

Aplikace matematiky

Karel Rektorys

Užití Lagrangeových rovnic II. druhu ke studiu činnosti jednoho strojního zařízení

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 5, 319–333

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102538>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČLÁNKY

UŽITÍ LAGRANGEOVÝCH ROVNIC II. DRUHU KE STUDIU
ČINNOSTI JEDNOHO STROJNÍHO ZAŘÍZENÍ

KAREL REKTORYS

(Došlo dne 16. března 1956.)

DT. 531.314.5

V článku je užito Lagrangeových pohybových rovnic II. druhu ke studiu pohybu hmotného bodu na kuželovém plášti, který představuje rotující část jistého strojního zařízení. Úkolem tohoto zařízení je rychlý odsun kamene z místa, kde se hromadí. V popředí zájmu je otázka, jak na pohyb hmotného bodu působí tření.

V první části (str. 319 až str. 324) jsou sestaveny pohybové rovnice, které vedou k soustavě (8), (9). Tato soustava je analysována a přibližně řešena (str. 325 až str. 329). Když kámen opustí kuželový plášť, přejde na drsný pás, který jej uchopí a má za úkol jej odmrstit. Pohyb na drsném pásu je studován v poslední části práce.

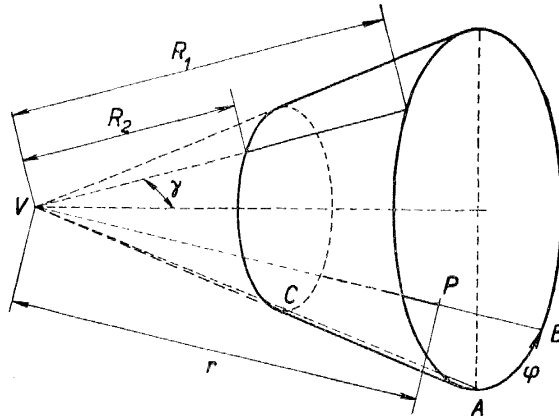
Z fyziky jsou dobře známé Newtonovy pohybové rovnice. Ke studiu pohybů, vázaných na plochy, jsou však mnohem vhodnější t. zv. Lagrangeovy rovnice II. druhu. Přesto, že v theoretické fyzice jsou tyto rovnice dobře známé, setkáváme se s jejich praktickým užitím velmi zřídka. V tomto článku jich užijeme ke studiu pohybu na kuželovém plášti, který představuje rotující část jednoho strojního zařízení, jehož úkolem je rychlý odsun kamene z místa, kde se kámen hromadí.

Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu (pro jeden hmotný bod) mají tvar (viz na př. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = K_{q_k}, \quad (1)$$

kde q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) jsou t. zv. zobecněné souřadnice (o tom, jak se prakticky zavádějí, se hned dovíme), n je počet těchto souřadnic (v našem případě bude $n = 2$), $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$, L je rozdíl kinetické a potenciální energie ($L = T - U$) a K_{q_k} jsou složky nekonzervativních sil (t. j. sil, které nemají potenciál, v našem případě to bude tření) do souřadnic q_k .

Náš úkol je nyní tento: Na plášť bubnu, vyobrazeného na obr. 1, dopadne kámen (v naší abstrakci to bude hmotný bod), mající hmotu m (kg) a jistou počáteční rychlost. Buben má tvar pláště rotačního komolého kužele. Doplňme komolý kužel na celý a označme (viz obr. 1) délku povrchových přímk R_1 , délku povrchových přímk od vrcholu k horní podstavě R_2 , úhel povrchových



Obr. 1.

přímk s osou kužele γ . (V našem případě bude $R_1 = 0,60$ m, $R_2 = 0,30$ m, $\gamma = 45^\circ$.) Každý bod P na kuželovém bubnu je (vzájemně) jednoznačně stanoven dvěma souřadnicemi r a φ , kde r je vzdálenost od vrcholu V kužele (tedy pro body na bubnu bude $R_2 \leq r \leq R_1$), φ ($-\pi < \varphi \leq \pi$) je úhel \widehat{AB} , měřený v obloukové míře na obvodu dolní podstavavy od nejnižší polohy A (kladný smysl bude stanoven dále) k bodu B , který je průsečíkem průvodiče \overline{VP} s dolní podstavou (viz obr. 1).

Buben se otáčí úhlovou rychlostí ω (v našem případě bude $\omega = 40$ rad/sec). Úhel φ budeme počítat kladně ve smyslu otáčení bubnu.

Kámen dopadne na buben v bodě C , t. j. v nejnižším bodě horní podstavavy ($r = R_2$, $\varphi = 0$) s rychlostí o složkách $\dot{r} = 3$ m/sec, $\dot{\varphi} = 0$. Tečkou označujeme derivaci podle času,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

atd. Kdyby buben byl v klidu, zůstávalo by $\varphi = 0$ a složka rychlosti \dot{r} by se zvětšovala nebo zmenšovala podle toho, byla-li by v převaze gravitační síla, působící na kámen, nebo tření, jímž je rychlost kamene brzděna. Buben se však

otáčí, a tudíž na kámen působí také síla (způsobená třením), jejímž účinkem se bude měnit i souřadnice φ .

