Jiří Dráský

Příspěvek k theorii tvoření vírů v kapalinách

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 3, 216–236

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102530`

PŘÍSPĚVEK K THEORII TVOŘENÍ VÍRŮ V KAPALINÁCH

JIŘÍ DRÁSKÝ

(Došlo dne 6. října 1955.) DT : 532.582 : 532.527

V práci jsou matematicky formulovány obecné zákony, platné při rovinném proudění dokonalé kapaliny a vyvozeny jejich důsledky (na př. trvalý potenciální charakter rychlostního pole při proudění spojitém v celém oboru). Dále je vyšetřována rovnováha oboru s dvoubřehým zářezem, vycházejícím z kontury tělesa. Tento zářez je považován za nové ohraničení — dvojitou hranici oblasti proudění kapaliny. Výsledků je použito k matematické formulaci theorie tvoření vírů za obtékaným tělesem. Je ukázáno, že kombinace algebraické singularity s logaritmickou vystihuje rychlostní pole pro určitou fázi vývoje vírů v okolí koncových singulárních bodů složené hranice, kde diskontinuitní čára má tvar spirály, jakož i v okolí vnitřních singulárních bodů, kde diskontinuitní čára má tvar středově souměrné dvojspirály. Theoreticky odvozené výsledky byly porovnány s experimentálními a zjištěna dobrá shoda po stránce kvalitativní i kvantitativní.

Seznam použitých označení

$\boldsymbol{i}$	jednotkový vektor ve směru osy x	$\boldsymbol{C}$	kontrolní čára, konstantní v prostoru
$\boldsymbol{j}$	jednotkový vektor ve směru osy y	$\boldsymbol{K}$	kontrolní čára kapalinná
$\boldsymbol{k}$	jednotkový vektor ve směru osy z	$\boldsymbol{\Sigma}$	kontrolní obor, omezený čarou $\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{n}$	jednotkový vektor ve směru normály	$\boldsymbol{\Sigma}_k$	kontrolní obor, omezený čarou $\boldsymbol{K}$
$\boldsymbol{t}$	jednotkový vektor ve směru tečny	Γ	cirkulace rychlosti
p	statický tlak	$\boldsymbol{W}$	komplexní potenciál
$\boldsymbol{r}$	polohový vektor	Φ	rychlostní potenciál
$\boldsymbol{w}$	vektor rychlosti proudění	Ψ	funkce proudová
$\boldsymbol{w}$	komplexní vektor rychlosti proudění	ϱ	měrná hmota

1. Úvod

Aerodynamický odpor, který působí na těleso pohybující se klidnou kapalinou, sestává, jak známo, z odporu třecího a odporu tlakového. Odpor třecí znamená výslednici elementárních třecích sil, které působí na povrch pohybujícího se tělesa. Tyto síly jsou k povrchu tečné a jejich příčinou je vazkost prostředí. Odpor tlakový znamená výslednici elelementárních sil tlakových, působících na povrch tělesa vždy ve směru normály. Rozložení tlaku po povrchu tělesa je určeno okamžitými kinematickými poměry rychlostního pole.

Vzájemný poměr odporu třecího a odporu tlakového je pro dané těleso závislý na Reynoldsově čísle obtékání *Re*. Při malých Reynoldsových číslech převládá odpor třecí, kdežto při velkých Reynoldsových číslech nabývá převahy odpor tlakový. V četných případech, vyskytujících se v technické praxi, bývá odpor třecí zanedbatelný. V limitním případě pro $Re \to \infty$ (což odpovídá $\nu \to 0$) odpor třecí vymizí a celkový odpor sestává pouze z odporu tlakového, závislého na okamžitém rychlostním poli.

Výslednice tlakových sil působících na těleso nemívá vždy pouze směr proti rychlosti pohybu, t. j. nebývá vždy odporem. V obecném případě má složku do směru kolmého na směr pohybu tělesa a tato složka představuje vztlak. Při obtékání s nestacionárním vytvářením vírů se velikost vztlaku a odporu i působiště jejich výslednice mění. Úplné řešení těchto pochodů, které v praxi mají značný význam, nebylo dosud podáno. Částečné řešení problému odporu se podařilo KÁRMÁNOVI [1], který vyšetřil — za předpokladu dokonalé kapaliny — na základě stabilitních úvah rychlostní pole, odvozené z nekonečné řady isolovaných potenciálních vírů. Tomuto poli se blíží v dobré shodě s theorií skutečné pole, vytvářející se v jisté vzdálenosti za obtékanými tělesy. Použitím impulsové věty odvodil Kármán theoreticky hodnotu součinitele odporu.

Z uvedeného je patrno, že má význam studovat nestacionární rychlostní pole obsahující vytváření vírů, neboť tato pole plně určují zmíněné silové poměry na tělese. Při řešení je nutno omezit se na rychlostní pole, která by vznikla v dokonalé kapalině. Těmto polím se pole ve skutečných (vazkých) kapalinách budou blížit tím více, čím kapalina bude mít menší vazkost.

K pojmu dokonalé (nevazké) kapaliny lze dojít dvojím způsobem. Je možno buď vyjít z kapaliny skutečné (vazké) a provést myšlenkový limitní přechod pro $\nu \to 0$, nebo je možno předpokládat kapalinu dokonalou jakožto takovou. Zdá se, že v obou případech se v četných případech dojde k týmž matematickým výsledkům a k týmž fysikálním názorům. Rozdíl více méně formální nastává v tom, jak docházíme k pojmu plochy nespojitosti. V prvém případě vznikne plocha nespojitosti z vířivé vrstvy vazké kapaliny, jejíž tloušťka při $\nu \to 0$ rovněž se blíží nule. V druhém případě můžeme předpokládat, jak to činil již HELMHOLTZ [2], že plocha nespojitosti vzniká soutokem dvou proudů po porušení (přetržení) oblasti proudu. Upozorňujeme na úplnou shodu jedné složky komplexního potenciálu pro okolí koncového bodu diskontinuitní čáry v předloženém řešení, provedeném za předpokladu $\nu = 0$, s výsledkem, který uvádí PRANDTL [3] při řešení pro isolovanou spirálu v neomezené rovině.

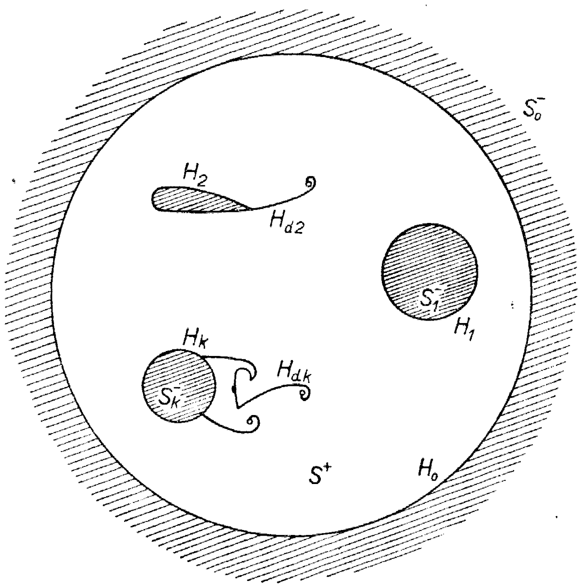
Autor děkuje dr Lad. Špačkovi, laureátu státní ceny, za jeho kritickou pomoc a cenné rady při vypracování článku.

