 dv_r = & \frac{r\gamma}{\pi} \left\{ \frac{\omega}{4} \left[1 - \frac{1}{2} (\eta + \eta_1) - \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \cotg^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] - \right. \\
& - 2\lambda_1 \sin \beta_1 \left[\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \log \frac{\lambda_1}{2} + 2 \right] + \\
& \left. + 2\lambda_1 \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left[\sin \beta_1 \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \cos \beta_1 \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] \right\} \frac{d\varphi}{\omega}. \quad (3,13)
\end{aligned}$$

Integrací výrazů (3,12) a (3,13) podle úhlu φ v mezích od $\varphi = 0$ do $\varphi = \omega$ dostaneme radiální a azimutální složku náhradní rychlosti indukované v bodě Q . Pokud se v těchto výrazech budou vyskytovat singulární integrály, budeme jimi rozumět jejich hlavní hodnoty.⁶⁾

4. Výpočet složek indukované náhradní rychlosti

Při výpočtu integrálů z výrazů (3,12) a (3,13) si zavedeme nové proměnné χ a ϑ rovnicemi:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\omega}{2} (1 - \cos \chi), & \varphi_1 &= \frac{\omega}{2} (1 - \cos \vartheta), & 0 &\leq \vartheta, \chi \leq \pi, \\ d\varphi &= \frac{\omega}{2} \sin \chi d\chi. \end{aligned} \quad (4,1)$$

Rozložení cirkulace γ předpokládáme ve tvaru:

$$r\gamma = 2r_0V_0 \left(-g_0 \cotg \frac{1}{2} \chi + \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin n\chi \right), \quad (4,2)$$

kde r_0V_0 je hodnota náhradní primární rychlosti v bodě $\left[R \left(1 + \eta \left(\frac{\omega}{2} \right) \right), \frac{\omega}{2} \right]$ meridiánového řezu anulární lopatky.⁷⁾ Rozložení cirkulace je zvoleno tak, aby byla splněna Žukovského podmínka hladkého odtoku na zadní hraně lopatky, t. j.

$$\gamma(\pi) = 0. \quad (4,3)$$

Z rovnic (4,1) a (4,2) plyne:

$$r\gamma d\varphi = \omega r_0V_0 \left\{ -g_0(1 + \cos \chi) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n [\cos(n-1)\chi - \cos(n+1)\chi] \right\} d\chi. \quad (4,4)$$

Ve výrazech (3,12) a (3,13) si dále rozvineme kotangens v řadu:

$$\frac{\omega}{4} \cotg \frac{\varphi - \varphi_1}{2} = - \left[\frac{1}{\cos \chi - \cos \vartheta} - \frac{\omega^2}{48} (\cos \chi - \cos \vartheta) + \dots \right], \quad (4,5)$$

(konvergující pro $\omega < 2\pi$), v níž budeme při výpočtu uvažovat jen první dva členy. Za siny a kosiny, vyskytující se jen v korekčních členech, položíme:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} &= -\frac{\omega}{4} (\cos \chi - \cos \vartheta) + \frac{\omega^3}{384} (\cos \chi - \cos \vartheta)^3, \\ \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} &= 1 - \frac{\omega^2}{32} (\cos \chi - \cos \vartheta)^2. \end{aligned} \quad (4,6)$$

⁶⁾ Při definici malosti funkcí γ a $\frac{d\eta}{d\varphi}$ podle pozn. 5, str. 342, existují tyto singulární integrály z malých funkcí prvního (druhého) řádu v rovnicích (3,12) a (3,13) a jsou veličinami malými prvního (druhého) řádu. Singulární integrály ze zanedbaných malých funkcí vyšších řádů jsou malými veličinami vyšších řádů.

⁷⁾ Volba r_0V_0 je konvenční; celý výpočet zůstává nezměněn, klademe-li všude za r_0V_0 jakoukoliv jinou náhradní rychlost.

V rozvoji (4,5) a v rozvoji (4,6) zanedbáváme členy obsahující mocninu ω^4 a vyšší. Stejným způsobem budeme postupovat i při úpravě integrálu (3,12).

$$\begin{aligned} \frac{r_1 v_r}{r_0 V_0} = & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ (1 - \eta_1) \left[\frac{1}{\cos \chi - \cos \vartheta} - \frac{\omega^2}{48} (\cos \chi - \cos \vartheta) \right] - \right. \\ & - 2\lambda_1 \cos \beta_1 \left[\log |\cos \chi - \cos \vartheta| + \log \frac{\lambda_1}{2} + 2 - \frac{7}{96} \omega^2 (\cos \chi - \cos \vartheta)^2 \right] - \\ & - \lambda_1 \frac{\omega}{2} \sin \beta_1 \left[\cos \chi - \cos \vartheta - \frac{\omega^2}{24} (\cos \chi - \cos \vartheta)^3 \right] \left[g_0 - \frac{1}{2} g_1 + \right. \\ & \left. + \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) \cos \chi + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (g_{n-1} - g_{n+1}) \cos n\chi \right] d\chi, \end{aligned} \quad (4,7)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_1 v_\tau}{r_0 V_0} = & - \frac{\omega}{4\pi} \int_0^\pi \left[g_0 - \frac{1}{2} g_1 + \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) \cos \chi + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (g_{n-1} - \right. \\ & \left. - g_{n+1}) \cos n\chi \right] d\chi. \end{aligned} \quad (4,8)$$

Podle zavedené klasifikace malých veličin budou hlavní členy složek indukované náhradní rychlosti veličiny prvního řádu a uvažované korekční členy řádu druhého. Při dalších výpočtech budeme používat azimutální složku náhradní rychlosti násobenou malou funkcí prvního řádu. Korekční členy by pak dávaly již zanedbatelné korekce třetího řádu, a proto jsme se v integrálu (4,8) omezili jen na hlavní člen.

Hodnoty singulárních integrálů:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi}{\cos \chi - \cos \vartheta} d\chi = \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4,9)$$

a nevlastních integrálů:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |\cos \chi - \cos \vartheta| d\chi &= -\log 2, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n\chi \log |\cos \chi - \cos \vartheta| d\chi &= -\frac{\cos n\vartheta}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4,10)$$

jsou odvozeny v dodatku. Použijeme-li těchto výsledků, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{r_1 v_r}{r_0 V_0} = & (1 - \eta_1) \left\{ \sum_0^\infty g_n \cos n\vartheta - \frac{\omega^2}{96} \left[\left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - (2g_0 - g_1) \cos \vartheta \right] \right\} + \\ & + 2\lambda_1 \cos \beta_1 \left\{ \left[\log \frac{4}{\lambda_1} - 2 + \frac{7}{96} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \vartheta \left(1 - \frac{7}{96} \omega^2 \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \frac{7\omega^2}{768} (g_1 - g_3) + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{n} \cos n\vartheta \left\} + \lambda_1 \frac{\omega}{2} \sin \beta_1 \left\{ \left[\cos \vartheta - \frac{\omega^2}{32} \left(3 \cos \vartheta + \right. \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \frac{1}{3} \cos 3\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \left[\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{32} \left(\frac{3}{2} + \cos 2\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\omega^2}{192} \left[3 (g_1 - g_3) \cos \vartheta - \frac{1}{2} (g_2 - g_4) \right] \right\}; \tag{4,11}
\end{aligned}$$

$$\frac{r_1 v_r}{r_0 V_0} = -\frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right). \tag{4,12}$$

V rovnici (4,11) závisí hodnota parametru λ_1 a úhlu β_1 na poloze bodu Q . Tuto závislost si nyní vyjádříme v takovém tvaru, který by byl vhodný pro další výpočty. Především si zavedeme parametr

$$\lambda = \frac{\omega R}{8r_s}, \tag{4,13}$$

kde r_s značí vzdálenost středního bodu náhradního oblouku od osy x (obr. 7).

Platí tedy:

$$\lambda_1 = \lambda \cdot \frac{r}{r_1}$$

a poněvadž poměr $\frac{r}{r_1}$ liší se od jedničky jen o malé veličiny prvního řádu, můžeme v rovnici (4,11) psát všude λ místo λ_1 . Chyba tím vzniklá bude třetího řádu a tedy v naší teorii zanedbatelná.

Podle (3,10) je

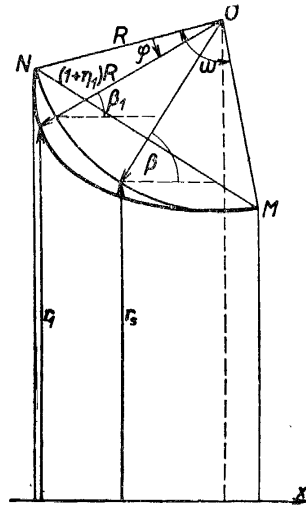
$$\beta_1 = \beta - \frac{1}{2}\omega + \varphi_1.$$

Užijeme-li transformace (4,1), dostaneme

$$\beta_1 = \beta - \frac{\omega}{2} \cos \vartheta. \tag{4,14}$$

Sinus a kosinus úhlu β_1 rozvineme v řady v $\cos n\vartheta$ a zanedbáme, jako všude v této práci, členy obsahující čtvrtou a vyšší mocniny ω :

$$\begin{aligned}
\sin \beta_1 = & \left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) \sin \beta - \left(\frac{\omega}{2} - \frac{3\omega^3}{192} \right) \cos \beta \cos \vartheta - \frac{\omega^2}{16} \sin \beta \cos 2\vartheta + \\
& + \frac{\omega^3}{192} \cos \beta \cos 3\vartheta, \tag{4,15}
\end{aligned}$$



Obr. 7.

$$\begin{aligned} \cos \beta_1 = & \left(1 - \frac{\omega^2}{16}\right) \cos \beta + \left(\frac{\omega}{2} - \frac{3\omega^3}{192}\right) \sin \beta \cos \vartheta - \frac{\omega^2}{16} \cos \beta \cos 2\vartheta - \\ & - \frac{\omega^3}{192} \sin \beta \cos 3\vartheta. \end{aligned} \quad (4,16)$$

Dosadíme-li tyto výrazy do pravé strany rovnice (4,11) a uspořádáme-li součinitele u λ podle kosinů úhlu ϑ , dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{r_1 v_r}{r_0 v_0} = & (1 - \eta_1) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos n\vartheta - \frac{\omega^2}{96} \left[\left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - (2g_0 - g_1) \cos \vartheta \right] \right\} + \\ & + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n \cos n\vartheta, \end{aligned} \quad (4,17)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma_0 = & \left\{ \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{8} \right) \log \frac{4}{\lambda} - 4 + \frac{13\omega^2}{48} \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \frac{\omega^2}{384} (g_1 - g_3) \right\} \cos \beta + \\ & + \frac{\omega}{4} \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{\omega^2}{96} (g_2 - g_4) \right] \sin \beta, \\ \sigma_1 = & \left[\left(2 - \frac{5\omega^2}{24} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{\omega^2}{96} (g_2 - g_4) \right] \cos \beta + \frac{\omega}{2} \left\{ \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{16} \right) \log \frac{4}{\lambda} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 3 + \frac{29\omega^2}{192} \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{128} \right) (g_1 - g_3) - \frac{\omega^2}{768} (g_3 - g_5) \right\} \sin \beta, \\ \sigma_2 = & \left[-\frac{\omega^2}{8} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{19}{12} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{32} \right) (g_1 - g_3) - \right. \\ & \left. - \frac{\omega^2}{128} (g_3 - g_5) \right] \cos \beta + \frac{\omega}{2} \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega^2}{192} \right) (g_2 - g_4) - \right. \\ & \left. - \frac{\omega^2}{960} (g_4 - g_6) \right] \sin \beta, \\ \sigma_3 = & \left[-\frac{\omega^2}{16} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{48} \right) (g_2 - g_4) - \frac{\omega^2}{160} (g_4 - g_6) \right] \cos \beta + \\ & + \frac{\omega}{8} \left[-\frac{\omega^2}{12} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{7}{4} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) \left(g_1 - g_3 + \frac{g_3 - g_5}{2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\omega^2}{288} (g_5 - g_7) \right] \sin \beta, \\ \sigma_4 = & \frac{1}{4} \left[-\frac{\omega^2}{16} (g_1 - g_3) + \left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) (g_3 - g_5) - \frac{\omega^2}{48} (g_5 - g_7) \right] \cos \beta + \\ & + \frac{\omega}{4} \left[-\frac{\omega^2}{48} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) \left(\frac{g_1 - g_4}{3} + \frac{g_4 - g_6}{5} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\omega^2}{672} (g_6 - g_8) \right] \sin \beta, \\ & \vdots \\ & \vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \\ \sigma_n = & \left[-\frac{\omega^2}{32} \frac{g_{n-3} - g_{n-1}}{n-2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{16}\right) \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{n} - \frac{\omega^2}{32} \frac{g_{n+1} - g_{n+3}}{n+2} \right] \cos \beta + \\ & + \frac{\omega}{4} \left[-\frac{\omega^2}{96} \frac{g_{n-4} - g_{n-2}}{n-3} + \left(1 - \frac{\omega^2}{32}\right) \left(\frac{g_{n-2} - g_n}{n-1} + \frac{g_n - g_{n+2}}{n+1} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\omega^2}{96} \frac{g_{n+2} - g_{n+4}}{n+3} \right] \sin \beta, \quad \text{pro } n \geq 5. \end{aligned} \quad (4,18)$$

Koeficienty σ_n jsou podle zavedené klasifikace veličiny prvního řádu.

