

Aplikace matematiky

Stanislav Vojtášek

Kathodově vázaný oscilátor jako kvasilineární soustava

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 2, 136–148

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102523>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1956

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

KATHODOVĚ VÁZANÝ OSCILÁTOR JAKO KVASILINEÁRNÍ SOUSTAVA

STANISLAV VOJTÁŠEK

(Došlo dne 27. října 1955.)

DT: 621.396.615.001.2

V článku se řeší katodově vázaný oscilátor, obecně vyjádřený diferencíální rovnicí typu

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k^2u = \mu f\left(u, \frac{du}{dt}\right).$$

Z této rovnice je odvozeno periodické řešení, stabilita limitního cyklu základní harmonické složky výstupního napětí, podmínky nestability klidového stavu a skreslení výstupního napětí třetí harmonickou. Theoretické výpočty jsou doplněny příkladem z praxe a experimentálně získanými výsledky.

1. Úvod

V současné době je v technické praxi často užíván tak zvaný katodově vázaný oscilátor. Jeho zapojení je na obr. 1 a 2. Při tom zapojení podle obr. 2 je jednodušší a lze pro ně použít dvojité triody se společnou katodou.

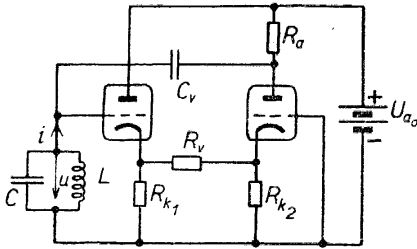
Jmenovaný oscilátor má pro technické použití řadu výhod, z nichž uvádím jen některé. Jsou to na př.: kmitavý okruh je připojen jen ve dvou bodech a nemá žádné vazební vinutí, velikostí odporu R_k lze řídit jak velikost napětí na laděném okruhu, tak jeho ustalování a obsah harmonických, výstupní napětí kolísá velmi málo se změnou ladícího kondensátoru C , kmitočet se mění málo se změnami napětí zdroje a parametrů oscilátoru.

Katodově vázaný oscilátor byl v literatuře zkoumán převážně jen symbolickým komplexním počtem, známým z teorie ustálených stavů lineárních elektrických obvodů.

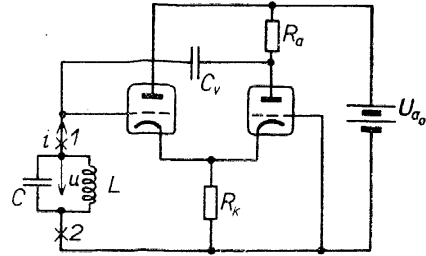
Takovým postupem lze zvládnout do jisté míry podmínky rozkmitání oscilátoru, jeho kmitočet v ustáleném stavu a směrnice pro stabilitu kmitočtu vzhledem k změnám parametrů oscilátoru.

Existuje však řada úloh, které musíme řešit z nelineárního stanoviska. Budeme se zabývat pouze těmi úlohami, které byly součástí konkrétního úkolu.

Byly to: výpočet amplitudy základní harmonické složky výstupního napětí, určení skreslení třetí harmonickou, určení stability limitního cyklu základní harmonické a stability klidové polohy.



Obr. 1.



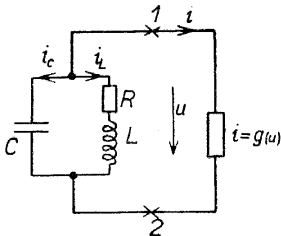
Obr. 2.

2. Diferenciální rovnice katodově vázaného oscilátoru

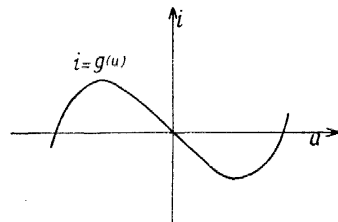
Katodově vázaný oscilátor patří k takovým druhům oscilátorů, které můžeme s výhodou rozdělit na vlastní kmitavý obvod a ostatní zapojení, které nahradíme nelineárním dvojpólem.

Takový dvojpól je charakterisován nelineární závislostí, na př. $i = g(u)$.

Na obr. 3 je naznačeno zmíněné rozdělení a na obr. 4 je příklad závislosti $i = g(u)$ naměřené pro zapojení podle obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.

Body označené 1 a 2 v obr. 3 jsou odpovídající body obr. 2, v nichž byla závislost podle obr. 4 naměřena. Měření bylo provedeno staticky, při čemž byl laděný okruh odpojen a kondensátor C_v nahražen baterií s tak velkým napětím, že při $u = 0$ bylo také $i = 0$. Předpokládalo se však, že průběh $i = g(u)$ je dostatečně souměrnou funkcí, takže se na C_v neprojevovalo přidavné napětí účinkem detekce.

Právě popsáný způsob řešení značně zjednoduší celý výpočet. Kdybychom totiž chtěli vycházet ze statických charakteristik, narazili bychom na téměř

nepřekonatelné obtíže. Oscilátor totiž pracuje tak, že v jednom období vede anodový proud prvá elektronka, v druhém období vedou obě a ve třetím vede opět druhá elektronka.

Nutno ještě podotknout, že elektronkami neprochází mřížkový proud, pokud je R_k větší než asi 500Ω (při běžných elektronkách). V praxi bývá $R_k > 1000 \Omega$.

Odvodíme příslušnou diferenciální rovnici, která bude popisovat oscilátor. Podle obr. 3 zřejmě platí

$$C \frac{du}{dt} = i_c, \quad (1)$$

$$Ri_L + L \frac{di_L}{dt} = u, \quad (2)$$

$$i_L + i_c = -i, \quad (3)$$

$$i = g(u). \quad (4)$$

Ze vztahů (1) až (4) dostaneme kvasilineární diferenciální rovnici druhého řádu pro napětí u [3]

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + u = - \frac{du}{dt} \left[L \frac{dg(u)}{dt} + RC \right] - Rg(u). \quad (5)$$

Potřebujeme ještě aproximaci funkce (4), kterou provedeme parabolou třetího stupně v souměrném tvaru

$$i = g(u) = au + bu^3. \quad (6)$$

Dále naznačíme postup, kterého použijeme při řešení. Zvolíme metodu malého parametru v té formě, jak bývá připisována LINDSTEDTOVI [1], [2]. Celý postup bude podán zjednodušeně tak, jak jej potřebuje technická praxe.

Odvodíme nejprve periodické řešení diferenciální rovnice (5) a určíme jeho orbitální stabilitu (u první aproximace).

3. Nalezení periodického řešení

Pišme diferenciální rovnici (5) v obecném kvasilineárním tvaru [3].

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k^2u = \mu f \left(u, \frac{du}{dt} \right). \quad (7)$$

Předpokládáme, že pravá strana diferenciální rovnice (7) je analytickou funkcí proměnných u a $\frac{du}{dt}$ v jisté oblasti. Přitom k je kladná konstanta a μ je t. zv. malý parametr. Je to kladné, malé číslo (viz dále).

K řešení užijeme metody malého parametru. Podstata této metody pozůstává v tom, že srovnáváme (7) s t. zv. tvořící diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k^2u = 0,$$

jejíž obecný integrál je

$$u(t) = M \cos k(t + \varphi).$$

Zvolme integrál $u_0(t) = M_0 \cos k(t + \varphi_0)$ a hledejme periodické řešení $u(t)$ pro (7) blízké k řešení $u_0(t)$.

Takové řešení lze najít pro všechna dosti malá μ , jestliže amplituda M_0 splňuje tyto podmínky [3]

$$\begin{aligned} P(M)_{M=M_0} &= 0, \\ \left(\frac{dP}{dM}\right)_{M=M_0} &\neq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

kde je

$$P(M) = \int_0^{2\pi} f(M \cos kt, -Mk \sin kt) \sin kt \, dt.$$

Diferenciální rovnice (7) je autonomní, a proto můžeme očekávat, že perioda řešení $u(t)$ bude různá od periody řešení $u_0(t)$. Bude však k této periodě blízká a to tím více, čím bude μ menší.

Obecně bude perioda řešení $u(t)$ dána řadou

$$\frac{2\pi}{k} (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots),$$

kde h_1, h_2, \dots jsou dosud neznámé konstanty.

Zavedme do (7) transformaci

$$t = \frac{\tau}{k} (1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots); \quad (9)$$

dostaneme tak diferenciální rovnici (10), o níž víme, že má periodické řešení $\bar{u}(\tau)$ blízké k řešení $\bar{u}_0(\tau)$ pro všechna dosti malá μ , a že řešení $\bar{u}_0(\tau)$, $(\bar{u}_1\tau)$, $\bar{u}_2(\tau), \dots$ mají konstantní periodu 2π

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\tau^2} + \bar{u}(1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots)^2 = \frac{\mu}{k^2} f\left(\bar{u}, \frac{k}{1 + \mu h_1 + \mu^2 h_2 + \dots} \frac{d\bar{u}}{d\tau}\right). \quad (10)$$

Hledejme $\bar{u}(\tau)$ ve tvaru řady

$$\bar{u}(\tau) = \bar{u}_0(\tau) + \mu \bar{u}_1(\tau) + \mu^2 \bar{u}_2(\tau) + \dots, \quad (11)$$

kde $\bar{u}_0(\tau), \bar{u}_1(\tau), \dots$ jsou periodické funkce s periodou 2π .

Zřejmě je

$$\left(\frac{d\bar{u}_0}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0.$$

Hledejme také řešení $\bar{u}(\tau)$, které splňuje podmínku

$$\left(\frac{d\bar{u}}{d\tau}\right)_{\tau=0} = 0,$$

kteřá má platit pro všechna μ . Z ní potom vyplývá

$$\left(\frac{d\bar{u}_0}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \left(\frac{d\bar{u}_1}{d\tau}\right)_{\tau=0} = \dots = 0. \quad (12)$$

Rozvedeme pravou stranu (10) v řadu v okolí bodu \bar{u}_0 a $\frac{d\bar{u}_0}{d\tau}$, použijeme přitom rozvoje (11) a pro srovnání výrazů u týchž mocnin μ dostaneme lineární diferenciální rovnice pro neznámé $\bar{u}_0(\tau)$, $\bar{u}_1(\tau)$, ...

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{u}_0}{d\tau^2} + \bar{u}_0 &= 0, \\ \frac{d^2\bar{u}_1}{d\tau^2} + \bar{u}_1 &= -2h_1\bar{u}_0 + \frac{1}{k^2} f\left(\bar{u}_0, k \frac{d\bar{u}_0}{d\tau}\right), \\ &\vdots \\ \frac{d^2\bar{u}_n}{d\tau^2} + \bar{u}_n &= -2h_n\bar{u}_0 - 2h_1\bar{u}_{n-1} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \bar{u}_{n-1} + \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial \bar{u}'} \bar{u}'_{n-1} + F_n, \end{aligned} \quad (13)$$

kde F_n je celistvá racionální funkce proměnných $\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{n-2}$ (a tedy je to funkce τ), která obsahuje též neznámé konstanty h_1, \dots, h_{n-1} . Přitom čárka značí první derivaci podle τ .

Obečným integrálem diferenciální rovnice (13) pro $\bar{u}_n(\tau)$ je

$$\bar{u}_n(\tau) = \psi_n(\tau) + M_n \cos \tau + N_n \sin \tau, \quad (14)$$

při čemž výchozím bude integrál prvé aproximace

$$u_0 = M_0 \cos \tau + N_0 \sin \tau. \quad (15)$$

$\psi_n(\tau)$ je známá periodická funkce τ obsahující h_1, h_2, \dots, h_n . M_{n-1} a N_{n-1} , M_n a N_n jsou neznámé amplitudy vyšších harmonických. Vzhledem k počátečním podmínkám (12) dostaneme přímo rovnici pro N_n

$$N_n = -\left(\frac{d\psi_n}{d\tau}\right)_{\tau=0}, \quad (16)$$

takže bude platit pro prvou aproximaci

$$\bar{u}_0 = M_0 \cos \tau, \quad (17)$$

kde M_0 je amplituda základní harmonické.

Zbývá ještě nalézt dvě rovnice pro neznámé M_n a h_{n+1} , které získáme z podmínek, aby diferenciální rovnice pro \bar{u}_{n+1} dávala periodické řešení. Konstanta h_n se určí totiž obdobně na základě diferenciální rovnice pro \bar{u}_n [viz (13)].

Má-li mít diferenciální rovnice pro \bar{u}_{n+1} periodické řešení, nesmí Fourierův rozvoj její pravé strany obsahovat členy s $\cos \tau$ a $\sin \tau$. To bude splněno tehdy, bude-li platit

$$-2h_{n+1}M_0 - 2h_1M_n + \frac{M_n}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \cos \tau - k \frac{\partial f}{\partial \bar{u}'} \sin \tau \right) \cos \tau \, d\tau + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_{n+1}(\tau) \cos \tau \, d\tau + \frac{N_n}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \sin \tau + k \frac{\partial f}{\partial \bar{u}'} \cos \tau \right) \cos \tau \, d\tau = 0, \quad (18)$$

$$-2h_1N_n + \frac{M_n}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \cos \tau - k \frac{\partial f}{\partial \bar{u}'} \sin \tau \right) \sin \tau \, d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_{n+1}(\tau) \sin \tau \, d\tau + \\ + \frac{N_n}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \sin \tau + k \frac{\partial f}{\partial \bar{u}'} \cos \tau \right) \sin \tau \, d\tau = 0. \quad (19)$$

Podmínky (18) a (19) lze ještě upravit na jednodušší tvary, jak je také uvedeno v [3]. Takové úpravy však zde nebudou prováděny.

Tak na př. budou mít rovnice (18) a (19) (určující M_0 a h_1) tvar

$$\int_0^{2\pi} f(M_0 \cos \tau, -kM_0 \sin \tau) \sin \tau \, d\tau = 0, \quad (20)$$

$$-h_1M_0 + \frac{1}{\pi k^2} \int_0^{2\pi} f(M_0 \cos \tau, -kM_0 \sin \tau) \cos \tau \, d\tau = 0. \quad (21)$$

Všimněme si toho, že rovnice určující M_0 je obecně nelineární, kdežto rovnice pro všechny vyšší aproximace jsou lineární. To vyplývá přímo ze (14), (18), (19).

Je známé, že řady (9) a (11) konvergují, je-li μ dosti malé. Teprve nedávno byly učiněny pokusy odhadnout, pro která μ tyto řady konvergují. Viz na př. [8]. Nepodařilo se mi však dokázat, že řady (9) a (11) v našem konkrétním případě konvergují pro $\mu = 0,2$, což je hodnota, která pro μ vyplývá z parametrů vyšetřovaného oscilátoru.

4. Orbitální stabilita

V technické praxi si všimáme ponejvíce jen základní harmonické s amplitudou M_0 , která je určena rovnicí (20). Také zde budeme zkoumat orbitální stabilitu jen této základní harmonické.

Podmínka orbitální stability periodického řešení je [3], [4]

$$\int_0^{2\pi} f'_{\bar{u}}(\bar{u}, \bar{u}') \, d\tau < 0. \quad (22)$$

Lze ukázat, že pro dosti malá μ je řešení $\bar{u}(\tau)$ orbitálně stabilní, platí-li

$$\int_0^{2\pi} f'_u(\bar{u}_0, \bar{u}'_0) d\tau < 0. \quad (23)$$

Z této podmínky budeme také vycházet.

Poznamenejme, že opodstatnění mají jen ta periodická řešení příslušná k M_0 rovnice (20), která jsou na základě podmínky (23) orbitálně stabilní. Může se totiž stát, že v některých případech má rovnice (20) více kořenů (reálných), které nejsou všechny orbitálně stabilní. Takové amplitudy lze sice početně zjistit, ale nemůžeme je naměřit.

5. Stabilita klidové polohy

Má-li se oscilátor rozkmitat, musí být jeho klidový stav nestabilní. Zkoumaný oscilátor splňuje tuto podmínku pro určité hodnoty parametrů.¹⁾

Vyjděme z linearisované kanonické soustavy příslušné (10), která charakterisuje jisté malé okolí klidového stavu, což je bod $\bar{u} = \bar{u}' = 0$. Přitom linearisovaná soustava (10) ve smyslu užívaném v teorii stability obsahuje pouze lineární členy rozvoje pravých stran v okolí singulárního bodu [5]. A to lineární vzhledem k \bar{u} , \bar{u}' . Obsahuje na př. $\mu\bar{u}$, $\mu\bar{u}'$ a neobsahuje $\mu\bar{u}\bar{u}'$.

Linearisovaná soustava k (10) bude

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\tau} &= \bar{v}, \\ \frac{d\bar{v}}{d\tau} &= -\beta\bar{u} - \alpha\bar{v}, \end{aligned} \quad (24)$$

kde α , β jsou konstanty plynoucí z rozvoje zmíněných pravých stran. O jejich významu a znaménku se zmíníme ještě dále.

T. zv. charakteristická rovnice příslušející k soustavě (24) bude

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\beta & -\lambda - \alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (25)$$

Považujeme-li klidový stav $\bar{u} = \bar{v} = 0$ za singulární bod soustavy (24), pak víme, že to může být ohnisko, uzel nebo sedlo. Má-li však oscilátor začít kmitat kmity blízkými sinusovým, pak musí být jeho klidový stav nestabil-

¹⁾ Předpokládáme, že se oscilátor rozkmitá velmi malými poruchami jako jsou fluktuace elektronů, šum, a pod., takže vystačíme s pojmem t. zv. nestability v malém. Blíže viz [7].

ním ohniskem [4], [6]. Existence ustáleného stavu je pak zaručena orbitální stabilitou limitního cyklu.²⁾

Charakteristická rovnice (25) bude mít komplexně sdružené kořeny s kladnou reálnou částí, které přísluší nestabilnímu ohnisku tehdy, bude-li platit

$$\begin{aligned} \alpha &< 0, \\ \alpha^2 - 4\beta &< 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Uvidíme na příkladu zkoumaného oscilátoru, že podmínka orbitální stability je totožná s podmínkou $\alpha < 0$.

6. Příklad katodově vázaného oscilátoru

Vydeme nejdříve z diferenciální rovnice (5), do které dosadíme aproximaci (6) a transformaci $\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}$. Přitom píšeme namísto k zlomek $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ a zavedeme ještě malý parametr pomocí součinnů $a = \mu\bar{a}$, $b = \mu\bar{b}$, $\frac{RC}{L} = \mu \left(\frac{RC}{L} \right)$. