František Zítek
Mediánové odhady

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 3, 237–244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102531

MEDIÁNOVÉ ODHADY

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Došlo dne 19. prosince 1955.) DT: 519.241

V článku je zaveden pojem mediánových odhadů a ukázány některé jejich základní vlastnosti. Theorie je pak ilustrována příkladem odhadu parametru σ v normálním rozložení.

1. Princip mediánových odhadů je v podstatě analogií principů, na nichž jsou založeny odhady nestranné a odhady maximálně věrohodné. Zatím co s praktického hlediska jsou všechny tyto principy *a priori* stejně oprávněné, chybí nám pro mediánové odhady právě ony obecné věty theoretického rázu, na kterých spočívají hlavní výhody odhadů druhých dvou typů [1], [2]. Prozatím se nezdá pravděpodobné, že by tato mezera byla v dohledné době vyplněna.

V celém článku předpokládám pro zjednodušení, (které ovšem *je* na újmu obecnosti), že všechny uvažované reálné náhodné proměnné mají a) spojité rozložení, b) jednoznačně určený medián. Medián reálné náhodné proměnné ξ budu pak důsledně značiti symbolem $\mathfrak{M}_\pi(\xi)$, kde π je příslušná pravděpodobnostní míra. Obdobně je třeba rozuměti symbolu $\mathfrak{M}_p(\xi)$, kde p značí frekvenční funkci. Zobecnění získané odstraněním jednoho nebo obou předpokladů a) a b) by sice bylo v mnoha případech možné, avšak v rámci tohoto článku rázu spíše přehledného se jeví málo účelným.

2. Budiž ξ náhodný element prostoru X, budiž $\mathfrak{P}$ systém přípustných pravděpodobnostních měr π. Dále budiž F reálný funkcionál definovaný na $\mathfrak{P}$.

Definice 1. *Říkáme, že reálná funkce φ definovaná na prostoru X je mediánovým odhadem pro F, jestliže pro každé $\pi \in \mathfrak{P}$ platí*

$$\mathfrak{M}_\pi[\varphi(\xi)] = F(\pi)\,, \tag{2.1}$$

t. j.

$$\pi\{\varphi^{-1}(-\infty, F(\pi))\} = \pi\{\varphi^{-1}(F(\pi), \infty)\}\,. \tag{2.2}$$

V obvyklém případě parametrických odhadů bude $\mathfrak{P}$ dán systém frekvenčních funkcí $p(x; \Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ závislých na jednom nebo více reálných parametrech; hodnotou funkcionálu F pro dané p pak bude hodnota některého z těchto parametrů. Praktický smysl definice 1 je pak zřejmý; mediánový odhad dává se stejnou pravděpodobností hodnoty větší než je odhadovaný parametr jako hodnoty menší.

Ze známých vlastností mediánu pak snadno plyne tato

Věta 1. *Budiž φ mediánový odhad pro F. Budiž f funkce jedné reálné proměnné definovaná a ryze monotonní v oblasti hodnot funkce φ. Potom složená funkce $f\varphi$ je mediánovým odhadem pro funkcionál fF.*

Důkaz věty vyplývá z invariance mediánu vzhledem k monotonním transformacím.

Ve speciálním případě, kdy ξ je (jednorozměrnou) reálnou náhodnou proměnnou, t. j. když $X \subset E_1$, nám věta 1 dává již určitou relativně dosti obecnou methodu konstrukce mediánových odhadů. Pro funkcionál F_0 definovaný vztahem

$$F_0(p) = \mathfrak{M}_p(\xi)\,, \tag{2.3}$$

je mediánovým odhadem zřejmě funkce $\varphi(\xi) = \xi$. Pomocí věty 1 dostaneme odtud ihned mediánové odhady pro všechny takové funkcionály F, které se dají vyjádřiti jako ryze monotonní funkce funkcionálu (2.3). V obvyklém parametrickém případě tedy stačí, aby medián náhodné proměnné ξ byl ryze monotonní funkcí odhadovaného parametru

$$\mathfrak{M}_p(\xi) = f(\Theta)\,,$$

mediánovým odhadem pro $F(p) = \Theta$ bude pak zřejmě funkce $f^{-1}(\xi)$.