5. Základní vztahy mezi tvarem anulární lopatky a složkami primární a indukované rychlosti. Řešení přímého problému

Tvar tenké anulární lopatky je určen požadavkem, aby směr rychlosti (primární + indukované) v bodech lopatky byl rovnoběžný s povrchem lopatky. Vzhledem k osové symetrii můžeme se omezit jen na proudové poměry v meridiánovém řezu. Označíme-li V_v a V radiální a azimutální složku primární rychlosti v bodě Q na lopatce a σ úhel, který svírá tečna k lopatce v bodě Q s tečnou k náhradnímu oblouku v bodě Q_0 , platí

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{v_r + V_r}{v_\tau + V_\tau}. \quad (5,1)$$

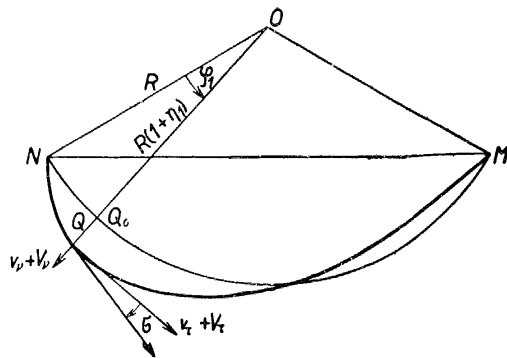
Z obr. 8 je zřejmé, že

$$\frac{d\eta_1}{d\varphi_1} = (1 + \eta_1) \operatorname{tg} \sigma. \quad (5,2)$$

V dalším budeme u η_1 a $\frac{d\eta_1}{d\varphi_1}$ vynechávat index 1, neboť zámena je vyloučená.

Z rovnic (5,1) a (5,2) dostaneme:

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = (1 + \eta) \frac{v_r + V_r}{v_\tau + V_\tau}. \quad (5,3)$$



Obr. 8.

Úhel, který svírá směr primárního proudu s tečnou ke kružnici $R \left[1 + \eta \left(\frac{\omega}{2} \right) \right]$ v bodě $\left[R \left(1 + \eta \left(\frac{\omega}{2} \right) \right), \frac{\omega}{2} \right]$ si označíme α a nazveme jej úhlem nastavení lopatky. Radiální a azimutální složku náhradní primární rychlosti vyjádříme v bodech na lopatce trigonometrickými řadami:

$$\frac{rV_\nu}{r_0V_0} = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos n\vartheta, \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m v_{2m} = \sin \alpha; \quad (5,4)$$

$$\frac{rV_\tau}{r_0V_0} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \cos n\vartheta, \quad 1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu_{2m} = \cos \alpha. \quad (5,5)$$

O koeficientech μ_n a v_n předpokládáme, že jsou malé prvního řádu.⁸⁾ Rovněž tak i derivaci funkce η si vyjádříme trigonometrickou řadou:

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta. \quad (5,6)$$

Integrací rovnice (5,6) dostaneme:

$$\eta = \frac{\omega}{4} \left\{ B_0(1 - \cos \vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (1 - \cos n\vartheta) \right\}. \quad (5,7)$$

Počáteční a koncový bod náhradního oblouku je totožný s počátečním, resp. koncovým bodem meridiánového řezu anulární lopatky, t. j.:

$$\eta(0) = \eta(\pi) = 0, \quad (5,8)$$

z čehož plyne podmínka pro koeficienty B_n :

$$B_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{4m^2 - 1} = 0. \quad (5,9)$$

Dosadíme-li uvedené rozvoje do rovnice (5,3), dostaneme s použitím výrazů (4,12) a (4,17):

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta \right\} \left\{ 1 - \frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n \cos n\vartheta \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n + \lambda \sigma_n) \cos n\vartheta - \frac{\omega^2}{96} \left[g_0 - \frac{1}{2} g_2 - (2g_0 - g_1) \cos \vartheta \right] + \left\{ 1 + \frac{\omega}{4} \left[B_0(1 - \cos \vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (1 - \cos n\vartheta) \right] \right\} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos n\vartheta \right\}, \quad (5,10)$$

kde σ_n , jakožto algebraické výrazy v g_n jsou dány rovnicemi (4,18). Srovnáním koeficientů u $\cos n\vartheta$ na obou stranách rovnice (5,10) dostaneme nekonečný systém rovnic:⁹⁾

$$g_0 = B_0 - v_0 - \lambda \sigma_0 - \frac{\omega}{8} \left[B_0(2g_0 - g_1) + B_0(2v_0 - v_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i-1} - B_{i+1}}{i} (2v_0 - v_i) - \frac{\omega}{24} (2g_0 - g_2) \right] + \frac{1}{2} B_0 \mu_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} B_i \mu_i,$$

⁸⁾ Na př. v tom smyslu, že $\mu_0, v_0, n^2 \mu_n$ a $n^2 v_n$ jsou malé veličiny prvního řádu; ve skutečnosti ovšem klesají koeficienty μ_n a v_n rychleji než $\frac{\text{konst}}{n^2}$.

⁹⁾ O úpravě rovnic (5,11) viz [4], dodatek II.

$$\begin{aligned}
g_1 &= B_1 - v_1 - \lambda\sigma_1 + \frac{\omega}{8} \left[(2B_0 - B_2) v_0 - \left(\frac{\omega}{12} + B_1 \right) (2g_0 - g_1) + \right. \\
&\quad \left. + B_0(v_0 - 2v_1 + v_2) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i-1} - B_{i+1}}{i} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) \right] + \frac{1}{2} B_0 \mu_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (B_{i+1} + B_{|i-1|}) \mu_i, \\
g_n &= B_n - v_n - \lambda\sigma_n + \frac{\omega}{8} \left[\frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} v_0 - B_n(2g_0 - g_1) + \right. \\
&\quad \left. + B_0(v_{n-1} - 2v_n + v_{n+1}) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_{i-1} - B_{i+1}}{i} (v_{|i-n|} - 2v_i + v_{i+n}) \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} B_0 \mu_n + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (B_{i+n} + B_{|i-n|}) \mu_i, \quad \text{pro } n \geq 2. \tag{5,11}
\end{aligned}$$

Řešíme-li přímý problém, t. j. hledáme-li rozložení cirkulace vírových kroužků nebo rozložení povrchové rychlosti na tenké anulární lopatce, přiřadíme nejdříve meridiánovému řezu anulární lopatky náhradní kruhový oblouk, mající počáteční a koncový bod totožný s počátečním a koncovým bodem meridiánového řezu lopatky. Poloměr R náhradního oblouku zvolíme tak, aby odehlyk oblouku od meridiánového řezu skutečné lopatky byly co nejmenší. Tím je dáno rozevření ω a koeficienty B_n ; ze známého primárního proudění určíme koeficienty v_n a μ_n rozvoji (5,4) a (5,5) složek náhradní primární rychlosti v místě lopatky. Nekonečný systém rovnic (5,11) nám pak představuje nekonečný systém lineárních nehomogenních rovnic pro neznámé koeficienty g_n Fourierova rozvoje hustoty cirkulace vírových kroužků rozložených na anulární lopatce. Za daných předpokladů o malosti koeficientů B_n , μ_n , v_n a parametru λ má tento nekonečný systém lineárních rovnic právě jedno ohraničené řešení. Toto řešení je možno získat na př. metodou postupných aproximací.¹⁰⁾

6. Řešení nepřímého problému

Druhá základní úloha v teorii anulární lopatky v osově symetrickém proudě, t. zv. nepřímý problém, spočívá v určení tvaru a úhlu nastavení anulární lopatky, která má předepsanou délku, vzdálenost od osy symetrie a rozložení cirkulace vírových kroužků. Pro řešení je však výhodnější předepsat délku náhradního oblouku a rozložení cirkulace vírových kroužků předpokládat ve tvaru (4,2) (srov. pozn. 4 na str. 341). Poloměr R náhradního oblouku zvolíme tak, aby co nejlépe aproximoval hledanou anulární lopatku. V prvním přiblížení můžeme vzít poloměr náhradního oblouku roven poloměru křivosti proudnice primárního proudění v místě lopatky. Tvar lopatky je dán rozvojem

¹⁰⁾ Důkaz tohoto tvrzení je obdobný důkazu uvedenému v [4], dodatek III. Z rovnic (5,11) je dále patrné, že jsou-li dané veličiny B_n , μ_n a v_n malé ve smyslu pozn. 5 a 8, platí totéž i o vypočítaných veličinách g_n .

(5,7) a proto je nepřímý problém řešen, jsou-li určeny všechny koeficienty B_n rozvoje (5,6). Při řešení této úlohy vyjdeme, jako v předešlé kapitole, z rovnice (5,3).

Výrazy pro složky primární náhradní rychlosti v místě hledané lopatky dostaneme rozvinutím radiální a azimutální složky primární náhradní rychlosti v okolí náhradního oblouku v Taylorovy řady, v nichž budeme uvažovat jen první dva členy. Přitom budeme složky náhradní rychlosti i cirkulace vztahovat k hodnotě náhradní rychlosti ve středu náhradního oblouku ($r_s V_s$). Budeme tedy místo (5,4) a (5,5) psát:

$$\frac{rV_v}{r_s V_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(v'_n + \frac{\partial v'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta, \quad (6,1)$$

$$\frac{rV_\tau}{r_s V_s} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu'_n + \frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta. \quad (6,2)$$

Koeficienty μ'_n a v'_n splňují podmínky:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m v'_{2m} = \sin \alpha', \quad 1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \mu'_{2m} = \cos \alpha',$$

kde α' je, jako v předešlé kapitole, úhel nastavení anulární lopatky (měřený ve středu náhradního oblouku). Hodnoty koeficientů μ'_n , v'_n , $\frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta}$ a $\frac{\partial v'_n}{\partial \eta}$ určíme z hodnot a derivací složek náhradní primární rychlosti v bodech náhradního oblouku. Čárkované označení zavádíme proto, abychom tyto koeficienty odlišili od koeficientů v rozvoji azimutální a radiální složky primární náhradní rychlosti (5,4) a (5,5), počítaných přímo na lopatce (a vztahených k hodnotě primární náhradní rychlosti v bodě $\left[R \left(1 + \eta \left(\frac{\omega}{2} \right) \right), \frac{\omega}{2} \right]$ na lopatce).