Když kámen opustí buben, dostane se na drsný pás, který jej uchopí a má za úkol jej odmrštit. Pás je schematicky zobrazen na obr. 2. Mezi body D a E přiléhá k obvodu dolní podstavy bubnu (mezi těmito body tedy vykonává kruhový pohyb s touž osou, jako je osa bubnu a s touž úhlovou rychlostí ω).

Máme za úkol zjistit:

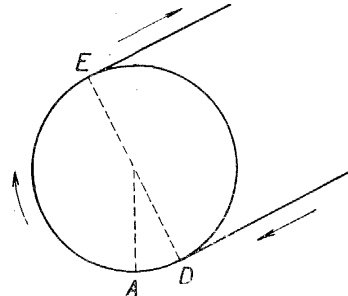
1. Zda (při daném koeficientu tření) kámen dosáhne při pohybu na pásu bodu E (viz obr. 2).

2. V opačném případě bude třeba pás opatřit lopatkami. Jejich tvar bude záviset na vektoru rychlosti, s kterou kámen opustí buben.

Abychom mohli daný úkol řešit, budeme studovat nejprve pohyb kamene (v naší abstrakci hmotného bodu s hmotou m) na kuželovém plášti bubnu a zjistíme pro $r = R_1$:

- úhel φ (polohu bodu B , viz obr. 2),
- \dot{r} a $\dot{\varphi}$.

(Tím bude stanoven i vektor rychlosti, s nímž kámen opouští buben.) Pak budeme moci studovat pohyb kamene na drsném pásu a zodpovědět otázku 1.



Obr. 2.

A. Pohyb na kuželovém plášti bubnu

Ke studiu tohoto pohybu uijeme Lagrangeových rovnic (1), kde bude $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$.

Kinetická energie

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot \dot{\varphi}^2),$$

potenciální energii zvolíme nulovou ve vrcholu V našeho kužele, tedy

$$U = -mg \sin \gamma \cdot r \cos \varphi.$$

Z Lagrangeových rovnic (1) dostáváme (pro $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$) — nebereme-li zatím zřetel na tření —

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

kde, jak víme, $L = T - U$, čili

$$m\ddot{r} - m \sin^2 \gamma \cdot r\dot{\varphi}^2 - mg \sin \gamma \cos \varphi = 0, \quad (2)$$

$$2m \sin^2 \gamma r\dot{\varphi} + m \sin^2 \gamma r^2\ddot{\varphi} + mg \sin \gamma r \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Abychom v rovnici (3) dostali rozměr síly, dělíme r (a současně $\sin \gamma$). Máme

$$2m \sin \gamma \cdot \dot{r}\dot{\varphi} + mr\ddot{\varphi} \sin \gamma + mg \sin \varphi = 0. \quad (4)$$

Nyní je třeba vyšetřit sílu, kterou působí na kámen tření. Velikost F této síly je úměrná kolmému tlaku k (t. j. kolmému na plášť kužele), který způsobuje jednak váha kamene, jednak odstředivá síla.

Tlak kamene na plochu vlastní vahou je $mg \cos \gamma \cos \varphi$. Tlak odstředivou silou je $mr \sin \gamma \cos \gamma \cdot \dot{\varphi}^2$. Tedy

$$k = mr \sin \gamma \cos \gamma \cdot \dot{\varphi}^2 + mg \cos \gamma \cos \varphi.$$

Poznámka 1. Výraz $mr \sin \gamma \cos \gamma \cdot \dot{\varphi}^2$ pro odstředivou sílu dostaneme z názoru ihned, jakmile rozložíme vektor rychlosti do složek v soustřednicích r a φ . Přesně jej dostaneme užitím některých vět z diferenciální geometrie: Odstředivá síla je dána, jak známo, výrazem

$$\frac{mv^2}{R}, \quad (a)$$

kde R je poloměr křivosti v daném bodě. R zřejmě nezávisí na souřadnici φ . Proto vyšetříme R v bodě o souřadnicích $r; \varphi = 0$. Rovnice našeho kužele s osou v ose y je

$$x^2 + z^2 - \operatorname{tg}^2 \gamma \cdot y^2 = 0. \quad (b)$$

Transformací souřadnic

$$\begin{aligned} x &= \bar{x}, \\ y &= \bar{y} \cos \gamma + \bar{z} \sin \gamma, \\ z &= -\bar{y} \sin \gamma + \bar{z} \cos \gamma \end{aligned} \quad (c)$$

otočíme kužel tak, aby jeho tečnou rovinou byla půdorysna $\bar{x}\bar{y}$. Rovnice (b) dostane tvar

$$\bar{x}^2 + (1 - \operatorname{tg}^2 \gamma) \bar{z}^2 - 2 \operatorname{tg} \gamma \cdot \bar{y}\bar{z} = 0. \quad (d)$$

Bodu P o souřadnicích $r; \varphi = 0$, odpovídá bod $\bar{x} = 0, \bar{y} = r, \bar{z} = 0$. Vedme tímto bodem normálový řez S_1 rovinou $\bar{y} = r$. Poloměr křivosti R_1 tohoto řezu určíme snadno podle Meusnierovy věty: Poloměr křivosti R_2 řezu S_2 , vedeného bodem P rovinou kolmou k ose kužele, známe:

$$R_2 = r \sin \gamma.$$

Roviny obou řezů svírají spolu úhel γ , takže podle Meusnierovy věty je

$$R_2 = R_1 \cos \gamma,$$

z čehož

$$R_1 = r \operatorname{tg} \gamma.$$

Hlavní poloměry křivosti v bodě P jsou tedy

$$\varrho_1 = R_1 = r \operatorname{tg} \gamma, \quad \varrho_2 = \infty.$$

(ϱ_2 je poloměr křivosti řezu rovinou $\bar{x} = 0$.)

Nás v prvé řadě zajímá poloměr křivosti R normálového řezu S (v P) rovinou, danou (normálou v bodě P a) vektorem rychlosti (v P). (Neboť ve skutečnosti počítáme průmět odstředivé síly do směru normály, a stačí nám tedy, ve shodě s Meusnierovou větou, počítat poloměr křivosti normálového řezu). Podle Eulerovy věty je

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_2},$$

3

kde α je úhel rovin řezů S a S_1 . Protože $\varrho_2 = \infty$, je

$$R = \frac{\varrho_1}{\cos^2 \alpha} = \varrho_1(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (e)$$

Vektor rychlosti je charakterisován čísly $r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$. Vztahy mezi r, φ a pravouhlými souřadnicemi x, y, z jsou pro plochu (b) dány rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r \sin \gamma \sin \varphi, \\ y &= r \cos \gamma, \\ z &= r \sin \gamma \cos \varphi. \end{aligned} \quad (f)$$

Transformací (e) dostáváme vztahy mezi r, φ a $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ pro body plochy (d):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= r \sin \gamma \sin \varphi, \\ \bar{y} &= r \cos^2 \gamma + r \sin^2 \gamma \cos \varphi, \\ \bar{z} &= r \sin \gamma \cos \gamma - r \sin \gamma \cos \gamma \cos \varphi. \end{aligned}$$

Z toho

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= \dot{r} \sin \gamma \sin \varphi + r \sin \gamma \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, \\ d\bar{y} &= \dot{r} \cos^2 \gamma + \dot{r} \sin^2 \gamma \cos \varphi - r \sin^2 \gamma \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

V bodě $P(r; \varphi = 0)$ dostáváme tedy pro $\operatorname{tg} \alpha$ v rovnici (e) výraz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{\dot{r} \cos^2 \gamma + \dot{r} \sin^2 \gamma}{r \sin \gamma \cdot \dot{\varphi}} = \frac{\dot{r}}{r \sin \gamma \cdot \dot{\varphi}}.$$

Tedy

$$R = \varrho_1(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = r \operatorname{tg} \gamma \cdot \left(1 + \frac{\dot{r}^2}{r^2 \sin^2 \gamma \cdot \dot{\varphi}^2} \right)$$

a odstředivá síla (přesněji: její průmět do směru normály) je dána výrazem

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot \dot{\varphi}^2)}{r \operatorname{tg} \gamma \frac{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot \dot{\varphi}^2}{r^2 \sin^2 \gamma \cdot \dot{\varphi}^2}} = mr \cos \gamma \sin \gamma \cdot \dot{\varphi}^2,$$

což bylo dokázati.

Označíme-li koeficient tření N (v našem případě bude $N = 0,3$), pak velikost F síly, kterou tření způsobuje, je

$$F = N(mr \sin \gamma \cos \gamma \cdot \dot{\varphi}^2 + mg \cos \gamma \cos \varphi). \quad (5)$$

Směr této síly je daný záporně vzatým vektorem rychlosti (neboť tření působí proti pohybu), ovšem relativní rychlostí vzhledem k otáčení plochy. Složky K_r a K_γ , vystupující na pravých stranách rovnic (1) pro $k = 1, 2$, jsou tedy úměrné složkám rychlosti:

$$\frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2(\omega - \dot{\varphi})^2 \sin^2 \gamma}}, \quad (6)$$

$$\frac{r(\omega - \dot{\varphi}) \sin \gamma}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2(\omega - \dot{\varphi})^2 \sin^2 \gamma}}. \quad (7)$$