Obecný případ, kdy ξ není jednorozměrnou reálnou náhodnou proměnnou, si převedeme na předchozí jednoduchý případ pomocí vhodného (měřitelného) zobrazení γ prostoru X do E_1. Toto zobrazení nám pak indukuje další zobrazení Γ systému $\mathfrak{P}$ na systém $\mathfrak{P}_1$ příslušných zákonů rozložení náhodné proměnné $\gamma\xi$. Zobrazení γ však nemůže býti zcela libovolné. Abychom mohli přijatelným způsobem definovati nový funkcionál F_1 na $\mathfrak{P}_1$, musíme požadovati splnění podmínky

$$\Gamma(\pi_1) = \Gamma(\pi_2) \Rightarrow F(\pi_1) = F(\pi_2) \tag{2.4}$$

pro každé dvě $\pi_1, \pi_2 \in \mathfrak{P}$. Klademe pak

$$F_1[\Gamma(\pi)] = F(\pi)\,. \tag{2.5}$$

Kromě toho potřebujeme pro to, abychom dovedli uvedenou metodou sestrojiti mediánový odhad pro F_1, ještě také, aby medián nové náhodné proměnné $\gamma\xi$ byl ryze monotonní funkcí funkcionálu F_1, t. j. aby platilo

$$\mathfrak{M}_{\Gamma(\pi)}(\gamma\xi) = f[F_1(\Gamma(\pi))]\,. \tag{2.6}$$

Mediánovým odhadem pro F_1 pak bude funkce f^{-1} (na γX), takže mediánový odhad pro původní funkcionál F na $\mathfrak{P}$ dostaneme jako funkci φ definovanou vztahem

$$\varphi(\xi) = f^{-1}(\gamma\xi)\,, \tag{2.7}$$

neboť (2.1) je pak přímým důsledkem (2.6).

Podmínkami (2.4) a (2.6) není ovšem zobrazení γ úplně určeno, v jeho volbě zůstává i nadále dosti značná libovůle; při jeho výběru musíme (s praktického hlediska) uplatniti především kriteria „*přesnosti*" či „*vydatnosti*" odhadu, jimž jest věnován následující odstavec. Dá se sice očekávati, že použití symetrických a event. sufficientních statistik povede k optimálním výsledkům, obecné věty o tom však nebyly dosud dokázány.

3. V klasické theorii parametrických odhadů se přesnost odhadu φ parametru Θ měří obvykle výrazem

$$\mathbf{E}(\varphi - \Theta)^2 , \tag{3.1}$$

tedy v případě nestranného odhadu φ — jeho variancí. Je ovšem otázka, zda toto kriterium je adekvátní také odhadům mediánovým. Zatím co souvislost klasické metody maximální věrohodnosti a nestranných odhadů s kriteriem (3.1) je dána nerovností Cramér-Raovou, řadou dalších obecných vět [1], [2] a celou theorií efficience odhadů, není situace tak příznivá v případě mediánových odhadů, a to ani pro jiná kriteria. Poměrně nejvýhodnější je Pitmanovo kriterium „*věrnosti*" odhadů, kterého zde také použijeme.

Definice 2. *Říkáme, že odhad φ pro funkcionál F je věrnější (resp. alespoň tak věrný) než odhad ψ, jestliže pro každé $\pi \in \mathfrak{P}$ platí*

$$\mathfrak{M}_\pi\{|\psi - F(\pi)| - |\varphi - F(\pi)|\} > 0 , \tag{3.2}$$

resp.

$$\mathfrak{M}_\pi\{|\psi - F(\pi)| - |\varphi - F(\pi)|\} \geq 0 . \tag{3.3}$$

Podmínky (3.2) resp. (3.3) lze vyjádřiti též ve tvaru

$$\pi\{|\varphi - F(\pi)| < |\psi - F(\pi)|\} > \tfrac{1}{2} , \tag{3.4}$$

resp.

$$\pi\{|\varphi - F(\pi)| < |\psi - F(\pi)|\} \geq \tfrac{1}{2} . \tag{3.5}$$

Jak se snadno přesvědčíme, platí

Věta 2. *Je-li φ věrnější odhad pro F než ψ, a je-li f nekonstantní lineární funkce, pak také složená funkce $f\varphi$ je věrnějším odhadem pro fF než $f\psi$.*