2. Přehled užitých termínů

Theorie proudění v podstatě znamená mechaniku hmotného kontinua. Platí tudíž při proudění tekutin v každém místě a v každém okamžiku současně základní zákony mechaniky:

zákon zachování hmoty,
zákon zachování energie,
zákony rovnováhy.

Tyto zákony jsou matematicky formulovány systémem diferenciálních rovnic, jejichž každé partikulární řešení znamená jedno možné proudění. Příslušné řešení v jednotlivém případě je určeno okrajovými a počátečními podmínkami.

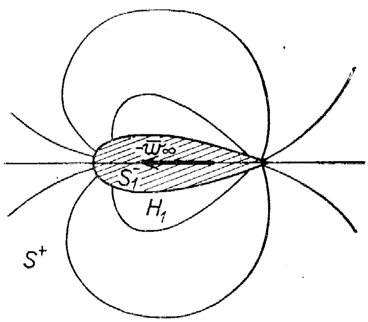


Obr. 1.

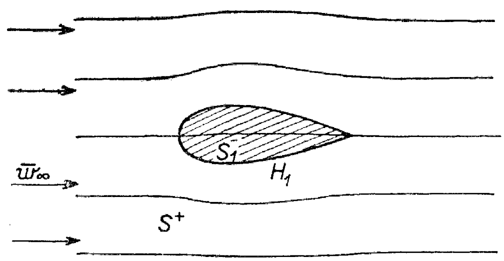
Dříve než přikročíme k matematické formulaci jednotlivých zákonů, uvedeme si některé termíny užité v dalším textu. Budeme uvažovat rovinné proudění nestlačitelné kapaliny v plošné *oblasti proudu* S^+, která může být jednoduše nebo několikanásobně souvislá, t. j. ohraničená jednou nebo několika hladkými nebo po částech hladkými, vzájemně se neprotínajícími čarami (*konturami*) H_0, H_1, ... H_n, které tvoří myšlené nebo skutečné hranice oblasti (na př. stěny těles). Do oblasti proudu S^+ mohou z uzavřených kontur (obrysů těles) vycházet otevřené zářezy značené H_d (obr. 1).

O kontuře H_0 předpokládáme, že obsahuje uvnitř všechny ostatní kontury. Je-li kontura H_0 oddálena do nekonečna, dostáváme technicky důležitý případ *neomezeně rozsáhlé oblasti proudu,* do níž jsou vložena pevná tělesa. Prostor (plošný), zaujímaný k-tým tělesem, označíme S_k^-, prostor, zaujímaný všemi tělesy spolu s prostorem S_0^-, označíme souhrnně S^-.

V dalších úvahách se omezíme na případ jednoho tělesa S_1^-, ohraničeného konturou H_1, z něhož do oblasti proudu S^+ vycházejí jeden nebo dva zářezy H_d. Oblast proudu S^+ nechť je neomezená (t. j. kontura H_0 je oddálena do nekonečna). Rovinu proudění předpokládáme vodorovnou.



Obr. 2.



Obr. 3.

Proudové pole, charakterisované vektorovým polem rychlostí proudění, budeme uvažovat ve dvou vztažných systémech, a to

a) *v absolutním vztažném systému* (obr. 2), v němž pevné těleso se pohybuje postupnou rychlostí — $\mathbf{w}_\infty$ a kapalina v nekonečnu je v klidu čili oddálená kontura H_0 stojí a oblast S_1^-, ohraničená konturou H_1, se pohybuje.

b) *v relativním vztažném systému* (obr. 3), v němž těleso stojí a kapalina v nekonečnu se pohybuje směrem k tělesu postupnou rychlostí $\mathbf{w}_\infty$ čili oblast S_1^- stojí a oddálená kontura H_0 se pohybuje konstantní rychlostí.

V rovině proudění volíme uzavřené *kontrolní čáry* C resp. K, omezující *kontrolní plochy* (*obory*) Σ resp. Σ_k, které jsou blíže určeny takto:

Kontrolní čára C, omezující obor Σ, je konstantní co do tvaru a polohy v relativním vztažném systému, t. j. nemění tvar ani polohu vzhledem k tělesu.

Kontrolní čára K, omezující obor Σ_k, je tvořena stále z týchž částeček kapaliny (t. zv. čára *kapalinná*); pohybuje se spolu s hmotou, kterou uzavírá, prostorem a při tom se příslušně deformuje.

3. Charakter rychlostního pole

Volme uvnitř oblasti S^+ libovolný jednoduše souvislý obor $\mathbf{\Sigma}$, omezený kontrolní čarou C. Vztah, znamenající zákon zachování hmoty při proudění nestlačitelného prostředí, obdržíme, vyjádříme-li matematicky skutečnost, že množství hmoty, vytékající z oboru $\mathbf{\Sigma}$ je rovno množství, které do tohoto oboru právě vtéká (podmínka kontinuity průtoku). Značí-li $\boldsymbol{n}$ jednotkový vektor ve směru vnější normály ke křivce C, značí $\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$ elementární průtočný průřez, skalární součin $\boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$ elementární průtočný objem. Podmínka konnuity průtoku se vyjádří tím, že se položí rovna nule hodnota křivočarého integrálu podél křivky C

$$m = \varrho \oint_C \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \varrho \oint_C w_n\,\mathrm{d}s = 0 \tag{3,1}$$

Poněvadž kontrolní plochu $\mathbf{\Sigma}$ můžeme volit libovolně rozsáhlou, aniž tím porušíme správnost hořejší úvahy, platí i pro limitní obor $\mathbf{\Sigma} \to M$ (M značí libovolný bod v S^+)

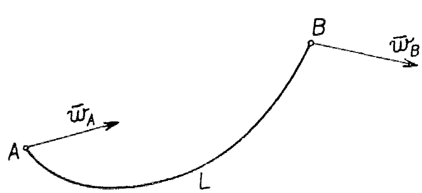
$$\lim_{\Sigma \to M} \frac{\varrho \oint_C w_n\,\mathrm{d}s}{\mathbf{\Sigma}} = \varrho \operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0\,. \tag{3,2}$$

Poněvadž $\varrho \neq 0$, vychází

$$\operatorname{div} \boldsymbol{w} = 0 \tag{3,3}$$

Zákon zachování hmoty při proudění nestlačitelného prostředí je vyjádřen nulovou divergencí vektoru rychlosti proudění $\boldsymbol{w}$ *v libovolném místě proudu* — vektorové pole je v celé otevřené oblasti S^+ solenoidální.

Nyní dokážeme další vlastnost rychlostního pole, které se vytváří *při postupném pohybu kontury* H_1 *z původního klidového stavu rozběhem v neomezeně rozsáhlé otevřené oblasti* S^+, totiž jeho *trvalý potenciální charakter*. Tento případ pohybu odpovídá technicky důležitému rozběhu těles z klidu v zemském gravitačním poli.



Obr. 4.

Vyšetřujeme-li v relativním vztažném systému hodnotu časové změny cirkulace rychlosti

$$\boldsymbol{\Gamma} = \int_L \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{t}\,\mathrm{d}s = \int_L w_t\,\mathrm{d}s\,, \tag{3,4}$$

($\boldsymbol{t}$ jednotkový vektor ve směru tečny, w_t průmět vektoru rychlosti do směru tečny)

podél libovolně volené otevřené *kapalinné* čáry L, pohybující se spolu s proudem (obr. 4), obdržíme (viz [4])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_L w_t \,\mathrm{d}s = |\mathbf{w}_B|^2 - |\mathbf{w}_A|^2 + \int_L \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{w} \times \mathbf{w}\right) . \mathbf{t} \,\mathrm{d}s . \tag{3,5}$$

Indexy $_A$ resp. $_B$ se vztahují ke koncovým bodům A resp. B čáry L.