Doplňme-li nyní pravé strany rovnic (2), (4) (podle (1)) a vydělíme-li první rovnicí m , druhou $mr \sin \gamma$, dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= g \sin \gamma \cos \varphi + \sin^2 \gamma \cdot r \dot{\varphi}^2 - \\ - N & \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} [\sin \gamma \cos \gamma \cdot r \dot{\varphi}^2 + g \cos \gamma \cos \varphi], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= - \frac{g}{r \sin \gamma} \sin \varphi - \frac{2\dot{r}\dot{\varphi}}{r} + \\ + N & \frac{r(\omega - \dot{\varphi}) \sin \gamma}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} \left[\cos \gamma \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{g \cos \gamma \cos \varphi}{r \sin \gamma} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Poznámka 2. Pravé strany Lagrangeových rovnic jsme dostali tak, že jsme sílu, způsobenou třením, rozložili ve složky, opačné složkám rychlosti (proto jsme levou stranu rovnice (3) upravili na rozměr síly, srv. rov. (4)). Přesné určení pravých stran lze provést přímo z definice K_r a K_φ . Podle definice (viz na př. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik) je

$$K_r = K_x \frac{\partial x}{\partial r} + K_y \frac{\partial y}{\partial r} + K_z \frac{\partial z}{\partial r}, \quad (a)$$

$$K_\varphi = K_x \frac{\partial x}{\partial \varphi} + K_y \frac{\partial y}{\partial \varphi} + K_z \frac{\partial z}{\partial \varphi}, \quad (b)$$

kde K_x je složka síly, způsobené třením, do osy x , K_y resp. K_z do osy y resp. z , tedy

$$K_x = \frac{-F\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad K_y = \frac{-F\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \quad K_z = \frac{-F\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \quad (c)$$

Podle rovnic (f) poznámky 1 (str. 323) je

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \sin \gamma \sin \varphi, & \frac{\partial y}{\partial r} &= \cos \gamma, & \frac{\partial z}{\partial r} &= -\sin \gamma \cos \varphi, \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= r \sin \gamma \cos \varphi, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= r \sin \gamma \sin \varphi. \end{aligned}$$

Podle týchž rovnic je (je nutno psát $\dot{\varphi} - \omega$ místo $\dot{\varphi}$, neboť jde o relativní rychlost)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \gamma \sin \varphi + r \sin \gamma \cos \varphi \cdot (\dot{\varphi} - \omega), \\ \dot{y} &= \dot{r} \cos \gamma, \\ \dot{z} &= -\dot{r} \sin \gamma \cos \varphi + r \sin \gamma \sin \varphi \cdot (\dot{\varphi} - \omega). \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{-F}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} (\dot{r} \sin^2 \gamma + \dot{r} \cos^2 \gamma) = \frac{-\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} F, \\ K_\varphi &= \frac{-F}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\dot{\varphi} - \omega) = \frac{r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} F. \end{aligned}$$

Doplňme-li těmito výrazy pravé strany rovnic (2) a (3) (nikoliv (4)!), dostaneme po příslušném vydělení m resp. $mr^2 \sin^2 \gamma$ rovnice (8) a (9).

Rovnice (8) a (9) tvoří soustavu diferenciálních rovnic pro neznámé funkce $r(t)$, $\varphi(t)$.

Existence a jednoznačnost řešení plynou z obecné věty o řešení soustav diferenciálních rovnic prvního řádu, na niž převedeme naši soustavu zavedením nových funkcí $\varrho(t) = \dot{r}(t)$, $\psi(t) = \dot{\varphi}(t)$, neboť pravé strany rovnic pak mají derivace všech řádů podle všech proměnných v okolí výchozího bodu $r = 0,25$, $\dot{r} = \varrho = 3$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \psi = 0$ (dokonce pro všechny hodnoty proměnných, které zde přicházejí v úvahu, neboť, jak se ukáže, odmocnina ve jmenovateli třetích členů obou rovnic nemůže nabýt nulové hodnoty).¹⁾

Ukážeme nejprve, že během pohybu na kuželovém plášti zůstane $\dot{\varphi}$ a tedy také φ poměrně malé (v jistém smyslu) a že také \dot{r} se velmi málo změní.

Rovnici (8) můžeme přepsat takto:

$$\ddot{r} = (g \sin \gamma \cos \varphi + \sin^2 \gamma \cdot r \dot{\varphi}^2) \left(1 - N \cotg \gamma \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2} \right). \quad (10)$$

Protože koeficient tření

$$N = 0,3$$

a $\gamma = 45^\circ$ (čili $\cotg \gamma = 1$), je výraz na pravé straně rovnice (10) jistě kladný pokud první závorka bude kladná. Pokud bude \dot{r} kladné (což jistě nastane na začátku pohybu, neboť \dot{r} je spojitě a $\dot{r}(0) = 3$), bude (pro nejnepříznivější případ $\cos \varphi = -1$, $\dot{\varphi} = 0$)

$$\ddot{r} > -g \sin \gamma > -8,$$

bereme-li $g = 10 \text{ m/sec}^2$; $\gamma = 45^\circ$, jak víme.

Tedy v nejnepříznivějším případě, kdy bereme pohyb jako rovnoměrně zpožděný se zrychlením -8 m/sec^2 , máme:

$$\dot{r}(t) = 3 - 8t, \quad (11)$$

$$r(t) = 0,3 + 3t - 4t^2 \quad (12)$$

(neboť $\dot{r}(0) = 3 \text{ m/sec}$, $r(0) = 0,3 \text{ m}$).

Řešením rovnice

$$0,3 + 3t - 4t^2 = 0,6$$

zjistíme, že kámen dosáhne dolního okraje bubnu (za předpokladu tohoto rovnoměrně zpožděného pohybu) za dobu t_1 kratší než $\frac{1}{8} \text{ sec}$. Přitom z (11) plyne, že během pohybu bude stále $\dot{r} > 2$. (Ve skutečnosti, jak dále ukážeme, bude $t_1 < \frac{1}{10}$ a \ddot{r} bude stále kladné.) *Tím máme první resultát: Kámen dosáhne dolního*

¹⁾ Hluběji se zde těmito otázkami zabývat nebudeme, neboť práce má zcela jiný úkol. Srv. na př. Stěpanov, Kurs diferenciálních rovnic, str. 156. Analýsou, obdobnou té, již provádíme v dalším, lze snadno ukázat, že máme zaručenu existenci a jednoznačnost řešení v celém časovém intervalu, který zde přichází v úvahu.

okraje bubnu (t. j. hodnoty $R_1 = 0,6 \text{ m}$) za dobu t_1 kratší než $\frac{1}{8} \text{ sec}$. Po dobu pohybu bude stále \dot{r} kladné.

Nyní si všimněme rovnice (9). Dokážeme, že během pohybu je

$$|\dot{\varphi}(t)| < 1,6 \text{ rad/sec} .$$

Vezměme nejprve v úvahu časový interval J_1 , v němž

$$0 \leq t \leq \frac{1}{20} \text{ sec} .$$

Dokážeme nejdříve, že v J_1 nemůže být $\dot{\varphi} > 4$ (rad/sec). Nechtě naopak v průběhu J_1 nabývá $\dot{\varphi}$ hodnoty $\dot{\varphi} = a > 4$. Protože $\dot{\varphi}(0) = 0$ a $\dot{\varphi}(t)$ je funkce spojitá v J_1 , existuje (jak plyne na př. z věty o infimu) nejmenší z bodů $t \in J_1$, v němž $\dot{\varphi}(t) = 4$. Označme jej t_1 , takže,

$$\dot{\varphi}(t_1) = 4 .$$

Ze stejných důvodů existuje takový bod $t_0 \in J_1$, že

$$\dot{\varphi}(t_0) = 0 \quad \text{a} \quad \dot{\varphi}(t) > 0 \quad \text{pro} \quad t_0 < t \leq t_1 .$$

V intervalu $J_0 = (t_0, t_1)$ je stále

$$-\frac{\dot{r}}{r} \dot{\varphi} < 0 ,$$

neboť $r > 0$, $\dot{\varphi} > 0$ a $\dot{r} > 0$, jak jsme právě dokázali. Dále

$$\begin{aligned} 0 < N \frac{r \sin \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})}{\sqrt{r^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} &< 0,3 , \\ \cos \gamma &< 0,71 , \\ -\frac{g}{r \sin \gamma} \sin \varphi &< 50 , \\ \frac{g \cos \gamma \cos \varphi}{r \sin \gamma} &< 34 . \end{aligned}$$

Tedy v J_0 je podle (9)

$$\ddot{\varphi} < 50 + 0,3 (0,71 \cdot 4^2 + 34) < 64 . \quad (13)$$

Ale délka časového intervalu J_0 nemůže být větší než $\frac{1}{20} \text{ sec}$, a protože $\dot{\varphi}(t_0) = 0$, nemůže být $\dot{\varphi}(t_1) = 4$, neboť

$$64 \cdot \frac{1}{20} < 4 .$$

Tím jsme dospěli ke sporu s předpokladem, že $\dot{\varphi}(t)$ nabývá v J_1 hodnoty větší než 4.

Týmž způsobem, ale ještě snadněji se dokáže, že v J_1 nemůže být $\dot{\varphi}(t) < -4$ (neboť při obdobně prováděném úvaze bude $-\frac{\dot{r}}{r} \dot{\varphi} > 0$ a člen

$$N \frac{r \sin \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})}{\sqrt{r^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} \cdot \cos \gamma \cdot \dot{\varphi}^2$$

bude kladný). Tedy v J_1 je

$$|\dot{\varphi}(t)| < 4.$$

Z odhadu obdobného nerovnosti (13) vyplývá

$$|\ddot{\varphi}| < 64$$

a tedy v J_1

$$|\varphi| < \frac{64}{2} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2 = 0,08 \text{ (rad)}.$$

Z toho vyplývá, že nyní ve členu

$$-\frac{g}{r \sin \gamma} \sin \varphi$$

můžeme vzít

$$|\sin \varphi| < 0,08$$

a tedy

$$\left| -\frac{g}{r \sin \gamma} \sin \varphi \right| < 4.$$

Na základě toho můžeme tvrdit, že v J_1 nebude nikdy $\dot{\varphi} > 0,8$. Neboť úvahou zcela obdobnou předcházející bychom z nerovnosti

$$\ddot{\varphi} < 4 + 0,3 (0,71 \cdot 0,8^2 + 34) < 15$$

(srv. nerovnost (13)) usoudili, že nemůže být $\dot{\varphi} = 0,8$, ježto

$$15 \cdot \frac{1}{20} < 0,8.$$

Stejně zjistíme, že nemůže být v J_1 $\dot{\varphi} < -0,8$. Těmito „postupnými aproximacemi“ dojdeme nakonec k závěru, že v J_1 bude stále

$$|\dot{\varphi}| < 0,55, \quad |\varphi| < 0,014.$$

Provedeme-li obdobné úvahy pro interval J_2 ($\frac{1}{20} \leq t \leq \frac{1}{10}$) a J_3 ($\frac{1}{10} \leq t \leq \frac{1}{8}$) dojdeme k výsledku, že během pohybu bude stále

$$|\dot{\varphi}(t)| < 1,6, \quad |\varphi(t)| < 0,1.$$

Příslušné výpočty zde neprovádím, neboť jsou zdlouhavé a přitom myšlenkově velmi jednoduché (jsou v podstatě založeny na nerovnosti (13)).

Po těchto úvahách je za prvé vidět z rovnice (10), že v průběhu pohybu bude stále

$$\ddot{r} \leq (7,1 + 0,8) \cdot 1 < 8,$$

takže bude stále

$$\dot{r} < 4,$$

za druhé je vidět, že se dopustíme malé chyby (vzhledem k účelu našeho výpočtu zcela zanedbatelné), nahradíme-li rovnicí (10) rovnicí

$$\ddot{r} = 0,88g \sin \gamma,$$

čili rovnici

$$\ddot{r} = 6,2 . \quad (14)$$

(Neboť $\cos \varphi \doteq 1$, $\sin^2 \gamma \cdot r \dot{\varphi}^2 \doteq \frac{1}{30} g \sin \gamma,^2$)

$$N \cotg \gamma \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} \doteq \frac{3}{20} ,$$

$$\left(1 + \frac{1}{30}\right) \left(1 - \frac{3}{20}\right) \doteq 1 - \frac{7}{60} \doteq 0,88 .$$

Z (14) plyne

$$\dot{r} = 3 + 6,2t , \quad (15)$$

$$r = 0,3 + 3t + 3,1t^2 . \quad (16)$$

Z (16) plyne, že doba pohybu na kuželovém plášti bude rovna

$$t_p \doteq 0,092 \text{ sec} ,$$

neboť pro tuto dobu nabývá r hodnoty $R_1 = 0,6 \text{ m}$.

Pro přibližné určení $\varphi(t)$ nám zcela postačí tento postup: V rovnici (9) zanedbáme člen $\cos \gamma \cdot \dot{\varphi}^2$ vedle členu $\frac{g \cos \gamma \cos \varphi}{r \sin \gamma}$,³⁾ položíme $\sin \varphi \doteq \varphi$, násobíme celou rovnici r , přičteme k oběma stranám člen $\dot{r}\varphi = 6,2\varphi$ (srv. (14)) a položíme

$$N \frac{r \sin \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \gamma \cdot (\omega - \dot{\varphi})^2}} \frac{g \cos \gamma \cos \varphi}{\sin \gamma} \doteq 3 .$$

Dostaneme:

$$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + \ddot{r}\varphi = -14,14\varphi + 6,2\varphi + 3 ,$$

čili

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} = -7,93\varphi + 3 . \quad (17)$$

V prvním přiblížení vezmeme v úvahu na pravé straně rovnice (17) jen člen 3, takže řešíme rovnici

$$\frac{d^2(r\varphi)}{dt^2} = 3 . \quad (18)$$

²⁾ Jde o to, do jaké míry bude v průběhu pohybu člen $\sin \gamma \cdot r \dot{\varphi}^2$ malý ve srovnání se členem $g \sin \gamma$. Zde jsme zvolili v průběhu pohybu jakousi střední hodnotu $r \doteq 0,5$, $\dot{\varphi}^2 \doteq 1$. Upozorňujeme na to, že po pečlivé analýze, provedené na předcházejících stránkách, provádíme zde jen hrubý technický výpočet, abychom dospěli k numerickým výsledkům. Odhad chyby by zde jistě bylo možno udělat (neboť z předcházejícího víme, že $0 \leq \dot{\varphi}^2 < 2,56$, $0,3 \leq r \leq 0,6$, $2 < \dot{r} < 4$), tento odhad by však byl pracný a vzhledem k účelu našeho výpočtu je zcela zbytečný.

³⁾ Neboť $|\cos \gamma \cdot \dot{\varphi}^2| < 1,82$, $\frac{g \cos \gamma \cos \varphi}{r \sin \gamma} > 16,5$. Mimo to na počátku pohybu je $\dot{\varphi}$ velmi malé a $r \doteq 0,3$. Viz také poznámku 2 pod čarou.

Dostaneme

$$\frac{d(r\varphi)}{dt} = 3t$$

(neboť $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$) a

$$r\varphi = 1,5t^2,$$

z čehož (podle (16))

$$\varphi = \frac{1,5t^2}{0,3 + 3t + 3,1t^2}. \quad (19)$$

Pro $t_p = 0,092$ sec je

$$\varphi \doteq 0,02 \text{ rad}, \quad (20)$$

$$\dot{\varphi} \doteq 0,33 \text{ rad/sec}. \quad (21)$$

Z (20) je vidět, že pro náš účel stačí v (17) skutečně vzít v úvahu jen druhý člen pravé strany.

Resultát studia pohybu na kuželovém plášti tedy zní: Pohyb trvá 0,092 sec, při němž v tomto čase je

$$\dot{r} = 3,57 \text{ m/sec}, \quad \varphi = 0,02 \text{ rad},$$

$$\dot{\varphi} = 0,33 \text{ rad/sec}.$$

B. Pohyb na drsném pásu

Jak již víme z úvodu, kámen, když opustí kuželový buben, dostane se na drsný pás, který přiléhá k základně bubnu a otáčí se se stejnou úhlovou rychlostí $\omega = 40$ rad/sec. (Uvažujeme jen pohyb mezi body D a E (obr. 3), tedy kruhový pohyb.) Poloměr tohoto kruhového pohybu označíme R . Bude $R = 0,6 \sin \gamma \doteq 0,424$ m. Úhel měříme podle obr. 3 (od nejnižšího bodu A ve směru otáčení pásu). Souřadnici ve směru od vnitřního okraje pásu k vnějšímu okraji označíme x .

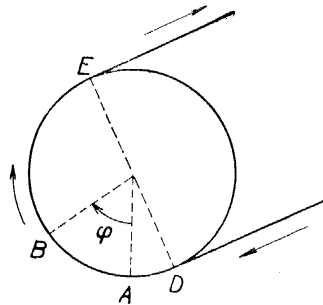
Ke studiu uijeme opět Lagrangeových rovnic (1). Zde bude

$$U = -mgR \cos \varphi,$$

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + R^2 \dot{\varphi}^2)$$

a tedy (zatím bez tření)

$$\frac{d}{dt} (m\dot{x}) = 0, \quad (22)$$



Obr. 3.

čili

$$m\ddot{x} = 0 \quad (23)$$

a

$$\frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}) + mgR \sin \varphi = 0, \quad (24)$$

čili

$$mR\ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0. \quad (25)$$

Velikost tření zde bude

$$N(mg \cos \varphi + m \frac{R^2\dot{\varphi}^2}{R}), \quad (26)$$

při čemž na pásu

$$N = 0,6.$$

Tato síla bude opět mít směr záporného vektoru (relativní) rychlosti. Rozložíme-li (26) ve složky a doplníme jimi pravé strany rovnic (23), (25), dostaneme:

$$m\ddot{x} = -N \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + R^2(\omega - \dot{\varphi})^2}} (mg \cos \varphi + mR\dot{\varphi}^2), \quad (27)$$

$$mR\varphi = -mg \sin \varphi + N \frac{R(\omega - \dot{\varphi})}{\sqrt{\dot{x}^2 + R^2(\omega - \dot{\varphi})^2}} (mg \cos \varphi + mR\dot{\varphi}^2). \quad (28)$$

Tyto rovnice dostaneme také jako speciální případ rovnic (8) a (9), píšeme-li v nich $r \sin \gamma = R$, $\cos \gamma = 1$, $\sin \gamma = 0$. O přesném určení pravých stran Lagrangeových rovnic viz poznámku 2 na str. 324.

Podrobnou analýzu rovnic (27) a (28), jakou jsme provedli pro rovnice (8) a (9), zde již provádět nebudeme. Protože, jak víme, máme rozhodnout, zda kámen dosáhne bodu E (a šířka pásu není dána), bude nás zajímat jen rovnice (28). Bude

$$\dot{x}^2 \ll R^2(\omega - \dot{\varphi})^2,$$

takže rovnici (28) můžeme (po vydělení výrazem mR) nahradit rovnicí

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi + N \frac{g}{R} \cos \varphi + N\dot{\varphi}^2,$$

čili

$$\ddot{\varphi} = \frac{g}{R} (-\sin \varphi + N \cos \varphi) + N\dot{\varphi}^2. \quad (29)$$

Rovnice (29) je nelineární. Přepíšeme ji ve tvaru

$$\ddot{\varphi} = N\dot{\varphi}^2 + f(\varphi), \quad (30)$$

kde (po dosazení numerických hodnot)

$$f(\varphi) = -23,6 \sin \varphi + 14,15 \cos \varphi,$$

$$N = 0,6.$$

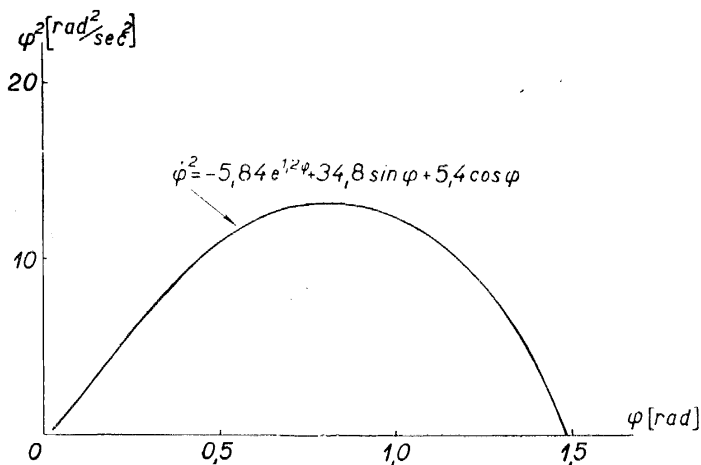
Snadno dostaneme první integrál této rovnice. Zavedme novou neznámou funkci $u(t)$ substitucí

$$u = \dot{\varphi}^2 .$$

Z toho

$$du = 2\dot{\varphi} d\dot{\varphi} = 2\ddot{\varphi} d\varphi$$

(jak plyne z rovnic



Obr. 4.

$$d\varphi = \dot{\varphi} dt ,$$

$$\ddot{\varphi} dt = d\dot{\varphi} ,$$

čili, užitím (30),

$$du = 2(N\dot{\varphi}^2 + f(\varphi)) d\varphi . \quad (31)$$

Píšeme-li v rovnici (31) u místo $\dot{\varphi}^2$, máme *lineární* diferenciální rovnici

$$\frac{du}{d\varphi} = 2Nu + 2f(\varphi) . \quad (32)$$

Elementární metoda řešení dává řešení ve tvaru

$$u = c_1 e^{2N\varphi} + a \cos \varphi + b \sin \varphi$$

(c_1 libovolná konstanta), čili (po výpočtu konstant a , b a dosazení numerických hodnot)

$$\dot{\varphi}^2 = c_1 e^{1,2\varphi} + 34,8 \sin \varphi + 5,4 \cos \varphi . \quad (33)$$

Pro počátek pohybu na drsném pásu je

$$\varphi = 0,02 , \quad \dot{\varphi} = 0,33 ,$$

z čehož

$$c_1 = -5,84 .$$

Tím dostáváme (z (31)) vztah mezi úhlem φ a rychlostí $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}^2 = -5,84e^{1,2\varphi} + 34,8 \sin \varphi + 5,4 \cos \varphi .$$

Závislost $\dot{\varphi}^2$ na φ je znázorněna na obr. 4.

Pro počátek pohybu je $\dot{\varphi} > 0$ (a také $\ddot{\varphi} > 0$, jak je vidět z (30)), tedy $\dot{\varphi}$ zůstává kladné až po úhel $\varphi \doteq 1,5 \text{ rad} \doteq 86^\circ$, kde se stává nulou a přechází do záporných hodnot (φ je zde záporné, jak je opět vidět z (30)). *Tedy kámen na drsném pásu nejen že nedosáhne bodu E (obr. 3), ale úhel φ nedosáhne ani 90 stupňů.*

Resultát naší práce je tedy tento:

Drsný pás je nutno opatřit lopatkami. K určení jejich tvaru jsou směrodatné hodnoty v okamžiku, kdy kámen opouští kuželový plášť bubnu ($r = R_1$):

$$\dot{r} = 3,57 \text{ m/sec} , \quad \varphi = 0,02 \text{ rad} , \quad \dot{\varphi} = 0,33 \text{ rad/sec} .$$

Резюме

ПРИЛОЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА II-ГО РОДА К ИЗУЧЕНИЮ ДЕЙСТВИЯ ОДНОГО МАШИННОГО УСТРОЙСТВА

КАРЕЛ РЕКТОРЫС

(Поступило в редакцию 16/III 1956 г.)

В статье используются уравнения движения Лагранжа II-го рода при изучении движения материальной точки по конусообразной поверхности, представляющей вращающуюся часть некоторого машинного устройства. Это устройство приспособлено для удаления камней с места, в котором они скопляются. На первый план выдвигается вопрос, как на движение материальной точки действует трение.

В первой части работы (стр. 319 — стр. 324) составляются уравнения движения, которые приводят нас к системе (8), (9). Проводится исследование этой системы и приближительное решение ее (стр. 325 — стр. 329). Когда камень покидает конусообразную поверхность, он попадает на жесткий конвейер, который подхватывает его и затем отбрасывает. Движение на жестком конвейере изучается в последней части работы.

Summary

APPLICATION OF LAGRANGE'S EQUATIONS OF THE SECOND CATEGORY TO THE STUDY OF THE FUNCTION OF A MECHANISM

KAREL REKTORYS

(Received March 16, 1956.)

In the paper, Lagrange's equations of the second category are used to the study of motion of a stone (material point, in our abstraction) on a conic surface, which represents a rotating part of a mechanism. The purpose of this mechanism is a quick transport of stones from the place, where they are concentrated. The chief question is, what is the influence of friction on the motion.

In the first part of the paper (*p.* 319 — *p.* 324) differential equations of motion are formed, which lead to system (8), (9). This system is analysed and approximately solved (*p.* 325 — *p.* 329). In the moment at which the stone leaves the surface of the conic part of the mechanism, it falls on a rough belt which takes it and has to reject it.

The motion on the rough belt is studied in the last part of the paper. In this part, the chief question is, whether the belt must be provided with paddles or not.