Dosadíme-li rozvoje (6,1) a (6,2) do rovnice (5,10), dostaneme:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta \right\} \left\{ 1 - \frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mu'_n + \frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta \right\} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n + \lambda \sigma_n) \cos n\vartheta - \frac{\omega^2}{96} \left[g_0 - \frac{1}{2} g_2 - (2g_0 - g_1) \cos \vartheta \right] + \\ & + (1 + \eta) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(v'_n + \frac{\partial v'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (6,3)$$

Po zanedbání malých veličin třetího řádu můžeme rovnici (6,3) napsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\vartheta \right\} \left\{ 1 - \frac{\omega}{4} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \mu'_n \cos n\vartheta \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} (g_n + v'_n + \\ & + \lambda \sigma_n) \cos n\vartheta - \frac{\omega^2}{92} \left[g_0 - \frac{1}{2} g_2 - (2g_0 - g_1) \cos \vartheta \right] + \frac{\omega}{4} \left[B_0 (1 - \cos \vartheta) + \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (1 - \cos n\vartheta) \right] \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(v'_n + \frac{\partial v'_n}{\partial \eta} \eta \right) \cos n\vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (6,4)$$

Pro jednoduchost budeme v dalším používat označení:

$$\bar{v}_n = v'_n + \frac{\hat{c}v'_n}{\hat{c}\eta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6,5)$$

Srovnáním koeficientů u $\cos n\vartheta$ na obou stranách rovnice (6,4) dostaneme nekonečný systém rovnic:¹¹⁾

$$\begin{aligned} B_0 &= g_0 + v'_0 + \lambda\sigma_0 - \frac{\omega^2}{96} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{1}{2} B_0 \mu'_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \mu'_i B_i + \\ &+ \frac{\omega}{8} \left\{ (2g_0 - g_1) B_0 + 2(2\bar{v}_0 - \bar{v}_1) B_0 + \left(\bar{v}_0 - \frac{1}{2} \bar{v}_2 \right) B_1 - \right. \\ &\left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{\bar{v}_{i+1}}{i+1} + \frac{4\bar{v}_0}{i^2-1} - \frac{\bar{v}_{i-1}}{i-1} \right] B_i \right\}, \\ B_1 &= g_1 + v'_1 + \lambda\sigma_1 + \frac{\omega^2}{48} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{1}{2} \mu'_0 B_1 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (\mu'_{i-1} + \mu'_{i+1}) B_i + \\ &+ \frac{\omega}{8} \left\{ (2g_0 - g_1) B_1 - 2(2\bar{v}_0 - 2\bar{v}_1 + \bar{v}_2) B_0 + \frac{1}{2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_3) B_1 + \right. \\ &\left. + \bar{v}_0 \cdot B_2 - \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{\bar{v}_{i+2}}{i+1} - 2 \frac{\bar{v}_i - 2\bar{v}_1}{i^2-1} - \frac{\bar{v}_{i-2}}{i-1} \right] B_i \right\}; \\ &\vdots \\ B_n &= g_n + v'_n + \lambda\sigma_n - \frac{1}{2} \mu'_0 B_n - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (\mu'_{i-n} + \mu'_{i+1}) B_i + \frac{\omega}{8} \left\{ (2g_0 - g_1) B_n - \right. \\ &- \bar{v}_0 \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} - 2(\bar{v}_{n-1} - 2\bar{v}_n + \bar{v}_{n+1}) B_0 - \frac{1}{2} (\bar{v}_{n-2} - 2\bar{v}_n + \bar{v}_{n+2}) B_1 - \\ &\left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left[\frac{\bar{v}_{i+n+1} + \bar{v}_{i-n+1}}{i+1} + \frac{4\bar{v}_0}{i^2-1} - \frac{\bar{v}_{i-n-1} + \bar{v}_{i-n-1}}{i-1} \right] B_i \right\}, \quad n \geq 2. \quad (6,6) \end{aligned}$$

Nekonečný systém (6,6) lineárních nehomogenních rovnic pro hledané koeficienty B_n má za daných předpokladů o malosti koeficientů g_n, μ'_n, v'_n (ve smyslu pozn. 5 a 8) a parametru λ právě jedno ohraničené řešení. Toto řešení je možno získat na př. metodou postupných aproximací.¹²⁾ Koeficienty tohoto nekonečného systému lineárních rovnic a tedy i jeho řešení B_n však závisí na úhlu nastavení α' , který je zatím neznám a určí se z rovnice (5,9), které musí hověť nalezené koeficienty B_n . Pro další výpočet si z rovnice (5,9) vyjádříme koeficient B_0 pomocí ostatních koeficientů B_n :

$$B_0 = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} \quad (6,7)$$

¹¹⁾ O úpravě rovnic (6,6) viz [4], dodatek II.

¹²⁾ Důkaz tohoto tvrzení je obdobný důkazu uvedenému v [4], dodatek III. Nalezené koeficienty jsou pak rovněž malé veličiny ve smyslu pozn. 5.

a tento výraz dosadíme do rovnic (6,6). Po úpravě dostaneme:

$$\begin{aligned}
 v'_0 = & -g_0 - \lambda\sigma_0 + \frac{\omega^2}{96} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \frac{1}{4} (1 + \mu'_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu'_i B_i - \\
 & - \frac{\omega}{8} \left\{ \left(\bar{v}_0 - \frac{1}{2} \bar{v}_2 \right) B_1 + \frac{1}{2} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 - \bar{v}_1 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \bar{v}_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{m^2 + m} - \right. \\
 & \left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}_{i+1}}{i+1} - \frac{\bar{v}_{i-1}}{i-1} \right) B_i \right\}, \tag{6,8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 = & g_1 + v'_1 + \lambda\sigma_1 + \frac{\omega^2}{48} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{1}{2} \mu'_0 B_1 - \frac{1}{4} \mu'_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\mu'_{i-1} + \mu'_{i+1}) B_i + \frac{\omega}{8} \left\{ \left(2g_0 - g_1 + \frac{1}{2} \bar{v}_1 - \frac{1}{2} \bar{v}_3 \right) B_1 + \bar{v}_0 B_2 - \right. \\
 & - \left(\bar{v}_0 + \frac{1}{2} \bar{v}_2 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \bar{v}_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{m^2 + m} - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}_{i+2}}{i+1} - \frac{2\bar{v}_i}{i^2 - 1} - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\bar{v}_{i-2}}{i-1} \right) B_i \right\},
 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
 B_n = & g_n + v'_n + \lambda\sigma_n - \frac{1}{2} \mu'_0 B_n - \frac{1}{4} \mu'_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (\mu'_{|i-n|} + \\
 & + \mu'_{i+n}) B_i + \frac{\omega}{8} \left\{ (2g_0 - g_1) B_n - \bar{v}_0 \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} - \frac{1}{2} (\bar{v}_{n-2} - 2\bar{v}_n + \right. \\
 & + \bar{v}_{n+2}) B_1 - \frac{1}{2} (\bar{v}_{n-1} + \bar{v}_{n+1}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} - \bar{v}_n \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{m^2 + m} - \\
 & \left. - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}_{i+n+1} + \bar{v}_{|i-n+1|}}{i+1} - \frac{\bar{v}_{i+n-1} + \bar{v}_{|i-n-1|}}{i-1} \right) B_i \right\}, \quad n = 2, 3, \dots \tag{6,9}
 \end{aligned}$$

Systém rovnic (6,9) je nekonečný systém lineárních nehomogenních rovnic pro koeficienty B_n , $n = 1, 2, \dots$ a rovnice (6,8) určuje úhel nastavení α' .

Prakticky postupujeme tak, že si zvolíme nějaký úhel nastavení α_0 . Pro tento úhel nastavení vypočítáme hodnoty koeficientů μ'_n , v'_n a $\frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta}$, $\frac{\partial v'_n}{\partial \eta}$.

Řešíme-li systém (6,9) s těmito hodnotami, dostaneme řešení, které označíme:

$$B_n^0, \quad n = 1, 2, \dots \tag{6,10}$$

Toto řešení však obecně nebude splňovat rovnici (6,8), protože úhel nastavení α_0 byl zvolen náhodně. Správný úhel nastavení necht' je:

$$\alpha' = \alpha_0 + \Delta x, \quad (6,11)$$

kde Δx je malá veličina. O úhel Δx je nutno pootočit zvolený náhradní oblouk. Radiální a azimutální složka primární náhradní rychlosti budou potom:

$$\frac{rV_r}{r_s V_s} = \Delta x + \sum_{n=0}^{\infty} \left[v'_n + \frac{\partial v'_n}{\partial \eta} \eta + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial \alpha} + \mu'_n \right) \Delta x \right] \cos n\vartheta, \quad (6,12)$$

$$\frac{rV_\tau}{r_s V_s} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mu'_n + \frac{\partial \mu'_n}{\partial \eta} \eta + \left(\frac{\partial \mu'_n}{\partial \alpha} - v'_n \right) \Delta x \right] \cos n\vartheta. \quad (6,13)$$

Dosadíme-li výrazy (6,12) a (6,13) do systému (6,9) a zanedbáme-li malé veličiny třetího řádu, dostaneme:

$$B_n = B_n^0 + \left(\frac{\partial v'_n}{\partial \alpha} + \mu'_n \right) \Delta x, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6,14)$$

Tyto hodnoty dosadíme do rovnice (6,8), z níž pak určíme hodnotu úhlu Δx :

$$\Delta x = \frac{P}{1 + Q}, \quad (6,15)$$

kde

$$\begin{aligned} P = & -g_0 - v'_0 - \lambda\sigma_0 + \frac{\omega^2}{96} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \frac{1}{4} (1 + \mu'_0) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}^0}{m^2 - \frac{1}{4}} + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu'_i B_i^0 - \frac{\omega}{8} \left\{ (\bar{v}_0 - \frac{1}{2} \bar{v}_2) B_1^0 + \frac{1}{2} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 - \bar{v}_1 \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}^0}{m^2 - \frac{1}{4}} - \right. \\ & \left. - \bar{v}_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}^0}{m^2 + m} - \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{\bar{v}_{i+1}}{i+1} - \frac{\bar{v}_{i-1}}{i-1} \right) B_i^0 \right\}, \quad (6,16) \end{aligned}$$

$$Q = \frac{\partial v'_0}{\partial \alpha} + \mu'_0 - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial v'_{2m}}{\partial \alpha} + \mu'_{2m}}{m^2 - \frac{1}{4}} + \frac{\omega}{8} \left(B_1^0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m+1}^0}{m^2 + m} \right). \quad (6,17)$$

Navrhujeme-li tvar anulární lopatky, požadujeme obvykle hladký vstup při provozních podmínkách. V našich vzorcích to znamená $g_0 = 0$.

Při výpočtech se ve všech rozvojech omezíme na konečný a obvykle jen velmi malý počet členů. Jejich počet je dán charakterem úlohy a požadovanou přesností. Při řešení systému (6,9) se u vyšších koeficientů B_n spokojíme první aproximací

$$B_n \doteq g_n + v'_n + \lambda\sigma_n, \quad n > N_0, \quad (6,18)$$

kdežto u nižších koeficientů počítáme ještě druhou, resp. třetí aproximaci.