Důkaz. Budiž

$$f(x) = ax + b , \quad a \neq 0 .$$

Potom pro každé π jest

$$\begin{aligned} &\pi\{|f\varphi - fF| < |f\psi - fF|\} = \\ &= \pi\{|a\varphi + b - aF - b| < |a\psi + b - aF - b|\} = \\ &= \pi\{|a| \,.\, |\varphi - F| < |a| \,.\, |\psi - F|\} = \pi\{|\varphi - F| < |\psi - F|\} > \tfrac{1}{2} , \end{aligned}$$

c. b. d.

Nahradíme-li ve větě 2 slovo *věrnější* výrazem *alespoň tak věrný*, zůstane věta správná.

Pro mediánové odhady platí tato významná

Věta 3. *Budiž φ mediánový odhad pro F. Budiž ψ libovolný jiný odhad takový, že existuje ryze monotonní funkce f, pro kterou platí*

$$f\psi = f\varphi + \frac{\omega}{\zeta},$$

kde $\omega = \omega(\xi)$, $\zeta = \zeta(\xi)$ jsou náhodné proměnné, při čemž pro každé $\pi \in \mathfrak{P}$ je ω stochasticky nezávislá na φ a $\pi\{\zeta > 0\} = 1$. Potom φ je alespoň tak věrný odhad pro F jako ψ.

Důkaz. Dokážeme, že platí (3.5). Vzhledem k nezápornosti měr π platí zřejmě

$$\pi\{|\varphi - F| < |\psi - F|\} \geq \pi\{F < \varphi < \psi\} + \pi\{F > \varphi > \psi\}. \tag{3.6}$$

Avšak

$$\pi\{F < \varphi < \psi\} = \pi\{F < \varphi; f\varphi < f\psi\} = \pi\{F < \varphi; f\psi - f\varphi > 0\} =$$
$$= \pi\left\{F < \varphi; \frac{\omega}{\zeta} > 0\right\} = \pi\{F < \varphi; \omega > 0\} = \pi\{F < \varphi\} . \pi\{\omega > 0\} = \tfrac{1}{2}P .$$

Na druhé straně obdobně

$$\pi\{F > \varphi > \psi\} = \pi\{F > \varphi\} . \pi\{\omega < 0\} = \tfrac{1}{2}(1 - P),$$

takže podle (3.6)

$$\pi\{|\varphi - F| < |\psi - F|\} \geq \tfrac{1}{2}P + \tfrac{1}{2}(1 - P) = \tfrac{1}{2},$$

c. b. d.

Poznámka. Ve speciálním případě, kdy $f(x) = x$, byla tato věta dokázána E. J. G. Pitmanem [3].

V podstatě zcela analogická větě 3 je

Věta 4. *Budiž φ mediánový odhad pro F. Budiž ψ jiný odhad pro F takový, že součet $\varphi + \psi$ je stochasticky nezávislý na φ. Potom φ je alespoň tak věrný jako ψ.*

Důkaz. Platí nerovnost

$$\pi\{|\varphi - F| < |\psi - F|\} \geq \pi\left\{\varphi < F < \frac{\varphi + \psi}{2}\right\} + \pi\left\{\varphi > F > \frac{\varphi + \psi}{2}\right\}. \tag{3.7}$$

Jest

$$\pi\left\{\varphi < F < \frac{\varphi + \psi}{2}\right\} = \pi\{\varphi < F\} . \pi\{\varphi + \psi > 2F\} =$$
$$= \frac{1}{2}\, \pi\{\varphi + \psi > 2F\},$$

a na druhé straně

$$\pi\left\{\varphi > F > \frac{\varphi + \psi}{2}\right\} = \pi\{\varphi > F\}\ \pi\{\varphi + \psi < 2F\} = \frac{1}{2} . \pi\{\varphi + \psi < 2F\},$$

avšak odtud a z (3.7) plyne (3.5), c. b. d.