Integrál na pravé straně rovnice (3,5) upravíme použitím vztahu pro úplnou derivaci vektoru rychlosti $\mathbf{w}$ podle času (viz vztahy 4,3 a 4,4 v následující stati)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \,.\, \operatorname{grad})\,\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \operatorname{grad}\frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + \operatorname{rot}\mathbf{w} \times \mathbf{w} .$$

Jak odvodíme v dalším, platí při rozběhu tělesa za přijatých předpokladů v celé oblasti S^+ pohybová rovnice Eulerova (4,2)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t} - \frac{1}{\varrho}\operatorname{grad} p ,$$

při čemž $\frac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t}$ je nezávislé na poloze.

Po dosazení do rovnice (3,5) dostáváme postupně

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_L w \,\mathrm{d}s = |\mathbf{w}_B|^2 - |\mathbf{w}_A|^2 + \int_L \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} - \operatorname{grad}\frac{|\mathbf{w}|^2}{2}\right) . \mathbf{t} \,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\mathbf{w}_B|^2 - |\mathbf{w}_A|^2\right) + \frac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t} . (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A) - \frac{1}{\varrho}(p_B - p_A) . \tag{3,6}$$

Volíme-li ve zvláštním případě kapalinnou čáru L uzavřenou $L \equiv K$, je $\mathbf{w}_B = \mathbf{w}_A$, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A$, $p_B = p_A$, tudíž

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\oint_K w_t \,\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} = 0 . \tag{3,7}$$

Dosažený výsledek se vyjadřuje větou Thomsonovou:

V dokonalé kapalině za působení pouze potenciálních sil má cirkulace rychlosti podél libovolné uzavřené křivky, jež se s proudem pohybuje, hodnotu stálou, která se s časem nemění.

Podle předpokladu se vyšetřované rychlostní pole vytváří z počátečního klidového stavu, kdy patrně byla hodnota cirkulace rychlosti nulová podél libovolné čáry K ležící v S^+. Podle věty Thomsonovy zůstává hodnota cirkulace podél K nulová trvale.

Obor Σ_k, omezený kapalinnou čarou K, můžeme volit libovolně rozsáhlý, aniž tím porušíme správnost provedené úvahy. Platí tudíž i pro limitní obor $\Sigma \to M$ (M značí libovolný bod v S^+) trvale

$$\mathbf{k} \lim_{\Sigma_K \to M} \frac{\oint_K w_t \,\mathrm{d}s}{\Sigma_K} = \operatorname{rot}\mathbf{w} = 0 . \tag{3,8}$$

Poněvadž vztah (3,8) je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby vektorové pole $\mathbf{w}$ bylo potenciální, je možno vyjádřit v každém okamžiku a v libovolném bodě otevřené oblasti S^+ vektor rychlosti $\mathbf{w}$ jako gradient skalární funkce — rychlostního potenciálu Φ, t. j.

$$\mathbf{w} = \operatorname{grad} \Phi \tag{3,9}$$

Tím je tvrzení o potenciálním charakteru rychlostního pole dokázáno.

4. Zákon zachování energie

Vztah, vyjadřující zákon zachování energie, se odvodí z pohybového zákona Newtonova. Podle tohoto zákona *okamžitý pohybový stav volené částice kapaliny, určený součinem hmoty částice a jejího zrychlení, lze vyjádřit jako výsledný účinek sil, které na částici působí.* Značí-li $\mathrm{d}V$ objem elementární částice, je zrychlující síla částice rovna součinu $\varrho \, \mathrm{d}V \, \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}$, tlaková síla, která na částici působí, je rovna $- \mathrm{d}V \operatorname{grad} p$, a vnější hmotová síla, mající (podle předpokladu) potenciál U, je rovna $\varrho \, \mathrm{d}V \operatorname{grad} U$. Tyto síly jsou vázány pohybovou rovnicí Eulerovou

$$\varrho \, \mathrm{d}V \frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \varrho \, \mathrm{d}V \operatorname{grad} U - \mathrm{d}V \operatorname{grad} p \,. \tag{4,1}$$

Určeme nyní integrál této diferenciální rovnice pro dříve již uvažovaný případ rozběhu tělesa z klidu ve vodorovné rovině. Těleso nechť má okamžitou postupnou rychlost $- \mathbf{w}_\infty$ a okamžité zrychlení $- \dfrac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t}$. V relativním vztažném systému, v němž je těleso trvale v klidu, přidělíme každému bodu neomezeně rozsáhlé oblasti S^+ okamžitou rychlost $\mathbf{w}_\infty$ a okamžité zrychlení $\dfrac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t}$. Toto vnější zrychlení $\dfrac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t}$ představuje vlastně vnější jednotkovou hmotovou sílu, a poněvadž je konstantou v celé oblasti S^+, má tam potenciál. Lze tudíž rovnici (4,1) upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t} - \frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p \tag{4,2}$$

Zrychlení $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t}$ čili úplná změna vektoru rychlosti $\mathbf{w}$ v čase se skládá ze členu $\dfrac{\partial \mathbf{w}}{\mathrm{d}t}$, derivace vektoru $\mathbf{w}$ v pevném místě, a členu $(\mathbf{w} \, . \operatorname{grad}) \, \mathbf{w}$, který je výsledkem pohybu samotné částice, t. j.

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \, . \operatorname{grad}) \, \mathbf{w} \,, \tag{4,3}$$

při čemž značí $(\mathbf{w} \,.\, \mathrm{grad}) = w_x \dfrac{\partial}{\partial x} + w_y \dfrac{\partial}{\partial y}$. Druhý člen lze rozepsat na základě vektorového vztahu

$$(\mathbf{w} \,.\, \mathrm{grad})\, \mathbf{w} = \mathrm{grad} \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + \mathrm{rot}\, \mathbf{w} \times \mathbf{w} \,. \qquad (4.4)$$

Poněvadž v předcházející stati bylo dovozeno, že v uvažovaném případě trvale v každém místě otevřené oblasti S^+ platí $\mathrm{rot}\, \mathbf{w} = 0$, vychází po dosazení pohybová diferenciální rovnice ve tvaru

$$\frac{1}{\varrho} \mathrm{grad}\, p + \mathrm{grad} \frac{|\mathbf{w}|^2}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{grad}\, \Phi - \frac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t} = 0 \,. \qquad (4{,}5)$$

Vynásobíme-li každý člen této rovnice skalárně vektorem $d\mathbf{r}$ a integrujeme-li mezi dvěma libovolnými místy, obdržíme energetickou rovnici ve tvaru

$$\frac{\mathrm{k}}{\varrho} + \frac{w^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t} \,.\, \mathbf{r} = \mathrm{konst} = F(t) \,. \qquad (4{,}6)$$

Hodnota konstanty $F(t)$, která je konstantou pouze co do polohy, nikoliv však v čase, se určí ze stavu v nekonečnu, kde tlak má trvale hodnotu p_∞ a rychlost je co do velikosti rovna okamžité skutečné rychlosti tělesa, avšak má opačný smysl.

Rychlostní potenciál je reálnou částí komplexního potenciálu $W(z)$, který v uvažovaném případě rozběhu pevného tělesa má tvar

$$W(z) = w_\infty[z + \omega(z)]$$

za předpokladu, že osa x leží ve směru rychlosti $\mathbf{w}_\infty$. Při pozdějším rozboru vlastností integrálu typu Cauchyho bude ukázáno, že při oddalování z do nekonečna platí

$$\lim_{z \to \infty} \omega(z) = 0 \,.$$

Má tudíž rychlostní potenciál tvar

$$\Phi = w_\infty \,[x + \varphi(x, y)] \,,$$

při čemž

$$\lim_{r \to \infty} \varphi(x, y) = 0 \,, \qquad \varphi = \mathrm{Re}\,[\omega] \,, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \,.$$

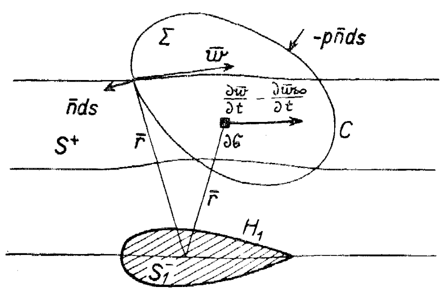
Za těchto okolností se hodnota pravé strany $F(t)$ energetické rovnice (4,6) určí z limity pro $r \to \infty$ $\left(\dfrac{\partial w_\infty}{\partial t} \text{ předpokládáme konečné}\right)$

$$F(t) = \lim_{r \to \infty} \left[\frac{p}{\varrho} + \frac{w^2}{2} + \frac{\partial w_\infty}{\partial t}(x + \varphi) - \frac{\partial w_\infty}{\partial t} x\right] = \frac{p_\infty}{\varrho} + \frac{w_\infty^2}{2} \,. \qquad (4{,}7)$$

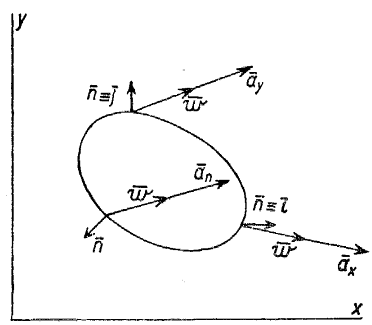
Poněvadž tlak v nekonečnu p_∞ je konstantou v čase a rychlost kapaliny v nekonečnu $\mathbf{w}_\infty$ danou funkcí času, určuje vztah (4,7) hodnotu pravé strany $F(t)$ energetické rovnice jako funkci času.

5. Podmínky rovnováhy

Poněvadž pro každou elementární částici oblasti platí rovnováha mezi silami tlakovými, hmotovými a inerčními, jež je vyjádřena pohybovou rovnicí Eulerovou, je patrně v rovnováze i libovolný konečný obor proudu. Složkové podmínky rovnováhy při rovinném proudění, na něž jsme se omezili, lze psát jedinou rovnicí vektorovou. Značí-li opět $\boldsymbol{n}$ jednotkový vektor ve směru vnější normály (obr. 5), je tlaková síla působící zvenčí na element ds kontrolní čáry C rovna $-p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$. Skalární součin $\varrho\boldsymbol{w}\,.\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$ značí vteřinové množství hmoty, protékající voleným elementem; znásoben rychlostí proudění $\boldsymbol{w}$ udává vteřinovou hybnost čili tok hybnosti elementem $\boldsymbol{w}(\varrho\boldsymbol{w}\,.\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s)$.



Obr. 5.



Obr. 6.

Podmínku rovnováhy vyjadřuje rovnice

$$-\oint_C [p\boldsymbol{n} + \boldsymbol{w}(\varrho\boldsymbol{w}\,.\,\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s - \int_\Sigma \varrho\left(\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} - \frac{\partial\boldsymbol{w}_\infty}{\partial t}\right)\mathrm{d}\sigma = 0\,, \qquad (5{,}1)$$

v níž plošný integrál v rozsahu celé kontrolní plochy $\boldsymbol{\Sigma}$ je výslednicí inerčního účinku hmoty v uvažovaném oboru. Tato rovnice je patrně integrálem Eulerovy pohybové rovnice (4,5) po ploše, o čemž se snadno přesvědčíme, převedeme-li křivkové integrály v integrály plošné. Platí totiž

$$\oint_C p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_\Sigma \operatorname{grad} p\,\mathrm{d}\sigma\,, \qquad (5{,}2)$$

$$\oint_C \boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}\,.\,\boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s = \int_\Sigma [\boldsymbol{w}\operatorname{div}\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{w}\,.\,\operatorname{grad})\,\boldsymbol{w}]\,\mathrm{d}\sigma\,. \qquad (3{,}5)$$

Uvedeme stručné odvození tohoto vztahu: Označíme-li $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}\,.\,\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{a}_n$ (obr. 6), platí podle formule Gauss-Ostrogradského (viz [5])

$$\oint_C \boldsymbol{a}_n\,\mathrm{d}s = \int_\Sigma \left(\frac{\partial\boldsymbol{a}_x}{\partial x} + \frac{\partial\boldsymbol{a}_y}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma\,, \qquad (5{,}4)$$

při čemž $\boldsymbol{a}_x$ značí hodnotu vektoru $\boldsymbol{a}_n$ pro směr $\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{i}$, analogicky $\boldsymbol{a}_y$ přísluší směru $\boldsymbol{n} \equiv \boldsymbol{j}$. Tudíž

$$\boldsymbol{a}_x = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{i}) = w_x \boldsymbol{w}\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{a}_x}{\partial x} = \frac{\partial w_x}{\partial x}\,\boldsymbol{w} + w_x \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial x}\,,$$

$$\boldsymbol{a}_y = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{j}) = w_y \boldsymbol{w}\,, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{a}_y}{\partial y} = \frac{\partial w_y}{\partial y}\,\boldsymbol{w} + w_y \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial y}\,.$$

Dosazením do (5,4) vychází vztah (5,3).

Dosadíme-li vztahy (5,2) a (5,3) do rovnice (5,1) a uvážíme-li, že v našem případě trvale v celé otevřené oblasti S^+ je div $\boldsymbol{w} = 0$, rot $\boldsymbol{w} = 0$, vychází za integračním znaménkem zmíněná Eulerova rovnice (4,5).

Odvoďme nyní nutnou a postačující podmínku rovnováhy. Dosadíme-li do rovnice (5,1) za tlak p hodnotu, udávanou energetickou rovnicí (4,6), dostaneme

$$-\oint_C \left[\left(p_\infty + \varrho \frac{w_\infty^2}{2} - \varrho \frac{w^2}{2} - \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \varrho \boldsymbol{r} \,.\, \frac{\partial \boldsymbol{w}_\infty}{\partial t}\right)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{w}(\varrho \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}s\right] -$$

$$- \int_\Sigma \varrho \left[\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{w}_\infty}{\partial t}\right] \mathrm{d}\sigma = 0\,. \tag{5,5}$$

Poněvadž platí

$$\oint_C \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t}\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_\Sigma \varrho \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{grad}\,\Phi\,\mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma \varrho \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{5,6}$$

$$\oint_C \varrho \left(\boldsymbol{r} \,.\, \frac{\partial \boldsymbol{w}_\infty}{\partial t}\right)\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_\Sigma \varrho\,\mathrm{grad}\left(\boldsymbol{r} \,.\, \frac{\partial \boldsymbol{w}_\infty}{\partial t}\right)\mathrm{d}\sigma = \int_\Sigma \varrho \frac{\partial \boldsymbol{w}_\infty}{\partial t}\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{5,7}$$

$$\left(p + \varrho \frac{\boldsymbol{w}_\infty^2}{2}\right) \oint_C \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = 0\,,$$

vychází

$$-\oint_C \left[\boldsymbol{w}(\varrho \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{n}) - \varrho \frac{w^2}{2}\,\boldsymbol{n}\right] \mathrm{d}s = 0 = \boldsymbol{i}P_x + \boldsymbol{j}P_y\,. \tag{5,8}$$

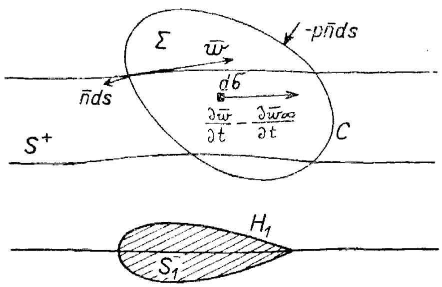
Vyjádříme-li odtud složky x-ovou a y-ovou a složíme-li je ve výslednou sdruženou sílu

$$\mathsf{P}^* = P_x - iP_y \qquad i = \sqrt{-1}\,,$$

dostaneme výraz obdobný Blasius - Čaplyginovu vztahu

$$\mathsf{P}^* = i\,\frac{\varrho}{2} \oint_C w^{*2}\,\mathrm{d}z = 0\,, \tag{5,9}$$

v němž w^* značí sdruženou rychlost $w^* = w_x - iw_y = \frac{dW}{dz}$. Poněvadž v našich úvahách $\varrho \neq 0$ a funkce w^{*2} je spojitá, lze podle věty Morerovy [6] soudit, že funkce w^{*2} musí být analytickou v otevřené oblasti S^+, t. j. musí tam splňovat Cauchy-Riemannovy rovnice. Dá se ukázat, že této podmínce je vyhověno tehdy, je-li div $\boldsymbol{w} = 0$ a rot $\boldsymbol{w} = 0$ v každém bodě otevřené oblasti S^+. *Docházíme tudíž k závěru, že proudění dokonalé kapaliny je v rovnováze tehdy, je-li potenciální v otevřené oblasti* S^+. Tento požadavek se shoduje s dříve již odvozeným důsledkem věty Thomsonovy.



Obr. 7.

Současně se složkovými podmínkami rovnováhy musí být splněna i obecně platná podmínka momentová. Sečteme-li momenty jednotlivých elementárních sil, působících na libovolně volený obor $\boldsymbol{\Sigma}$ uvnitř S^+ (obr. 7), dostaneme vektorovou rovnici

$$k M = - \oint_C [(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n}\, ds)\, p + (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{w})\, (\varrho \boldsymbol{w} \,.\, \boldsymbol{n}\, ds)] - \int_\Sigma \varrho \left[\boldsymbol{r} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{w}_\infty}{\partial t}\right)\right] d\sigma\,, \tag{5,10}$$

o níž se dá obdobným způsobem jako v případě složkových podmínek rovnováhy dokázat, že je integrálem vektorového součinu levé strany Eulerovy pohybové rovnice (4,5) a polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ po ploše $\boldsymbol{\Sigma}$. Rovnice (5,10) tvoří reálnou část vztahu

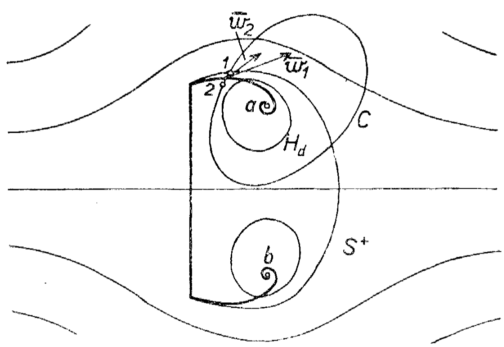
$$M + iN = \tfrac{1}{2}\varrho \oint_C w^{*2} z\, dz\,, \tag{5,11}$$

který vede ke stejnému důsledku jako vztah (5,9).

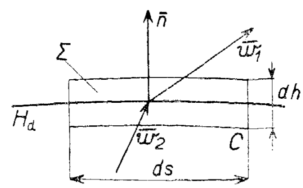
6. Rovnováha oblasti se zářezem

Vyšetříme podrobněji jako zvláštní případ rovnováhu oblasti $\boldsymbol{\Sigma}$, do níž zasahuje zvenčí zářez. Tento zářez je patrně plochou nespojitosti, která se vytváří při nestacionárním obtékání těles, kdy za tělesem vzniká turbulentní úplav. Jako příklad lze uvést obtékání rovinné desky kolmo k proudu postavené v okamžiku brzy po uvedení do pohybu (obr. 8). Podle zkušenosti z hran desky vychází plocha nespojitosti, na níž má rychlost diskontinuitu. Tuto plochu nespojitosti nelze počítat dovnitř oblasti S^+, nýbrž tato plocha jest novým ohraničením oblasti S^+. Lze předpokládat, že je složena ze dvou volných hranic téže oblasti S^+, stýkajících se v celé své délce a majících společný koncový bod, čili že tvoří dvoubřehý zářez do oblasti proudu S^+. Budeme tudíž plochu nespojitosti nazývat dále rovněž *dvojitou hranicí* a značit H_d. Tvar dvojité hranice se v každém okamžiku mění.

Obecné podmínky rovnováhy musí být splněny i pro obor se zářezem. Volme kontrolní obor $\boldsymbol{\Sigma}$ ve tvaru elementárního obdélníka o rozměrech ds a dh, při čemž dh nechť je vzhledem k ds malé (obr. 9). Osou tohoto obdélníka, rovnoběžnou s delším rozměrem ds, budiž dvojitá hranice H_d. Vektorová rovnice, vyjadřující složkové podmínky rovnováhy pro uvažovaný obor, zní



Obr. 8.



Obr. 9.

$$\oint_C [p\mathbf{n}\,\mathrm{d}s + \mathbf{w}(\varrho\mathbf{w}\,.\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}s)] = 0\,. \tag{6,1}$$

Křivočarý integrál nutno brát po obvodu obdélníka C. Označíme-li veličiny po různých stranách H_d indexem 1 resp. 2, obdržíme pro podmínku rovnováhy ve směru normály k H_d rovnici

$$p_1\,\mathrm{d}s + w_{1n}(\varrho w_{1n}\,\mathrm{d}s) = p_2\,\mathrm{d}s + w_{2n}(\varrho w_{2n}\,\mathrm{d}s)\,. \tag{6,2}$$

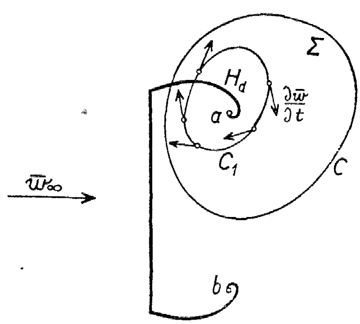
Z důvodu kontinuity platí rovnost $w_{1n} = w_{2n}$; z rovnice (6,2) pak vychází $p_1 = p_2$. Tento výsledek znamená, že *v libovolném místě dvojité hranice musí být po obou stranách H_d rovnost statických tlaků.*

Volme kontrolní čáru C tak, aby obsahovala koncový bod složené hranice (obr. 10). I pro takto vymezený obor $\boldsymbol{\Sigma}$ platí podmínka momentové rovnováhy. Výslednice elementárních tlakových sil a průtokových hybností tvoří v tomto případě točivou dvojici, vyrovnávanou momentovým inerčním účinkem hmoty v příslušném oboru $\boldsymbol{\Sigma}$. Aby kapalina v oboru $\boldsymbol{\Sigma}$ mohla momentový inerční účinek vyvozovat, musí lokální složka zrychlení $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ působit po uzavřené dráze, t. j. křivočarý integrál

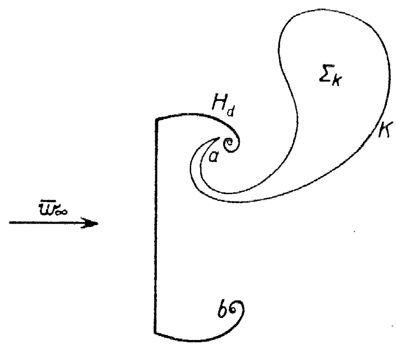
$$\oint_{C_1} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\,.\,\mathbf{t}\,\mathrm{d}s = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}$$

podél libovolné čáry C_1 která jednou přetíná dvojitou hranici H_d a je celá obsažena v oboru Σ (obr. 10), má hodnotu nenulovou. Tento výsledek znamená, že velikost cirkulace rychlosti podél čáry C_1 se v čase mění.

Úvahy o změně cirkulace v dokonalé kapalině nejsou nikterak v rozporu s větou Thomsonovou, jež byla odvozena pro uzavřenou kapalinnou čáru. Každá takováto čára K, volená v době před počátkem pohybu nebo i v době tvoření víru tak, že neprotíná dvojitou hranici (obr. 11), se v dalším časovém průběhu stále sbaluje a cirkulace rychlosti podél ní zůstává trvale nulová.



Obr. 10.



Obr. 11.

Avšak každá kapalinná čára, volená v době tvoření víru tak, že protíná dvojitou hranici a je pro volený okamžik uzavřená, se v následujícím okamžiku otevře, neboť má na dvojité hranici diskontinuitu (obr. 12).

Pro takovouto čáru ovšem věta Thomsonova neplatí a časová změna cirkulace podél ní může být nenulová.

Diskontinuita rychlosti na dvojité hranici vychází z již odvozené podmínky

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = \int_C \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}s \neq 0 \,, \tag{6,3}$$

při čemž C značí libovolnou uzavřenou křivku, konstantní v prostoru a jednou přetínající dvojitou hranici. Vytkněme si dva nekonečně blízké body 1 a 2, oba ležící nekonečně blízko od dvojité hranice, avšak každý s jiné strany (obr. 13), a spojme je libovolnou čarou C neprotínající dvojitou hranici. Body 1 a 2 patří do otevřené oblasti S^+ a tudíž podle předchozích úvah musí v nich mít rychlost potenciál. Napišme pro tyto body energetickou rovnici (4,6)

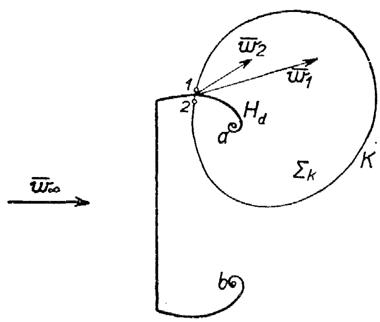
$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{w_1^2}{2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t} \cdot \mathbf{r}_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{w_2^2}{2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{w}_\infty}{\partial t} \cdot \mathbf{r}_2 \,. \tag{6,4}$$

Poněvadž $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$, $p_1 = p_2$, ruší se dva a dva členy rovnice (6,4).

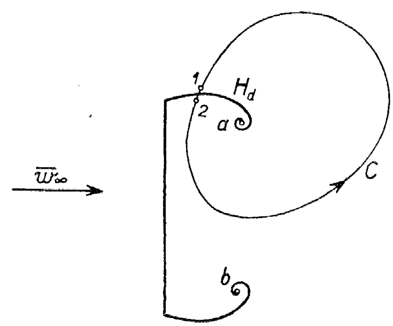
Cirkulace rychlosti mezi body 1 a 2 podél čáry C je rovna

$$\Gamma_c \Big|_2^1 = \int_{C2}^{1} \mathbf{w} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}s = \int_{C2}^{1} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \, \mathrm{d}s = \Phi_1 - \Phi_2 \,. \tag{6,5}$$

Smysl postupu po čáře C volen proti smyslu oběhu hodinových ručiček. Hodnota $\Gamma_c/_2^1$ je závislá na volbě bodů 1 a 2 podél hranice. Její časová derivace (lokální, neboť C je konstantní v prostoru) vychází



Obr. 12.



Obr. 13.

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_c \Big|_2^1 = \int_2^1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}s = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \,. \tag{6,6}$$

Po dosazení do vztahu (6,4) obdržíme

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_c \Big|_2^1 = \frac{1}{2} (w_2^2 - w_1^2) \,. \tag{6,7}$$

Poněvadž $\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_c \Big|_2^1 \neq 0$, je $|\mathbf{w}_2| \neq |\mathbf{w}_1|$, t. j. rychlost proudění po jedné straně dvojité hranice je různá od rychlosti proudění po druhé straně hranice čili rychlost má na hranici H_d diskontinuitu.

Výrazy (6,6) a (6,7) možno považovat za definiční vztahy pro $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$. Tudíž:

Časová změna cirkulace podél libovolné uzavřené čáry v prostoru pevné, protínající jednou dvojitou hranici, je rovna rozdílu časových změn rychlostního potenciálu v průsečíku čáry s dvojitou hranicí (vztah 6,6) *nebo též rozdílu kinetických energií pro 1 kg hmoty tamtéž* (vztah 6,7).

Časové změně cirkulace možno dát ještě jiný význam, myslíme-li si lokální derivaci rychlosti $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ vynásobenu 1 kg hmoty. Pak $1 \, . \, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}$ značí jednotkovou inerční sílu a

$$\int\limits_{C2}^{1} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \, . \, \mathbf{t} \, \mathrm{d}s = \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_C \Big|_2^1$$

představuje práci jednotkové inerční síly po dráze C.

Integrací podle času určíme okamžitou hodnotu cirkulace rychlosti podél čáry C

$$\Gamma_C \Big|_2^1 = \Phi_1 - \Phi_2 = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_C \Big|_2^1 \mathrm{d}t = \int\limits_0^t \mathrm{d}t \int\limits_{C2}^{1} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \, . \, \mathbf{t} \, \mathrm{d}s \, . \tag{6,8}$$

Časovou změnu cirkulace rychlosti podél kapalinné čáry K mezi týmiž body 1 a 2 určíme ze vztahu (3,6) dosazením $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, $p_1 = p_2$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Gamma_K \Big|_2^1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{K2}^{1} \mathbf{w} \, . \, \mathbf{t} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{2} (w_1^2 - w_2^2) \, . \tag{6,9}$$

Volíme-li pro jistý okamžik $K \equiv C$, platí patrně

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t} \Big|_K = - \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \Big|_C \, . \tag{6,10}$$

Úplná změna cirkulace v čase je rovna co do velikosti změně lokální, má však opačné znaménko.

7. Matematické základy řešení

Na základě úvah provedených v předešlých statích se pokusíme řešiti pochod vytváření vírů včetně sbalování dvojité hranice v rámci theorie analytických funkcí. Základem řešení je použití integrálu typu Cauchyho na problémy proudění. O tomto význačném integrálu, který našel své uplatnění v četných oborech matematické fysiky, si nejprve uvedeme přehledně tyto skutečnosti (viz [7]):

Nechť na čáře L v komplexní z rovině je dána funkce $f(\zeta)$ všude na L ohraničená s možnou výjimkou konečného počtu bodů c_k, v jejichž okolí může být neohraničená, vyhovuje však odhadu

$$|f(\zeta)| \leq \frac{A}{(\zeta - c_k)^\alpha} \, .$$

A, α kladné konstanty, $\alpha < 1$.

Nechť kromě toho funkce $f(\zeta)$ vyhovuje na L Lipschitzově podmínce

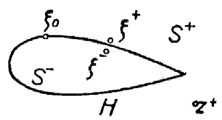
$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leqq B\, |\zeta - \zeta_0|^\beta .$$

B, β kladné konstanty, $0 < \beta \leqq 1$.

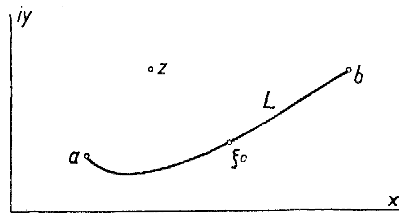
Za těchto podmínek je integrál typu Cauchyho určen křivočarým integrálem podél L

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta , \tag{7,1}$$

při čemž bod $\zeta = \xi + i\eta$ leží na L, bod $z = x + iy$ leží mimo L. $f(\zeta)$ se nazývá obložením čáry L.



Obr. 14.



Obr. 15.

Je-li $L \equiv H$ uzavřená kontura, určuje vztah (7,1) dvě různé regulární funkce uvnitř a vně H. Je-li L neuzavřenou konturou, je $F(z)$ regulární vně L. Pro bod v nekonečnu patrně platí

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = F(\infty) = 0 ,$$

neboť L má konečnou délku.

Zvolíme-li na L libovolný bod ζ_0 s obložením $f(\zeta_0)$, můžeme vztah (7,1) rozepsat

$$F(z) = \frac{f(\zeta_0)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta .$$

V případě, že $L \equiv H$ je uzavřená kontura (obr. 14), vychází pro body ležící v oblasti S^+

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta , \tag{7,2}$$

pro body, ležící v oblasti S^- pak

$$F^-(z) = f(\zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta . \tag{7,3}$$

V případě, že L je otevřenou konturou s koncovými body a a b (obr. 15) platí

$$F(z) = \frac{f(\zeta_0)}{2\pi i} \ln \frac{z - b}{z - a} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z} \, d\zeta \,, \tag{7,4}$$

kde pod $\ln \frac{z-b}{z-a} = \ln (z - b) - \ln (z - a)$ třeba rozumět určitou větev, jednoznačnou na rovině rozříznuté podél $L \equiv \overline{ab}$.

Blíží-li se bod z bodu ζ_0, dá se dokázat [4], že nezávisle na směru blížení platí při otevřené i uzavřené kontuře

$$\lim_{z \to \zeta_0} \int_L \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - z} \, d\zeta = \int_L \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \, d\zeta \,. \tag{7,5}$$

Rovněž se dá dokázat existence tohoto singulárního integrálu, splňuje-li $f(\zeta)$ Lipschitzovu podmínku, což je v našem případě předpokládáno.

Ze vztahů (7,2) a (7,3) s přihlédnutím na (7,5) vyplývá, že $f(\zeta_0)$ znamená diskontinuitu funkce $F(z)$ ve vnitřním bodě ζ_0^- a souměrném vnějším bodě ζ_0^+ hranice H, t. j.

$$f(\zeta_0) = F^-(\zeta_0) - F^+(\zeta_0) \,. \tag{7,6}$$

Vnitřní bod ζ_0^- hranice H leží libovolně blízko hranice, lze jej však vždy obklopit uzavřenou čarou, která celá leží v S^-. Obdobná podmínka platí pro vnější bod ζ_0^+.

Nyní přeneseme uvedené matematické závislosti na problémy proudění. Za funkci $F(z)$ položíme komplexní potenciál $W_a(z)$ pro absolutní vztažný systém, čímž je splněna podmínka $F(\infty) = 0$.

Problém obtékání tělesa ohraničeného konturou H_1 tím převádíme na okrajový problém theorie analytických funkcí. Při řešení vycházíme ze skutečnosti, že známe hodnotu komplexního potenciálu uvnitř tělesa (t. j. v oblasti S^-), neboť tam je určen přímočarým pohybem tělesa a je roven

$$W_a^-(z) = - w_\infty \, . \, z$$

Pro vnitřní body hranice platí tudíž

$$W_a^-(\zeta_0) = - w_\infty \, . \, \zeta_0$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu (7,3), psaného pro libovolně volený vnitřní bod hranice ζ_0^-, docházíme k integrální rovnici

$$- w_\infty \zeta_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{H_1} \frac{f(\zeta) - f(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \, d\zeta + f(\zeta_0) \,, \tag{7,7}$$

jejímž řešením třeba určit veličinu $f(\zeta)$.

Z rovnice (7,6) vyplývá, že jádro $f(\zeta)$ integrální rovnice (7,7) představuje hodnotu diskontinuity komplexního potenciálu na hranici tělesa, t. j.

$$f(\zeta) = W_a^-(\zeta) - W_a^+(\zeta) .$$

Pro obtékání válce vyhovuje integrální rovnici (7,7) jádro ve tvaru

$$f(\zeta) = - w_\infty\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \tag{7,8}$$

jak se snadno přesvědčíme zpětným dosazením. Počítáme-li z tohoto jádra komplexní potenciál pro obtékání válce použitím rovnice (7,2) resp. (7,3), dostaneme

$$\begin{aligned} W_a^+(z) &= w_\infty \frac{1}{z} \quad \text{pro oblast } S^+ , \\ W_a^-(z) &= - w_\infty \, z \quad \text{pro oblast } S^- , \end{aligned} \tag{7,9}$$

čili v relativním vztažném systému

$$\begin{aligned} W^+(z) &= w_\infty\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{pro oblast } S^+ , \\ W^-(z) &= 0 \qquad\qquad\qquad \text{pro oblast } S^- . \end{aligned} \tag{7,10}$$

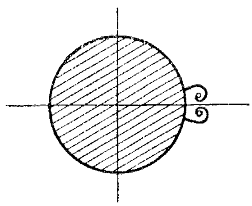
Provedeným řešením okrajové úlohy jsme obdrželi známé ,,potenciální“ obtékání válce. Z teorie integrálu typu Cauchyho vyplývá jednoznačnost řešení, t. j. neexistuje žádné jiné řešení, které by splňovalo tytéž podmínky a bylo v celé oblasti regulární.

Avšak daným pohybem tělesa a tvarem jeho obrysu je určeno jeho obtékání i během vytváření vírů (turbulentního úplavu) za tělesem. Je patrno, že komplexní potenciál popisující toto proudění nemůže již být regulární funkcí v celé vnější oblasti tělesa. Ze zkušenosti víme, že v uvažovaném případě z tělesa vychází diskontinuitní plocha — nová část hranice oblasti S^+, která s matematického hlediska znamená dvoubřehý zářez do původní oblasti proudu S^+.

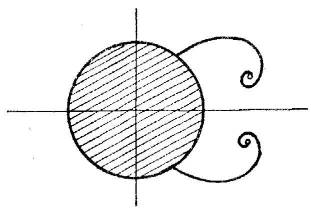
8. Stanovení úlohy a okrajové podmínky obecného řešení

Na základě úvahy, uvedené v závěru předešlé stati se pokusíme řešit i obtékání těles, obsahující i nestacionární vytváření vírů, jakožto okrajovou úlohu. V tomto případě za integrační čáru s obložením $f(\zeta)$ nestačí vzít pouze konturu tělesa, nýbrž nutno zahrnout celé ohraničení proudu včetně dvojité hranice H_d.

V dalším budeme vyšetřovat obtékání válce jednotkového poloměru v době rozběhu. Budeme se snažit určit komplexní potenciál rychlostního pole, jemuž se rychlostní pole ve skutečné (vazké) kapalině asymptoticky blíží, blíží-li se vazkost nule. Proto se budeme při řešení opírat o experimentálně zjištěné výsledky. Podle zkušenosti se ihned po uvedení do pohybu začínají za tělesem vytvářet souměrně podle osy x dvě diskontinuitní čáry tvaru spirál s výraznými singularitami v koncových bodech (obr. 16a). O tom, jak diskontinuitní čáry navazují na konturu tělesa, nedá se z experimentálně získaných snímků proudění bezpečně rozhodnout. Singulární body se vzdalují od tělesa (obr. 16b), po určité době se však souměrnost poruší a začnou se střídavě nahoře a dole vytvářet místa zhuštěné vorticity, která se řadí do šachovitě uspořádané soustavy známé pod jménem Kármánova řada vírů. Dvojitá hranice má tvar asi podle obr. 17.



Obr. 16a.

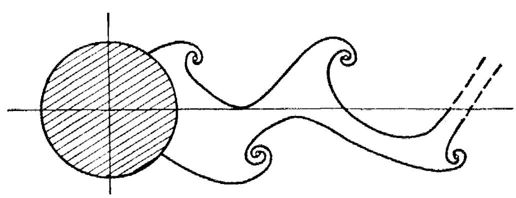


Obr. 16b.

V blízkém okolí koncových bodů má tvar jednoduché spirály, v blízkém okolí vnitřních singulárních bodů diskontinuitní čáry, kde jakoby se vorticita koncentrovala, má tvar souměrné dvojspirály.

Komplexní potenciál příslušný tomuto proudění lze v každé době vyjádřit integrálem typu Cauchyho

$$(W)z = \frac{1}{2\pi i} \int_H \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \,, \tag{8,1}$$



Obr. 17.

kde $f(\zeta)$ značí hodnotu diskontinuity komplexního potenciálu na kontuře válce i na složené hranici. Integrační čarou je celé ohraničení oblasti S^+, t. j. kontura válce i dvojitá hranice. Obložení $f(\zeta)$ i tvar dvojité hranice H_d jsou funkcemi času. Vztah (8,1) představuje naznačené obecné řešení problému. Integraci však nemůžeme provést, poněvadž tvar dvojité hranice ani příslušné obložení nejsou známy.

Docházíme tudíž k úloze, kterou možno formulovat takto:

Jest nalézti řadu analytických funkcí závislou na čase jakožto parametru, která vyhovuje daným okrajovým podmínkám a dá se vyjádřit integrálem typu Cauchyho (vztah 8,1) s obložením na kontuře tělesa i na dvojité hranici, t. j. zářezu, který z tělesa vychází. Tvar dvojité hranice a velikost obložení, jež jsou funkcemi času, nejsou dány, nýbrž mají být určeny.

V relativním vztažném systému jsou okrajové podmínky obecného řešení tyto:

1. V libovolném bodě z, ležícím uvnitř tělesa, t. j. v oblasti S^-, má komplexní potenciál hodnotu

$$W^-(z) = 0 ,$$

neboť v relativním vztažném systému je každý bod tělesa v klidu.

2. Ve vnější oblasti proudu S^+ pro bod $z \to \infty$ se komplexní potenciál asymptoticky blíží výrazu

$$W^+(z) = w_\infty z .$$

Zde značí $w_\infty = w_\infty(t)$ rychlost, jíž se kapalina v nekonečnu pohybuje směrem k stojícímu válci. Touto podmínkou je vyjádřena skutečnost, že porušení rychlostního pole, způsobené tělesem konečných rozměrů, se v nekonečnu neprojeví.

3. Kontura válce je trvale proudnicí.

4. Osa x je proudnicí, pokud není porušena souměrnost proudění.

5. Na dvojité hranici jsou normální složky rychlosti shodné (podmínky kontinuity).

6. Na dvojité hranici je v každém místě splněna rovnost statických tlaků po obou stranách dvojité rovnice.

Podmínka rovnosti normálních složek rychlosti na hranicích vede k důsledku, že funkce proudová Ψ je na dvojité hranici spojitá čili že proudnice se uzavírají. Odtud však přímo vyplývá, že obložení integrálu typu Cauchyho, jež podle (7,6) je rovno rozdílu hodnot komplexního potenciálu po obou stranách hranice, musí být reálnou funkcí. V proudění má pak na hranicích diskontinuitu pouze funkce Φ, t. j. rychlostní potenciál.

Podmínka stejného statického tlaku po obou stranách dvojité hranice je vyjádřena vztahem (viz 6,4)

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = -\frac{1}{2}\left(|\mathbf{w}_1|^2 - |\mathbf{w}_2|^2\right) .$$

Poněvadž na dvojité hranici má skok pouze rychlostní potenciál, platí rovnost

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} = \frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial W_2}{\partial t} .$$

Dále lze upravit

$$\tfrac{1}{2}(|\mathbf{w}_1|^2 - |\mathbf{w}_2|^2) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)\,\mathbf{w}_H = \\ = \operatorname{Re}\,(w_1 - w_2)\,w_H^* \,.$$

Zde značí $(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)$ rychlostní skok v libovolném bodě dvojité hranice. Vektorový průměr rychlostí bodů po obou stranách hranice jsme označili $\mathbf{w}_H = \tfrac{1}{2}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$ a nazveme jej rychlostí bodu hranice. Lze tudíž podmínku stejného tlaku vyjádřit rovněž vztahem

$$\frac{\partial W_1}{\partial t} - \frac{\partial W_2}{\partial t} = -\,(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)\,\mathbf{w}_H = -\operatorname{Re}\,(w_1 - w_2)\,w_H^* \,. \tag{8,3}$$

Obecné řešení problému, formulovaného vztahem (8,1) a uvedenými okrajovými podmínkami, dosud provedeno nebylo a bylo by asi velmi obtížné.

V následujícím se spokojíme s tím, že si zvolíme vhodnou řadu potenciálních polí s časem jako parametrem a ukážeme, že tato pole hoví přibližně alespoň v jistém časovém intervalu a v okolí singulárního bodu podmínkám úlohy. Konkretně si za komplexní potenciál tohoto pole zvolíme lineární kombinaci potenciálu s algebraickou singularitou a logaritmického potenciálu, při čemž koeficienty v této lineární kombinaci budou vhodnými funkcemi času.

(Pokračování.)