7. Rozložení povrchové rychlosti na lopatce

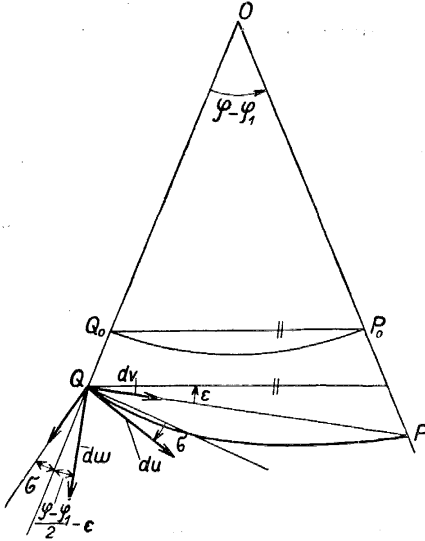
Pro posouzení funkce lopatky je nutno znát průběh povrchové rychlosti potenciálního proudění, neboť na něm závisí chování mezní vrstvy.¹³⁾

Nejprve si odvodíme výraz pro tečnou složku indukované náhradní rychlosti. Element tečné složky náhradní rychlosti v bodě Q , indukované vírovými kroužky na elementárním oblouku kolem bodu P (obr. 9), je

$$r_1 du = \pm \left[r_1 dw \sin \left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2} - \varepsilon + \sigma \right) + r_1 dv \cos \left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2} - \varepsilon + \sigma \right) \right], \quad (7.1)$$

kde znaménko $+$ resp. $-$ platí pro $\varphi > \varphi_1$ resp. $\varphi < \varphi_1$. Až na malé veličiny druhého řádu platí:

$$\sigma = \operatorname{tg} \sigma = \frac{d\eta(\varphi_1)}{d\varphi_1} = \frac{d\eta_1}{d\varphi_1}. \quad (7.2)$$



Obr. 9.

Do rovnice (7,1) dosadíme výrazy (3,3), (3,5) a (3,6). Po zanedbání malých veličin třetího řádu dostaneme:

$$r_1 du = \frac{r\gamma}{\pi} \left\{ \frac{\omega}{4} \left[1 - \frac{1}{2} (\eta + \eta_1) - \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \cot^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \frac{d\eta_1}{d\varphi_1} \cot^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] - 2\lambda_1 \sin \beta_1 \left[\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \log \frac{\lambda_1}{2} + 2 \right] + 2\lambda_1 \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cdot \left[\sin \beta_1 \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \cos \beta_1 \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] \right\} \frac{d\varphi}{\omega}. \quad (7.3)$$

Integrací rovnice (7,3) dostaneme výraz pro tečnou složku indukované náhradní rychlosti. Jako všechny náhradní rychlosti vyjádříme i tuto náhradní rychlost trigonometrickým rozvojem:¹⁴⁾

$$\frac{r_1 u}{r_0 V_0} = -\frac{\omega}{4} \left[1 - \frac{5}{6} \eta_1 - \frac{\omega}{12} \cos \vartheta \frac{d\eta_1}{d\varphi_1} - \frac{\omega}{24} \left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{\omega^2}{96} \frac{d\eta_1}{d\varphi_1} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{\omega^2}{384} \left[(2B_0 - B_2) g_0 + \dots \right]$$

¹³⁾ Při návrhu lopatky musí se nakonec vycházet z rozložení povrchové rychlosti (především na podtlakové straně lopatky), na základě něhož pak zvolíme rozložení cirkulace.

¹⁴⁾ Výpočet tečné složky indukované náhradní rychlosti je proveden v dodatku II.

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (g_{n-1} - g_{n+1}) \left] - \frac{1}{2} B_1 \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \right. \\
& - \frac{1}{3} B_2 \left[(1 + 4 \cos \vartheta) g_0 - 2g_1 \cos \vartheta - \frac{1}{2} g_2 \right] - \frac{1}{2} B_3 \left[(1 + 2 \cos \vartheta + \right. \\
& + 3 \cos 2\vartheta) g_0 - \frac{1}{4} (1 + 6 \cos 2\vartheta) g_1 - g_2 \cos \vartheta - \left. \frac{1}{4} g_3 \right] - \\
& - \sum_{n=4}^{\infty} B_n \left\{ g_0 \left[(1 + \cos \vartheta) \left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{1}{n+1} \frac{\cos n\vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \right. \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{n^2-1} \frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin^3 \vartheta} \right) - \cos n\vartheta \left] - \frac{1}{n^2-1} \sum_{m=1}^{n-1} g_m \left[(n^2 - mn - 1) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \cos(n-m)\vartheta + m \frac{\cos \vartheta \sin(n-m)\vartheta}{\sin \vartheta} \right] - \frac{g_n}{2(n+1)} \right\} - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \cos n\vartheta,
\end{aligned} \tag{7,4}$$

kde

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= \frac{\omega}{4} \left[- \left(3 - \frac{11\omega^2}{96} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \frac{5\omega^2}{2304} (g_2 - g_4) \right] \cos \beta + \\
& + \left\{ \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{8} \right) \log \frac{4}{\lambda} - 2 + \frac{7\omega^2}{48} \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{11\omega^2}{384} (g_1 - g_3) \right\} \sin \beta, \\
\tau_1 &= \frac{\omega}{2} \left\{ \left[- \left(2 - \frac{\omega^2}{16} \right) \log \frac{4}{\lambda} + 3 - \frac{23\omega^2}{192} \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{128} \right) (g_1 - g_3) + \right. \\
& + \left. \frac{\omega^2}{768} (g_3 - g_5) \right\} \cos \beta + \left[\left(2 - \frac{5\omega^2}{24} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{\omega^2}{96} (g_2 - g_4) \right] \sin \beta, \\
\tau_2 &= \frac{\omega}{2} \left[- \left(1 - \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega^2}{192} \right) (g_2 - g_4) + \frac{\omega^2}{960} (g_4 - g_6) \times \right. \\
& \times \cos \beta + \left[- \frac{\omega^2}{8} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{19}{12} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{32} \right) (g_1 - g_3) - \right. \\
& - \left. \frac{\omega^2}{128} (g_3 - g_5) \right] \sin \beta, \\
\tau_3 &= \frac{\omega}{4} \left[\frac{\omega^2}{24} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{7}{4} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{64} \right) \left(g_1 - g_3 + \frac{g_3 - g_5}{2} \right) + \right. \\
& + \left. \frac{\omega^2}{576} (g_5 - g_7) \right] \cos \beta + \left[- \frac{\omega^2}{16} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{48} \right) (g_2 - g_4) - \right. \\
& - \left. \frac{\omega^2}{160} (g_4 - g_6) \right] \sin \beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_4 &= \frac{\omega}{4} \left[\frac{\omega^2}{48} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) \left(\frac{g_2 - g_4}{3} + \frac{g_4 - g_6}{5} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega^2}{672} (g_6 - g_8) \right] \cos \beta + \left[-\frac{\omega^2}{64} (g_1 - g_3) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{64} \right) (g_3 - g_5) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega^2}{192} (g_5 - g_7) \right] \sin \beta, \\
&\quad \vdots \\
\tau_n &= \frac{\omega}{4} \left[\frac{\omega^2}{96} \frac{g_{n-4} - g_{n-2}}{n-3} - \left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) \left(\frac{g_{n-2} - g_n}{n-1} + \frac{g_n - g_{n+2}}{n+1} \right) + \frac{\omega^2}{96} \times \right. \\
&\quad \left. \times \frac{g_{n+2} - g_{n+4}}{n+3} \right] \cos \beta + \left[-\frac{\omega^2}{32} \frac{g_{n-3} - g_{n-1}}{n-2} + \left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{n} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\omega^2}{32} \frac{g_{n+1} - g_{n+3}}{n+2} \right] \sin \beta, \quad \text{pro } n \geq 5.
\end{aligned} \tag{7,5}$$

Povrchová náhradní rychlost $r_1 U$ na lopatce je pak dána výrazem:

$$r_1 U = r_1 V_\tau \cos \sigma + r_1 V_r \sin \sigma + r_1 u \pm \frac{1}{2} \frac{r_1 \gamma}{1 + \eta_1}, \tag{7,6}$$

kde znaménko $+$ platí pro podtlakovou stranu lopatky a znaménko $-$ pro přetlakovou stranu lopatky. Za $\cos \sigma$ a $\sin \sigma$ můžeme ve výrazu (7,6) dosadit přibližné vztahy:

$$\cos \sigma = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta_1}{d\varphi_1} \right)^2, \quad \sin \sigma = \frac{d\eta_1}{d\varphi_1}. \tag{7,7}$$

Hodnoty složek primární náhradní rychlosti $r_1 V_r$ a $r_1 V_\tau$, rozložení cirkulace $r_1 \gamma$ a hodnoty funkcí $\frac{d\eta_1}{d\varphi_1}$ a η_1 jsou (podle druhu úlohy) jednak dány, jednak určeny řešením rovnic (5,11) nebo (6,9) a vyčíslením řad (5,4), (5,5), (4,2), (5,6) a (5,7).

8. Vliv lopatky na proudění ve vzdálených bodech

Při vyšetřování rychlosti indukované anulární lopatkou ve vzdálených bodech můžeme anulární lopatku nahradit jediným vírovým kroužkem se „středním“ poloměrem r_s . Cirkulace Γ tohoto náhradního kroužku je dána integrálem:

$$\Gamma = \frac{1}{r_s^2} \int_0^l r_{1\gamma}^2 ds, \tag{8,1}$$

kde jsme označili délku meridiánového řezu anulární lopatky l a element jeho oblouku ds . Platí:

$$r_1 \bar{\gamma} ds = r_1 \gamma R d\varphi, \quad (8,2)$$

takže

$$\Gamma = \frac{R}{r_s^2} \int_0^{\omega} r_1^2 \gamma d\varphi. \quad (8,3)$$

Za $r_1 \gamma d\varphi$ dosadíme podle (4,4)

$$r_1 \gamma d\varphi = \omega r_s V_s \left\{ -g_0(1 + \cos \vartheta) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} g_n [\cos(n-1)\vartheta - \cos(n+1)\vartheta] \right\} d\vartheta. \quad (8,4)$$

Pro r_1 plyne z obr. 7:

$$r_1 = r_s + R(\sin \beta - \sin \beta_1) - \eta_1 R \sin \beta_1 = r_s + 2R \sin \frac{\beta - \beta_1}{2} \cos \frac{\beta + \beta_1}{2} - \eta_1 R \sin \beta_1;$$

Za β_1 dosadíme podle (4,14)

$$\beta_1 = \beta - \frac{\omega}{2} \cos \vartheta,$$

máme tedy

$$r_1 = r_s + 2R \sin \left(\frac{\omega}{4} \cos \vartheta \right) \cos \left(\beta - \frac{\omega}{4} \cos \vartheta \right) - \eta_1 R \sin \left(\beta - \frac{\omega}{2} \cos \vartheta \right).$$

Rozvineme-li siny a kosiny v řady (zanedbávající členy s ω^4) a zanedbáváme-li malé veličiny druhého řádu, dostaneme pro poměr $\frac{r_1}{r_s}$ vztah:

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r_s} = 1 + 4\lambda \cos \beta \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) \cos \vartheta - \frac{\omega^2}{96} \cos 3\vartheta \right] + \frac{\lambda \omega}{2} \sin \beta \left[1 - \frac{\omega^2}{64} + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\omega^2}{48} \right) \cos 2\vartheta - \frac{\omega^2}{192} \cos 4\vartheta \right]. \end{aligned} \quad (8,5)$$

Dosadíme-li nyní výrazy (8,4) a (8,5) do integrálu (8,3), dostaneme:

$$\begin{aligned} \Gamma = \omega R V_s \int_0^{\pi} \left\{ 1 + 4\lambda \cos \beta \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) \cos \vartheta - \frac{\omega^2}{96} \cos 3\vartheta \right] + \right. \\ \left. + \frac{\lambda \omega}{2} \sin \beta \left[1 - \frac{\omega^2}{64} + \left(1 - \frac{\omega^2}{48} \right) \cos 2\vartheta - \frac{\omega^2}{192} \cos 4\vartheta \right] \right\} \cdot \left[-g_0 + \frac{1}{2} g_1 + \right. \\ \left. + \left(-g_0 + \frac{1}{2} g_2 \right) \cos \vartheta - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (g_{n-1} - g_{n+1}) \cos n\vartheta \right] d\vartheta. \end{aligned} \quad (8,6)$$

¹⁵⁾ Srov. pozn. 4 na str. 341.

Po provedení integrace dostaneme konečný výraz pro cirkulaci náhradního vírového kroužku:

$$\begin{aligned} \Gamma = \pi\omega R V_s \left\{ -g_0 + \frac{1}{2} g_1 + 2\lambda \cos \beta \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{32}\right) \left(-g_0 + \frac{1}{2} g_2\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega^2}{192} (g_2 - g_4) \right] + \frac{\lambda\omega}{2} \sin \beta \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{64}\right) \left(-g_0 + \frac{1}{2} g_1\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{192}\right) (g_1 - g_3) + \frac{\omega^2}{768} (g_3 - g_5) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8,7)$$

9. Vzorec pro numerický výpočet

Ve své teorii jsme užívali z důvodu obecnosti pro jednotlivé veličiny trigonometrických rozvoů o nekonečně mnoha členech. V praktických případech však stačí užít obvykle trigonometrických polynomů poměrně nízkého stupně. Pro přímé technické použití uvedeme si v tomto odstavci vzorec, ve kterých bude u členů prvního řádu respektováno několik prvních koeficientů trigonometrických rozvoů (obvykle je zbytečné brát jich více než 6) a u členů druhého řádu budou respektovány pouze první tři koeficienty.

a) Přímý problém.

Složky primární náhradní rychlosti jsou dány trigonometrickými polynomy:

$$\frac{rV_v}{r_0V_0} = \sum_{n=0}^N v_n \cos n\vartheta, \quad \frac{rV_r}{r_0V_0} = 1 + \sum_{n=0}^2 \mu_n \cos n\vartheta \quad (9,1)$$

a funkce $\frac{d\eta}{d\varphi}$ je dána trigonometrickým polynomem

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \sum_{n=0}^N B_n \cos n\vartheta, \quad \text{kde } B_0 = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{B_{2m}}{4m^2 - 1}, \quad (9,2)$$

ve členech druhého řádu stačí brát

$$B_0 = \frac{1}{3} B_2.$$

Konečně

$$\lambda = \frac{\omega R}{8r_s}. \quad (9,3)$$

S těmito výchozími hodnotami budeme nyní řešit systém (5,11). První aproximace řešení je

$$g_n = B_n - v_n, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (9,4)$$

Tyto hodnoty dosadíme do pravých stran rovnic (5,11), kam ještě za σ_n dosadíme upravené výrazy (4,18).

$$g_0 = B_0 - v_0 + \frac{1}{2} B_1 \mu_1 + B_2 \left(\frac{1}{3} \mu_0 + \frac{1}{2} \mu_2 \right) - \frac{\omega}{8} \left[B_1 \left(v_0 - \frac{1}{2} v_1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} B_2 \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v_0 - v_1 \right) \right] + \frac{\omega^2}{192} \left(\frac{1}{3} B_2 + 2v_0 - v_2 \right) + \\ + \lambda \left\{ \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) \log \frac{4}{\lambda} - 2 + \frac{13\omega^2}{96} \right] \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v_0 - v_1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{\omega^2}{384} (B_1 - v_1) \right\} \cos \beta + \frac{\lambda\omega}{8} \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(\frac{1}{3} B_2 + 2v_0 - v_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2}{48} (B_2 - v_2) \right] \sin \beta,$$

$$g_1 = B_1 - v_1 + B_1 \left(\mu_0 + \frac{1}{2} \mu_2 \right) + \frac{5}{6} B_2 \mu_1 + \frac{\omega}{8} \left[B_1 \left(B_1 + 2v_0 - \frac{3}{2} v_1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} B_2 \left(B_1 + v_0 \right) \right] + \frac{\omega^2}{96} \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v_0 - v_1 \right) + \lambda \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{48} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{3} B_2 + 2v_0 - v_2 \right) + \frac{\omega^2}{96} (B_2 - v_2) \right] \cos \beta + \frac{\lambda\omega}{4} \left\{ \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{16} \right) \log \frac{4}{\lambda} - 3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{29\omega^2}{192} \right] \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v_0 - v_1 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{64} \right) (B_1 - v_1) \right\} \sin \beta,$$

$$g_2 = B_2 - v_2 + \frac{1}{2} B_1 \mu_1 + B_2 \left(\mu_0 + \frac{1}{3} \mu_2 \right) + \frac{\omega}{8} \left[B_1 (B_2 + v_0 - v_2) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} B_2 \left(B_2 - 3v_0 + \frac{3}{2} v_1 \right) \right] - \lambda \left[\frac{\omega^2}{16} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{19}{12} \right) \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v_0 - v_1 \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{32} \right) (B_1 - v_1) \right] \cos \beta + \frac{\lambda\omega}{4} \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(\frac{1}{3} B_2 + 2v_0 - v_2 \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{96} \right) (B_2 - v_2) \right] \sin \beta,$$

$$g_3 = B_3 - v_3 + \frac{1}{2} (B_1 \mu_2 + B_2 \mu_1) + \frac{\omega}{8} \left(\frac{1}{2} B_1 v_1 + \frac{1}{3} B_2 v_0 \right) - \\ - \lambda \left[\frac{\omega^2}{32} \left(\frac{1}{3} B_2 + 2v_0 - v_2 \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{48} \right) (B_2 - v_2) \right] \cos \beta - \\ - \frac{\lambda\omega}{8} \left[\frac{\omega^2}{24} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{7}{4} \right) \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v_0 - v_1 \right) + \left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) (B_1 - v_1) \right] \sin \beta,$$

$$g_4 = B_4 - v_4 + \frac{1}{2} B_2 \mu_2 + \frac{\omega}{8} \left(\frac{1}{2} B_1 v_2 + \frac{1}{3} B_2 v_1 \right) + \frac{\lambda}{4} \left[\frac{\omega^2}{16} (B_1 - v_1) \cos \beta - \right. \\ \left. - \frac{\omega^3}{96} \left(\frac{1}{3} B_2 + 2v_0 - v_2 \right) \sin \beta - \left(\frac{\omega}{3} - \frac{\omega^3}{96} \right) (B_2 - v_2) \sin \beta \right],$$

$$\begin{aligned}
g_5 &= B_5 - v_5 + \frac{\omega}{24} B_2 v_2 + \frac{\lambda \omega^2}{96} \left[(B_2 - v_2) \cos \beta + \frac{\omega}{8} (B_1 - v_1) \sin \beta \right], \\
g_6 &= B_6 - v_6 + \frac{\lambda \omega^3}{1152} (B_2 - v_2) \sin \beta, \\
&\vdots \\
g_n &= B_n - v_n, \text{ pro } 7 \leq n \leq N.
\end{aligned} \tag{9,5}$$

Při numerickém výpočtu je stanovení koeficientů μ_n a v_n rozvoju složek primární náhradní rychlosti na lopatce někdy dosti pracné a je snazší počítat složky primární náhradní rychlosti a normální derivaci radiální složky primární náhradní rychlosti na náhradním kruhovém oblouku. V tomto případě stanovíme jednak koeficienty v'_n pro $0 \leq n \leq N$ a μ'_n pro $0 \leq n \leq 2$ rozvoju složek primární náhradní rychlosti na náhradním kruhovém oblouku, jednak koeficienty $\bar{v}_n = v'_n + \frac{\hat{c}v'_n}{\hat{c}\eta}$, pro $0 \leq n \leq 2$, kde $\frac{\hat{c}v'_n}{\hat{c}\eta}$ značí koeficienty v rozvoji normální derivace radiální složky primární náhradní rychlosti na náhradním kruhovém oblouku. Koeficienty g_n počítáme pak ze vzorců:

$$\begin{aligned}
g_0 &= B_0 - v'_0 + \frac{1}{2} B_1 \mu'_1 + B_2 \left(\frac{1}{3} \mu'_0 + \frac{1}{2} \mu'_2 \right) - \frac{\omega}{8} \left[B_1 \left(\bar{v}_0 - \frac{1}{2} \bar{v}_1 \right) - \frac{1}{3} B_2 \left(B_1 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2}{3} B_2 + 2v'_0 - \bar{v}_1 \right) \right] + \frac{\omega^2}{192} \left(\frac{1}{3} B_2 + 2v'_0 - v'_2 \right) + \lambda \left\{ \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) \log \frac{4}{\lambda} - 2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{13\omega^2}{96} \right] \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v'_0 - v'_1 \right) - \frac{\omega^2}{384} (B_1 - v'_1) \right\} \cos \beta + \\
&\quad + \frac{\lambda \omega}{8} \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(\frac{1}{3} B_2 + 2v'_0 - v'_2 \right) + \frac{\omega^2}{48} (B_2 - v'_2) \right] \sin \beta, \\
g_1 &= B_1 - v'_1 + B_1 \left(\mu'_0 + \frac{1}{2} \mu'_2 \right) + \frac{5}{6} B_2 \mu'_1 + \frac{\omega}{8} \left[B_1 \left(B_1 + 2v'_0 - v'_1 - \frac{1}{2} \bar{v}_1 \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} B_2 (B_1 + \bar{v}_0) \right] + \frac{\omega^2}{96} \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v'_0 - v'_1 \right) + \lambda \left\{ \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{48} \right) \left(\frac{1}{3} B_2 + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2v'_0 - v'_2 \right) + \frac{\omega^2}{96} (B_2 - v'_2) \right] \cos \beta + \frac{\lambda \omega}{4} \left\{ \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{16} \right) \log \frac{4}{\lambda} - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 3 + \frac{29\omega^2}{192} \right] \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v'_0 - v'_1 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{64} \right) (B_1 - v'_1) \right\} \sin \beta, \\
g_2 &= B_2 - v'_2 + \frac{1}{2} B_1 \mu'_1 + B_2 \left(\mu'_0 + \frac{1}{3} \mu'_2 \right) + \frac{\omega}{8} \left[B_1 (B_2 + \bar{v}_0 - \bar{v}_2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{3} B_2 \left(B_2 - 3v'_0 - \frac{3}{2} v'_1 \right) \right] - \lambda \left[\frac{\omega^2}{16} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{19}{12} \right) \left(B_1 - \frac{2}{3} B_2 + 2v'_0 - v'_1 \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{32} \right) (B_1 - r'_1) \cos \beta + \frac{\lambda \omega}{4} \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(\frac{1}{3} B_2 + 2r'_0 - r'_2 \right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{96} \right) (B_2 - r'_2) \right] \sin \beta, \\
g_3 = & B_3 - r'_3 + \frac{1}{2} (B_1 \mu'_2 + B_2 \mu'_1) + \frac{\omega}{8} \left(\frac{1}{2} B_1 \bar{v}_1 + \frac{1}{3} B_2 \bar{v}_0 \right) - \lambda \left[\frac{\omega^2}{32} \left(\frac{1}{3} B_2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2r'_0 - r'_2 \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{48} \right) (B_2 - r'_2) \right] \cos \beta - \frac{\lambda \omega}{8} \left[\frac{\omega^2}{24} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{7}{4} \right) (B_1 - \right. \\
& \left. - \frac{2}{3} B_2 + 2r'_0 - r'_1) + \left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) (B_1 - r'_1) \right] \sin \beta, \\
g_4 = & B_4 - r'_4 + \frac{1}{2} B_2 \mu'_2 + \frac{\omega}{8} \left(\frac{1}{2} B_1 \bar{v}_2 + \frac{1}{3} B_2 \bar{v}_1 \right) + \frac{\lambda}{4} \left\{ \frac{\omega^2}{16} (B_1 - r'_1) \cos \beta - \right. \\
& \left. - \left[\frac{\omega^3}{96} \left(\frac{1}{3} B_2 + 2r'_0 - r'_2 \right) + \left(\frac{\omega}{3} - \frac{\omega^3}{96} \right) (B_2 - r'_2) \right] \sin \beta \right\}, \\
g_5 = & B_5 - r'_5 + \frac{\omega}{24} B_2 \bar{v}_2 + \frac{\lambda \omega^2}{96} \left[(B_2 - r'_2) \cos \beta + \frac{\omega}{8} (B_1 - r'_1) \sin \beta \right], \\
g_6 = & B_6 - r'_6 + \frac{\lambda \omega^3}{1152} (B_2 - r'_2) \sin \beta, \\
& \vdots \\
g_n = & B_n - r'_n, \text{ pro } 7 \leq n \leq N. \tag{9,6}
\end{aligned}$$

b) Nepřímý problém.

Při řešení nepřímého problému postupujeme tak (jak bylo naznačeno v odst. 6), že si nejprve zvolíme náhradní oblouk (R, ω) se střední vzdáleností od osy r_s a vhodný úhel nastavení α_0 . Pro tuto konfiguraci určíme hodnoty koeficientů:

$$\begin{aligned}
& r'_n \text{ pro } 0 \leq n \leq N, \\
\mu'_n, \bar{v}_n = & r'_n + \frac{\partial r'_n}{\partial \eta}, \frac{\partial r'_n}{\partial \alpha} \text{ pro } 0 \leq n \leq 2 \tag{9,7}
\end{aligned}$$

a parametr

$$\lambda = \frac{\omega R}{8r_s}. \tag{9,8}$$

Konečně máme ještě předepsáno rozložení cirkulace trigonometrickým polynomem:

$$r\gamma = 2r_s V_s \sum_{n=1}^N g_n \sin n\vartheta, \tag{9,9}$$

poněvadž se obvykle navrhuje lopatka s hladkým náběhem, položili jsme v (9,9) přímo $g_0 = 0$.

S těmito výchozími hodnotami budeme nyní řešit systém (6,9). Jako u pří-
 měho problému budeme v členech druhého řádu zanedbávat všechny koefi-
 cienty s indexem větším než 2. První aproximace řešení je

$$B_n^0 = g_n + v'_n - \lambda \sigma_n, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (9,10)$$

kde za σ_n jsou dosazeny upravené výrazy (4,18). Tuto první aproximaci dosa-
 díme do pravých stran rovnic (6,9):

$$B_1^1 = g_1 + v'_1 - (g_1 + v'_1) \left[\mu'_0 + \frac{1}{2} \mu'_2 + \frac{\omega}{8} \left(g_1 - \frac{1}{2} \bar{v}_1 \right) \right] - (g_2 + v'_2) \left(\frac{5}{6} \mu'_1 - \right. \\ \left. - \frac{\omega}{12} \bar{v}_0 \right) - \frac{\omega^2}{96} g_1 - \lambda \left\{ \frac{\omega}{2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) \log \frac{4}{\lambda} - \frac{7}{4} + \frac{\omega^2}{12} \right] g_1 \sin \beta + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{3\omega^2}{32} \right) g_2 \cos \beta \right\},$$

$$B_2^1 = g_2 + v'_2 - (g_1 + v'_1) \left[\frac{1}{2} \mu'_1 + \frac{\omega}{8} (\bar{v}_0 - \bar{v}_2) \right] - (g_2 + v'_2) \left(\mu'_0 + \frac{1}{3} \mu'_2 + \right. \\ \left. + \frac{\omega}{8} g_1 \right) + \frac{\lambda}{2} \left[\left(1 + \frac{\omega^2}{8} \log \frac{4}{\lambda} - \frac{25\omega^2}{96} \right) g_1 \cos \beta - \frac{\omega}{6} \left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) g_2 \sin \beta \right],$$

$$B_3^1 = g_3 + v'_3 - (g_1 + v'_1) \left(\frac{1}{2} \mu'_2 + \frac{\omega}{16} \bar{v}_1 \right) - (g_2 + v'_2) \left[\frac{1}{2} \mu'_1 + \frac{\omega}{12} (\bar{v}_0 - \frac{1}{2} \bar{v}_2) \right] + \\ + \lambda \left[\frac{\omega}{8} \left(1 + \frac{\omega^2}{24} \log \frac{4}{\lambda} - \frac{5\omega^2}{48} \right) g_1 \sin \beta + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\omega^2}{32} \right) g_2 \cos \beta \right],$$

$$B_4^1 = g_4 + v'_4 - \frac{\omega \bar{v}_2}{16} (g_1 + v'_1) - \frac{1}{2} (g_2 + v'_2) \left(\mu'_2 + \frac{\omega}{12} \bar{v}_1 \right) - \frac{\lambda \omega}{4} \left[\frac{\omega}{16} g_1 \cos \beta - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} g_2 \sin \beta \right],$$

$$B_5^1 = g_5 + v'_5 - \frac{\omega \bar{v}_2}{24} (g_2 + v'_2) - \frac{\lambda \omega^2}{96} \left(\frac{\omega}{8} g_1 \sin \beta + g_2 \cos \beta \right),$$

$$B_6^1 = g_6 + v'_6 - \frac{\lambda \omega^3}{1152} g_2 \sin \beta,$$

⋮
 ⋮

$$B_n^1 = g_n + v'_n, \quad \text{pro } 7 \leq n \leq N. \quad (9,11)$$

Změna úhlu nastavení Δx je

$$\Delta x = \frac{P}{1 + Q}, \quad (9,12)$$

kde

$$\begin{aligned}
 P = & -v'_0 + (1 + \mu'_0) \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{B_{2m}^1}{4m^2 - 1} + \frac{1}{2} (B_1^1 \mu'_1 - B_2^1 \mu'_2) - \frac{\omega}{8} \left[B_1^1 \left(\bar{v}_0 - \frac{1}{2} \bar{v}_2 \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{6} B_2^1 \left(\frac{1}{2} g_1 - 5\bar{v}_1 \right) \right] - \frac{\omega^2}{192} g_2 + \lambda \left\{ \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) \log \frac{4}{\lambda} - 2 + \frac{17\omega^2}{128} \right] g_1 \cos \beta + \right. \\
 & \left. + \frac{\omega}{8} \left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) g_2 \sin \beta \right\}, \quad (9,13)
 \end{aligned}$$

$$Q = \frac{\partial v'_0}{\partial \alpha} + \mu'_0 - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v'_2}{\partial \alpha} + \mu'_2 \right) + \frac{\omega}{8} B_1^1.$$

Správný úhel nastavení je $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$ a tvar lopatky je dán vztahem:

$$\eta = \frac{\omega}{4} \left[B_0(1 - \cos \vartheta) + \sum_{n=1}^N \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (1 - \cos n\vartheta) \right], \quad (9,14)$$

kde

$$B_1 = B_1^1 + \left(\frac{\partial v'_1}{\partial \alpha} + \mu'_1 \right) \Delta\alpha,$$

$$B_2 = B_2^1 + \left(\frac{\partial v'_2}{\partial \alpha} + \mu'_2 \right) \Delta\alpha,$$

⋮

$$B_n = B_n^0, \text{ pro } 3 \leq n \leq N \quad (9,15)$$

a

$$B_0 = \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{B_{2m}^1}{4m^2 - 1}.$$

c) Rozložení povrchové rychlosti na lopatce.

Povrchová náhradní rychlost je podle (7,6) a (7,7) dána vztahem (index I u r a η budeme v následujících vztazích vypouštět).

$$rU = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{d\varphi} \right)^2 \right] rV_r + \frac{d\eta}{d\varphi} \cdot rV_\varphi + ru \pm \frac{r\gamma}{1 + \eta}. \quad (9,16)$$

Všechny veličiny na pravé straně rovnice (9,16) s výjimkou tečné složky indukované náhradní rychlosti jsou známy a to buď dané nebo vypočítané podle příslušných vzorců tohoto odstavce (pro přímý nebo nepřímý problém). Tečná složka indukované náhradní rychlosti je podle (7,4) a (7,5) dána při naší přesnosti vztahem:

$$\begin{aligned}
\frac{ru}{r_s V_s} = & - \left\{ \frac{1}{2} B_1 + \frac{4}{3} B_2 \cos \vartheta + \frac{\omega}{4} \left[1 - \frac{5}{6} \eta - \frac{\omega}{12} \left(\frac{1}{4} B_1 + \frac{d\eta}{d\varphi} \cos \vartheta \right) \right] \right\} \times \\
& \times \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{1}{3} \left(B_2 + \frac{\omega^2}{32} \frac{d\eta}{d\varphi} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \frac{\omega^2}{384} \left(B_2 g_0 - \right. \\
& - \frac{1}{2} B_1 g_1 - B_2 g_2 \left. \right) + \lambda \left\{ \frac{\omega}{4} \left[\left(3 - \frac{11\omega^2}{96} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{5\omega^2}{2304} g_2 \right] \cos \beta - \right. \\
& - \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{8} \right) \log \frac{4}{\lambda} - 2 + \frac{7\omega^2}{48} \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \sin \beta + \frac{11\omega^2}{384} g_1 \sin \beta \left. \right\} + \\
& + \lambda \cos \vartheta \left\{ \frac{\omega}{2} \left[\left(2 - \frac{\omega^2}{16} \right) \log \frac{4}{\lambda} - 3 + \frac{23\omega^2}{192} \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) \cos \beta + \right. \\
& + \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{128} \right) g_1 \cos \beta - \left[\left(2 - \frac{5\omega^2}{24} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{\omega^2}{96} g_2 \right] \sin \beta \left. \right\} + \\
& + \lambda \cos 2\vartheta \left\{ \frac{\omega}{2} \left[\left(1 - \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega^2}{192} \right) g_2 \right] \cos \beta + \right. \\
& + \left. \left[\frac{\omega^2}{8} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{19}{12} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{32} \right) g_1 \right] \sin \beta \right\} + \\
& + \lambda \cos 3\vartheta \left\{ \frac{\omega}{4} \left[-\frac{\omega^2}{24} \left(\log \frac{4}{\lambda} - \frac{7}{4} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{64} \right) g_1 \right] \cos \beta + \right. \\
& + \left. \left[\frac{\omega^2}{16} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{48} \right) g_2 \right] \sin \beta \right\} + \lambda \cos 4\vartheta \left\{ \frac{\omega}{4} \left[- \right. \right. \\
& - \frac{\omega^2}{48} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) + \left. \left(\frac{1}{3} - \frac{\omega^2}{96} \right) g_2 \right] \cos \beta + \frac{\omega^2}{64} g_1 \sin \beta \left. \right\} + \\
& + \lambda \cos 5\vartheta \frac{\omega^2}{96} \left[-\frac{\omega}{8} g_1 \cos \beta + g_2 \sin \beta \right] - \lambda \cos 6\vartheta \frac{\omega^3}{1152} g_2 \cos \beta. \quad (9,17)
\end{aligned}$$

d) Cirkulace náhradního vírového kroužku.

Při vyšetřování rychlosti indukované anulární lopatkou ve vzdálených bodech můžeme anulární lopatku nahradit jediným vírovým kroužkem poloměru r_s . Cirkulace Γ tohoto náhradního vírového kroužku je dána podle (8,7) vzorcem:

$$\begin{aligned}
\Gamma = \pi \omega R V_s \left\{ -g_0 + \frac{1}{2} g_1 - 2\lambda \cos \beta \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{32} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{\omega^2}{192} g_2 \right] - \right. \\
\left. - \frac{\lambda \omega}{2} \sin \beta \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{64} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{192} \right) g_1 \right] \right\}. \quad (9,18)
\end{aligned}$$

Závěr

V práci je vypracována metoda k výpočtu potenciálního obtékání tenké anulární lopatky vložené do osově symetrického proudu, jehož osa je totožná

s osou lopatky. Rozložení cirkulace vírových kroužků podél anulární lopatky (a tím i rychlostní pole indukované vloženou anulární lopatkou) při daném tvaru lopatky je dáno rovnicemi (5,11). Tyto rovnice dávají vztahy mezi Fourierovými koeficienty g_n hledaného rozložení hustoty cirkulace vírových kroužků, Fourierovými koeficienty B_n tvaru profilu a Fourierovými koeficienty μ_n, ν_n složek primární rychlosti. Pro obeenost jsou psány jako vztahy mezi nekonečně mnoha koeficienty; ve skutečnosti stačí vzít k výpočtu jen několik málo prvních členů, jak je provedeno v (9,5) nebo v (9,6), kde jsou sestaveny vzorce pro praktický výpočet rozložení cirkulace na tenké anulární lopatce vložené do osově symetrického proudu.

Pro řešení nepřímého problému, t. j. určení tvaru lopatky při daném rozložení cirkulace, jsou tyto rovnice přepsány na tvar (6,8) a (6,9), k nimž ještě patří rovnice (6,15)—(6,17), které určují úhel nastavení anulární lopatky. Pro praktický výpočet jsou sestaveny vzorce (9,11)—(9,15) s konečným počtem členů.

Pro výpočet povrchové rychlosti na podtlakové i přetlakové straně lopatky jsou odvozeny vzorce (7,4) a (7,6), které jsou v (9,16) a (9,17) upraveny k numerickému výpočtu.

Je odvozen vztah (8,7) pro cirkulaci vírového kroužku ekvivalentního anulární lopatce (k vyšetřování proudění ve vzdálených bodech).

Teorie je vybudována jakožto teorie druhého řádu, respektující vedle „hlavních členů“ (veličin malých prvního řádu) ještě součiny dvou malých veličin prvního řádu. Za malé veličiny se při tom pokládají jednak odchylka meridiánu lopatky od kruhového oblouku, jednak poměr délky lopatky a (osminásobku) její (střední) vzdálenosti od osy symetrie. Vedle toho se předpokládá, že úhel otevření oblouku nahrazujícího lopatku není příliš velký (prakticky smí být i až asi 180°).

Výsledné vzorce jsou (jako v rovinném případě) přehledné tím, že dávají jednoduché vztahy mezi hlavními členy (veličinami prvního řádu)

$$g_n = B_n - \nu_n,$$

k nimž přistupují malé korekce (veličiny druhého řádu). Hlavní členy se shodují s rovinným případem, korekce obsahují navíc člen úměrný poměru délky lopatky k její vzdálenosti od osy symetrie.

Přesnost vzorců je ve všech normálních případech vyhovující. Zanedbané členy mají velikost několika tisícin, kdežto hlavní člen několika desetín. Vzorce (i v zjednodušeném tvaru určeném pro numerický výpočet) jsou dlouhé, protože v nich byly ponechány i vyšší mocniny úhlu otevření náhradního oblouku ω tak, aby platily i pro velmi zakřivené lopatky (s úhlem otevření kolem 180°). V normálních případech, kdy ω je menší, lze (jak je vidět na první pohled) většinu členů obsahujících ω zanedbat.

Možnosti použití ve strojnictví jsou veliké, protože vhodně umístěná a dimenzovaná lopatka může zabránit velkým záporným gradientům rychlosti na stěně a tím odtržení proudu; přitom ve strojnictví přichází nejčastěji právě zde zpracovaný osově symetrický případ. Jako příklady uvádíme otočení proudu ve vstupním hrdle odstředivých lopatkových strojů nebo lepší rozložení rychlosti na vstupním průřezu osových lopatkových strojů.

V závěru chce autor poděkovat dr Ladislavu Špačkovi za cenné rady a podněty při sepisování tohoto článku.

Dodatek I.

a) V integrálu (4,7) se vyskytují jednak singulární integrály typu

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi}{\cos \chi - \cos \vartheta} d\chi, \quad 0 < \vartheta < \pi, \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (1)$$

Hodnoty těchto singulárních integrálů byly vypočteny v práci o tenkém profilu v nehomogenním proudovém poli ([4], str. 126) a proto si zde uvedeme jen výsledek:

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\chi}{\cos \chi - \cos \vartheta} d\chi = \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2)$$

b) Dále se v integrálu (4,7) vyskytují nevlastní integrály typu:

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n\chi \log |\cos \vartheta - \cos \chi| d\chi; \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Pro $n \geq 1$ dostaneme metodou integrace per partes:

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\pi n} \sin n\chi \log |\cos \chi - \cos \vartheta| \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin n\chi \sin \chi}{\cos \chi - \cos \vartheta} d\chi = \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^\pi \frac{\cos(n-1)\chi - \cos(n+1)\chi}{\cos \chi - \cos \vartheta} d\chi = \frac{1}{2n} (J_{n-1} - J_{n+1}), \end{aligned}$$

a tedy:

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n\chi \log |\cos \vartheta - \cos \chi| d\chi = -\frac{\cos n\vartheta}{n}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Pro $n = 0$ je výpočet poněkud složitější; máme

$$L_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log |\cos \chi - \cos \vartheta| d\chi = \log 2 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \frac{1}{2} |\cos \chi - \cos \vartheta| d\chi, \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} \log \frac{1}{2} |\cos \chi - \cos \vartheta| d\chi = \int_0^{\pi} \log \left| \sin \frac{\chi + \vartheta}{2} \sin \frac{\chi - \vartheta}{2} \right| d\chi = \\
& = \int_0^{\pi} \log \sin \frac{\chi + \vartheta}{2} d\chi + \int_0^{\vartheta} \log \sin \frac{\vartheta - \chi}{2} d\chi + \int_{\vartheta}^{\pi} \log \sin \frac{\chi - \vartheta}{2} d\chi = \\
& = 2 \int_{\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\pi + \vartheta}{2}} \log \sin \psi d\psi - 2 \int_{\frac{\vartheta}{2}}^0 \log \sin \psi d\psi + 2 \int_0^{\frac{\pi - \vartheta}{2}} \log \sin \psi d\psi = \\
& = 2 \int_0^{\frac{\pi + \vartheta}{2}} \log \sin \psi d\psi + 2 \int_{\frac{\pi - \vartheta}{2}}^{\pi} \log \sin \psi d\psi = 2 \int_0^{\pi} \log \sin \psi d\psi,
\end{aligned}$$

tedy

$$\int_0^{\pi} \log \frac{1}{2} |\cos \chi - \cos \vartheta| d\chi = 2 \int_0^{\pi} \log \sin \psi d\psi. \quad (6)$$

Z této rovnice je vidět, že daný integrál nezávisí na ϑ . Pro jeho výpočet si zvolíme $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} \log \frac{1}{2} |\cos \chi| d\chi = 2 \int_0^{\pi} \log \sin \psi d\psi = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \log \cos \chi d\chi = \\
& = 2 \int_0^{\pi} \log |\cos \chi| d\chi = 2\pi \log 2 + 2 \int_0^{\pi} \log \frac{1}{2} |\cos \chi| d\chi
\end{aligned}$$

a z toho plyne, že

$$\int_0^{\pi} \log \frac{1}{2} |\cos \chi - \cos \vartheta| d\chi = \int_0^{\pi} \log \frac{1}{2} |\cos \chi| d\chi = -2\pi \log 2. \quad (7)$$

Dosadíme-li (7) do (5), dostaneme hledanou hodnotu integrálu L_0 :

$$L_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log |\cos \chi - \cos \vartheta| d\chi = -\log 2. \quad (8)$$

Dodatek II.

Tečnou složku indukované náhradní rychlosti můžeme vyjádřit rozdílem

$$r_1 u = r_1 \bar{u} - r_1 \bar{\bar{u}}, \quad (9)$$

kde

$$r_1 \bar{u} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2} (\eta + \eta_1) - \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \cot g^2 \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \frac{d\eta_1}{d\varphi_1} \cot g \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] r \gamma d\varphi \quad (10)$$

a

$$r_1 \bar{u} = \frac{2\lambda_1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \sin \beta_1 \left[\log \left| \frac{4}{\omega} \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right| + \log \frac{\lambda_1}{2} + 2 \right] - \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \left[\sin \beta_1 \cos \frac{\varphi - \varphi_1}{2} + \cos \beta_1 \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \right] \right\} \cdot \frac{r \gamma d\varphi}{\omega} \quad (11)$$

Výraz pro první člen $r_1 \bar{u}$ byl odvozen v dodatku IV k práci [4], a proto si zde uvedeme přímo výsledek:¹⁶⁾

$$\begin{aligned} \frac{r_1 \bar{u}}{r_0 V_0} = & -\frac{\omega}{4} \left[1 - \frac{5}{6} \eta_1 - \frac{\omega}{12} \cos \vartheta \frac{d\eta_1}{d\varphi_1} - \frac{\omega}{24} \left(B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} \right) \right] \left(g_0 - \right. \\ & - \frac{1}{2} g_1 \left. \right) - \frac{\omega^2}{96} \frac{d\eta_1}{d\varphi_1} \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{\omega^2}{384} \left[(2B_0 - B_2) g_0 + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1} - B_{n+1}}{n} (g_{n-1} - g_{n+1}) \left. \right] - \frac{1}{2} B_1 \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \frac{1}{3} B_2 \left[(1 + \right. \\ & + 4 \cos \vartheta) g_0 - 2g_1 \cos \vartheta - \frac{1}{2} g_2 \left. \right] - \frac{1}{2} B_3 \left[(1 + 2 \cos \vartheta + 3 \cos 2\vartheta) g_0 - \right. \\ & - \frac{1}{4} (1 + 6 \cos 2\vartheta) g_1 - g_2 \cos \vartheta - \frac{1}{4} g_3 \left. \right] - \sum_{n=4}^{\infty} B_n \left\{ g_0 \left[(1 + \right. \right. \\ & + \cos \vartheta) \left(\frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{1}{n+1} \frac{\cos n\vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \frac{1}{n^2-1} \frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin^3 \vartheta} \right) - \cos n\vartheta \left. \right] - \\ & - \frac{1}{n^2-1} \sum_{m=1}^{n-1} g_m \left[(n^2 - mn - 1) \cos(n-m)\vartheta + \right. \\ & \left. + m \cdot \frac{\cos \vartheta \sin(n-m)\vartheta}{\sin \vartheta} \right] - \frac{g_n}{2(n+1)} \left. \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Při výpočtu druhého členu $r_1 \bar{u}$ budeme postupovat stejně jako ve čtvrtém odstavci této práce (viz rov. (4,1)–(4,6)). Po jednoduché úpravě dostaneme:

¹⁶⁾ Jako v práci [4] předpokládáme v tomto dodatku na př., že $\sum_1^{\infty} n^3 |B_n| < \infty$. Za tohoto předpokladu bude řada pro tečnou složku indukované náhradní rychlosti i řada pro gradient této složky konvergovat stejnoměrně v celém intervalu $0 \leq \vartheta \leq \pi$.

$$\begin{aligned} \frac{r_1 \bar{u}}{r_0 V_0} = & -\frac{2\lambda_1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \sin \beta_1 \left[\log |\cos \chi - \cos \vartheta| + \log \frac{\lambda_1}{2} + 1 + \frac{5}{96} \omega^2 (\cos \chi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos \vartheta)^2 \right] + \frac{\omega}{4} \cos \beta_1 \left[(\cos \chi - \cos \vartheta) - \frac{\omega^2}{24} (\cos \chi - \cos \vartheta)^3 \right] \right\} \left[g_0 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_1 + \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) \cos \chi + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (g_{n-1} - g_{n+1}) \cos n\chi \right] d\chi. \quad (13) \end{aligned}$$

Hodnoty nevlastních integrálů, které se vyskytují v rovnici (13), byly odvozeny v dodatku I rov. (4) a (8). Použijeme-li těchto výsledků, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{r_1 \bar{u}}{r_0 V_0} = & 2\lambda_1 \sin \beta_1 \left\{ \left[\log \frac{4}{\lambda_1} - 1 - \frac{5}{96} \omega^2 \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \right. \\ & + \cos \vartheta \left(1 + \frac{5}{96} \omega^2 \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{5\omega^2}{768} (g_1 - g_3) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{n} \cos n\vartheta \left. \right\} + \lambda_1 \frac{\omega}{2} \cos \beta_1 \left\{ \left[\cos \vartheta - \frac{\omega^2}{32} \left(3 \cos \vartheta + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{3} \cos 3\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \left[\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{32} \left(\frac{3}{2} + \cos 2\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\omega^2}{64} \left[(g_1 - g_3) \cos \vartheta - \frac{1}{6} (g_2 - g_4) \right] \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

V rovnici (14) budeme (obdobně jako v odst. 4) psát místo λ_1 jen λ (4,13) a za $\sin \beta_1$ a $\cos \beta_1$ dosadíme výrazy (4,15) a (4,16):

$$\begin{aligned} \frac{r_1 \bar{u}}{r_0 V_0} = & 2\lambda \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) \sin \beta - \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\omega^3}{64} \right) \cos \beta \cos \vartheta - \frac{\omega^2}{16} \sin \beta \cos 2\vartheta + \right. \\ & + \frac{\omega^3}{192} \cos \beta \cos 3\vartheta \left. \right] \left\{ \left[\log \frac{4}{\lambda} - 1 - \frac{5\omega^2}{96} \left(1 + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \right. \\ & + \cos \vartheta \left(1 + \frac{5\omega^2}{96} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{5\omega^2}{768} (g_1 - g_3) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_{n-1} - g_{n+1}}{n} \cos n\vartheta \left. \right\} + \lambda \frac{\omega}{2} \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{16} \right) \cos \beta + \left(\frac{\omega}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega^3}{64} \right) \sin \beta \cos \vartheta - \frac{\omega^2}{16} \cos \beta \cos 2\vartheta - \frac{\omega^3}{192} \sin \beta \cos 3\vartheta \right] \cdot \left\{ \left[\cos \vartheta - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\omega^2}{32} \left(3 \cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos 3\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) - \left[\frac{1}{2} - \frac{\omega^2}{32} \left(\frac{3}{2} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \cos 2\vartheta \right) \right] \left(g_0 - \frac{1}{2} g_2 \right) - \frac{\omega^2}{64} \left[(g_1 - g_3) \cos \vartheta - \frac{1}{6} (g_2 - g_4) \right] \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Tuto rovnici si můžeme upravit na tvar

$$\frac{r_1 \bar{u}}{r_0 V_0} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \cos n\vartheta. \quad (16)$$

Explicitní výrazy pro τ_n jsou uvedeny v textu, vzorce (7,5).

Pro posouzení funkce lopatky je nutné vyšetřovat i průběh gradientu povrchové rychlosti, neboť (srov. [6]) velký záporný gradient povrchové rychlosti má nepříznivý vliv na mezní vrstvu. Napišeme si proto v tomto dodatku ještě výraz pro derivaci tečné složky indukované náhradní rychlosti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0 V_0} \frac{d(r_1 u)}{d\varphi_1} = & \frac{\omega}{4} \left(\frac{d\eta_1}{d\varphi_1} - \frac{\omega}{12} \cos \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n B_n \sin n\vartheta}{\sin \vartheta} \right) \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \frac{\omega^2}{96} \left(g_0 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} g_2 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n B_n \sin n\vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{8}{3\omega} B_2 \left(g_0 - \frac{1}{2} g_1 \right) + \frac{2}{\omega} B_3 \left[\left(1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + 6 \cos \vartheta \right) g_0 + 3 g_1 \cos \vartheta + \frac{1}{2} g_2 \right] + \frac{2}{\omega} \sum_{n=4}^{\infty} B_n \left\{ g_0 \left[- \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(n-1) \sin n\vartheta}{\sin \vartheta} + \frac{1}{n+1} \frac{\cos n\vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \frac{1}{n^2-1} \frac{\sin(n-1)\vartheta}{\sin^3 \vartheta} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + \cos \vartheta) \left(\frac{n \cos n\vartheta}{\sin^2 \vartheta} - \frac{\cos \vartheta \sin n\vartheta}{\sin^3 \vartheta} - \frac{n \sin n\vartheta}{n+1} \frac{1}{\sin^3 \vartheta} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2 \cos \vartheta \cos n\vartheta}{n+1} \frac{1}{\sin^4 \vartheta} - \frac{1}{n+1} \frac{\cos(n-1)\vartheta}{\sin^4 \vartheta} + \frac{3}{n^2-1} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\cos \vartheta \sin(n-1)\vartheta}{\sin^5 \vartheta} \right) \right] - \frac{1}{n^2-1} \sum_{m=1}^{n-1} g_m (n-m) \left[(n^2 - nm - \right. \\ & \left. - 1) \frac{\sin(n-m)\vartheta}{\sin \vartheta} - m \frac{\cos \vartheta \cos(n-m)\vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \frac{m}{n-m} \times \right. \\ & \left. \left. \times \frac{\sin(n-m)\vartheta}{\sin^3 \vartheta} \right] \right\} + \frac{2\lambda}{\omega} \sum_{n=1}^{\infty} n \tau_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Za našich předpokladů o koeficientech konverguje řada (17) stejnoměrně v celém intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.

SEZNAM LITERATURY

- [1] Geiger H., Scheel K.: Handbuch der Physik, Bd. VII, J. Springer, Berlin (1927).
- [2] Poláček J.: Theorie tenké anulární lopatky v osové symetrickém proudění. Výzkumná zpráva VÚTS: VT — Z 5326.
- [3] Jahneke — Emde: Tafeln höherer Funktionen, B. G. Teubner, Leipzig (1952).
- [4] Poláček J.: Tenký profil v nehomogenním proudovém poli. Aplikace matematiky 1 (1956), No 1—2.
- [5] Poláček J.: Vstup odstředivého ventilátoru s anulární vodící lopatkou. Výzkumná zpráva VÚTS: VT — Z 5327.
- [6] Růžička M., Špaček L.: Požadované rozložení povrchové rychlosti. Výzkumná zpráva VÚTT: VT — Z 5430.

Dále uvádíme přehled některých prací o osově symetrickém proudění:

- [7] *Dickmann H. E.*: Grundlagen zur Theorie ringförmiger Tragflügel (frei umströmte Düsen); Ing. Archiv, sv. 11 (1940), str. 36 — 52.
- [8] *Horn F.*: Beitrag zur Theorie ummantelter Schiffsschrauben; Jahrb. der schiffbau-technischen Gesellschaft, 1940, str. 103 — 187.
- [9] *Stewart H. J.*: The Aerodynamics of a Ring Airfoil; Quart. appl. Math., sv. 2 (1944), str. 136 — 141.
- [10] *Weinstein A.*: On axially symmetric flow; Quart. appl. Math. Jan. 1948, v. 5, str. 429 až 444.
- [11] *Van Wijngaarden*: Potencial flow around a body of revolution; Colloqu. Intern. du Centr. Mat. Rech. Sci., No 14.
- [12] *Zenkin A.*: Obtékání koule za přítomnosti vírového kroužku; Doklady Akademie nauk SSSR 58 (1947), str. 373—375.
- [13] *Van Tuyl A.*: On axially symmetric flow round a new family of half bodies; Recensováno v Applied Mechanics Reviews (1953), Rev. 1987.
- [14] *Rose A.*: On the use of complex (quaternion) velocity potentials in three dimensions; Commentarii mathematici helvetici 24 (1950), str. 135—148.
- [15] *Sadowsky M. A., Sternberg E.*: Elliptic integral representation of axially symmetric flows; Quart. appl. Math. Jouly 1950, v. 8, str. 113—126.
- [16] *Riegels F.*: Flow around slender, almost rotationally symmetric bodies; Mitt. Max. Plank Inst. Strömungsforschung, No 5, 1952, str. 72.
- [17] *Woods L. C.*: A new relaxation Treatment of Flow with Axial Symetry; The Quart. Jour. of Mech. and Math., sv. 4 (1951), č. 3, str. 358—370.
- [18] *Payne L. E.*: On axially symmetric Flow and the Method of generalized Electrostatics; Quart. of Appl. Math., sv. 10 (1952), str. 197—204.

Резюме

КОЛЬЦЕВАЯ ЛОПАТКА В СИММЕТРИЧНОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ ПОЛЕ ТОКА

ЯН ПОЛАШЕК (Jan Polášek)

(Поступило в редакцию 13/X 1955 г.)

В работе разрабатывается теория тонкой кольцевой лопатки в симметричном относительно оси потенциальном потоке несжимаемой жидкости. Основная идея теории Бирибаума-Глауерта несущей вихревой поверхности (замена тонкого профиля в двумерном потоке непрерывным распределением вихревых нитей вдоль профиля) обобщается на случай симметричного относительно оси потока таким образом, что тонкая кольцевая лопатка заменяется непрерывным распределением вихревых колец на лопатке. Вследствие того, что речь идет о потоке, симметричном относи-

тельно оси, можно все рассуждения проводить лишь в одной плоскости меридиана. Вид меридионального сечения кольцевой лопатки в полярных координатах t, φ плоскости меридиана дан управлением (3,1) и тригонометрическим рядом (5, 7), в котором встречаются вспомогательные координаты ϑ или χ [смотри уравнение (4,1)]. Положение меридионального сечения лопатки по отношению к оси симметрии определено параметром λ и углом β [смотри уравнение (4,13) и рис. 4]. Распределение вихревых колец на лопатке дано тригонометрическим рядом (4,2), радиальная и азимутальная компоненты (по отношению к полярным координатам t, φ) примарной скорости, умноженные на расстояние от оси симметрии, — рядом (6,1), соответственно (6,2). Показано, что коэффициенты этих рядов удовлетворяют уравнениям (6,6). В этих уравнениях фигурируют только те члены, порядок которых равен самое большее порядку произведения двух коэффициентов; о параметре λ предполагается, что он того же порядка, как и коэффициенты. Уравнениями (6,6) можно пользоваться как для расчета потока (распределения вихревых колец) вдоль данной кольцевой лопатки (прямая проблема), так и для расчета формы кольцевой лопатки по данному распределению вихревых колец (обратная проблема). Для практических расчетов выводятся в отделе 9 уравнения, в которых содержится только конечное число членов.

Summary

ANNULAR BLADE IN AXIALLY-SYMMETRIC FLOW

JAN POLÁŠEK

(Received October 13, 1955.)

The theory of thin annular blade in axially-symmetric incompressible potential flow is developed. The principal idea of Birnbaum-Glauert's lifting-surface theory (the equivalence of thin airfoil in two-dimensional flow with the vortex-lines-sheet along it) is generalized for axially-symmetric flow using the equivalence of thin annular blade with the vortex-rings-sheet along it. With respect to the axial symmetry, all considerations can be done in one single meridian plane. The shape of the meridian section of the annular blade is expressed by Eq. (3,1) and the trigonometric series (5,7), using in the meridian plane the polar coordinates t, φ and the auxiliary coordinate ϑ or χ (see. Eq. (4,1). The position of the meridian section of the blade with respect to the axis of symmetry is given by the parameter λ and the angle β (see. Eq. (4,13) and Fig. 4). The vortex-rings-distribution along the blade is expressed

by the trigonometric series (4,2) and the radial and azimuthal (with respect to the polar coordinates t, φ) components of the primary velocity multiplied by the distance from the axis of symmetry are expressed by the series (6,1) and (6,2) respectively. It is shown that the coefficients of these series are connected by the Eqs. (6,6). In these equations the terms of as high order as the product of two coefficients are considered, the parameter λ being assumed to be of the same order as the coefficients. Eqs. (6,6) can be used both for calculating the flow (vortex-rings-distribution) along a given annular blade (direct problem) and for calculating the shape of the annular blade if the vortex-rings-distribution is given (inverse problem). For practical calculation equations containing only a finite number of terms are worked out in paragraph 9.