Poznámka. Nerovnosti (3.6) a (3.7) jsou důsledkem obecného rozkladu (viz též [3])

$$\pi\{|\varphi - F| < |\psi - F|\} = \pi\{F < \varphi < \psi\} + \pi\{F > \varphi > \psi\} +$$
$$+ \pi\left\{\varphi < F < \frac{\varphi + \psi}{2} < \psi\right\} + \pi\left\{\varphi > F > \frac{\varphi + \psi}{2} > \psi\right\}.$$

Speciálním případem věty 3 je tato

Věta 5. *Budiž ξ nezáporná reálná náhodná proměnná; systém $\mathfrak{P}$ budiž dán frekvenčními funkcemi $p(x; \Theta)$ závislými na reálném parametru $\Theta > 0$ a splňujícími*

$$p(kx; \Theta) = p\left(x; \frac{\Theta}{k}\right), \quad (k > 0).$$

Nechť $F(p) = \Theta$. Potom ze všech odhadů tvaru

$$\varphi(\xi) = c\xi, \tag{3.8}$$

kde c je konstanta, je nejvěrnějším odhadem pro F odhad mediánový.

Důkaz. Jak se snadno přesvědčíme, je mediánový odhad skutečně tvaru (3.8)

$$\varphi(\xi) = k\xi.$$

Budiž

$$\psi(\xi) = c\xi$$

jiný odhad tvaru (3.8), potom

$$\psi(\xi) = k\xi + (c - k)\,\xi = \varphi(\xi) + \frac{c - k}{\frac{1}{\xi}},$$

a tedy ψ splňuje podmínky věty 3 pro $\omega = c - k = \text{konst}$, $\zeta(\xi) = \frac{1}{\xi}$ a $f(x) = x$.

4. Uvedených výsledků použijeme k sestrojení mediánových odhadů rozptylu σ^2 a směrodatné odchylky σ normálního rozložení. Budeme tedy uvažovati náhodné body

$$\xi = (x_1, \ldots, x_n)$$

v $X = E_n$, systém $\mathfrak{P}$ bude dán systémem frekvenčních funkcí

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n} \cdot e^{-\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0.$$

Budeme nejprve odhadovati funkcionál $F(p) = \sigma^2$. Jako zobrazení prostoru E_n do E_1 použijeme těchto funkcí

$$\gamma_1 = \sum(x_i - \mu)^2,$$
$$\gamma_2 = \sum(x_i - \bar{x})^2, \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i,$$
$$\gamma_3 = [\sum |x_i - \bar{x}|]^2,$$
$$\gamma_4 = [\max_{1 \le i \le n} x_i - \min_{1 \le i \le n} x_i]^2.$$

Všechna čtyři zobrazení vyhovují, jak se snadno přesvědčíme, podmínkám (2.4) a (2.6), takže příslušné mediánové odhady dostaneme známými již methodami ve tvaru

$$\varphi_i(\xi) = c_n^{(i)} \gamma_i(\xi)\,, \quad i = 1, 2, 3, 4\,,$$

(viz též větu 5), kde $c_n^{(i)}$ jsou konstanty (závislé ovšem na n — t. j. na rozsahu výběru). Hodnoty koeficientů $c_n^{(i)}$ jsou pro některá n uvedeny v tabulce **I.** Jak plyne z věty 5, jsou takto získané mediánové odhady nejvěrnějšími odhady σ^2 tvaru $c\gamma_i$, speciálně tedy jsou tyto odhady také věrnější než příslušné odhady nestranné. Ježto všechny odhady φ_i jsou nezáporné a funkce $f(x) = x^2$ je pro $x > 0$ rostoucí, dostaneme mediánové odhady ψ_i pro funkcionál $F_1(p) = \sigma$ snadno jako

$$\psi_i = \sqrt{\varphi_i}\,,$$

tedy

$$\psi_i = \sqrt{c_n^{(i)}}\,.\,\sqrt{\gamma_i}\,.$$

Příslušné koeficienty $\sqrt{c_n^{(i)}}$ jsou uvedeny v tabulce **II.**

I. Tabulka koeficientů $c_n^{(i)}$.

n \ i	1	3	4
1	2,1981	—	—
2	0,7213	1,098	1,098
3	0,4227	0,297	0,397
4	0,2979	0,142	0,256
5	0,2298	0.0835	0,196
6	0,1870	0,0552	0,164
7	0,1576	0,0388	0.143
8	0,1362	0,0289	0,128
9	0,1199	0,0225	0,118
10	0,1070	0,0180	0,110
15	0,06974	—	0,085

Pro $i = 2$ platí $c_n^{(2)} = c_{n-1}^{(1)}$ a $c_{15}^{(2)} = 0{,}07497$.

II. Tabulka koeficientů $\sqrt{c_n^{(i)}}$.

n \ i	1	3	4
1	1,483	—	—
2	0,850	1,048	1,048
3	0,650	0,545	0,630
4	0,546	0,377	0,506
5	0,479	0,289	0,443
6	0,432	0,235	0,405
7	0,397	0,197	0,378
8	0,369	0,170	0,358
9	0,346	0,150	0,343
10	0,327	0,134	0,331
15	0,264	—	0,292

Pro $i = 2$ platí $\sqrt{c_n^{(2)}} = \sqrt{c_{n-1}^{(1)}}$ a $\sqrt{c_{15}^{(2)}} = 0{,}274$.

Koeficienty a také variance příslušných nestranných odhadů pro parametr σ jsou uvedeny na příkl. v [4], takže relativní efficienci odhadů nestranných a odhadů mediánových můžeme snadno porovnat — je dána jako podíl čtverců příslušných koeficientů. Vzhledem k positivní šikmosti rozložení všech čtyř statistik γ_i jsou jejich střední hodnoty vesměs větší než mediány, takže ve všech čtyřech případech mají nestranné odhady menší koeficienty, a tedy i menší variance, než odhady mediánové; jsou ovšem méně věrné.

LITERATURA

[1] *P. Halmos:* The theory of unbiased estimation, Annals of Mathematical Statistics, 17 (1946), 34—43.

[2] *А. Н. Колмогоров:* Несмещенные оценки, Известия Ак. Наук СССР, Сер. Математическая, 14 (1950), 303—326.

[3] *E. J. G. Pitman:* The "closest" estimates of statistical parameters, Proceed. Cambridge Phil. Soc., 33 (1937), 212—222.

[4] *F. Zítek:* O pewnych estymatorach odchylenia standardowego, Zastosowania Matematyki, 1 (1954), 342—353.

Резюме

МЕДИАНОВЫЕ ОЦЕНКИ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek)

(Поступило в редакцию 19/XII 1955 г.)

Пусть X — измеримое пространство, $\mathfrak{P}$ — система вероятностей в X, F — вещественный функционал в $\mathfrak{P}$. Медиановой оценкой для F называется всякая вещественная функция φ, определенная в X и удовлетворяющая (2.2) — (все вещественные случайные переменные здесь предполагаем непрерывными). Свойства медиановых оценок исследуются главным образом с точки зрения теории „*тесности*“ (*closeness*) Питмэна [3]. Главными результатами этой работы являются, с одной стороны, теоремы 3 и 4, которыми даны условия достаточные для того, чтобы медиановая оценка φ была более „тесной“ другой оценки ψ — теорема 3 является обобщением одной теоремы Питмэна [3] — и, с другой стороны, § 4, где в качестве примера используется изложенная теория для оценки дисперсии σ^2 (или среднего квадратического отклонения σ) случайной величины с нормальным распределением. Указывается, что медиановые оценки φ_i (соотв. ψ_i) являются более тесными (хотя и менее эффективными), чем соответствующие несмещенные оценки.

Summary

MEDIAN ESTIMATES

FRANTIŠEK ZÍTEK

(Received December 19, 1955.)

Let X be a measurable space, $\mathfrak{P}$ a system of admissible probability measures on X, F a real functional on $\mathfrak{P}$. A median estimator for F is any real function φ defined on X and satisfying (2.2) — (all real random variables considered

are supposed to be of the continuous type). Some properties of median estimates are then studied, chiefly from the point of view of the Pitman's theory of *closeness* [3]. The main results of this paper are on the one side the theorems 3 and 4 giving sufficient conditions for a median estimator φ to be closer than an other estimator ψ — (theorem 3 is a generalization of a theorem of Pitman [3]) — and on the other side, in § 4 an application of the theory is given to estimate σ^2 (or σ) in a normal population. It is shown that the median estimators φ_i (or ψ_i resp.) are closer (although less efficient) than the corresponding unbiased estimators.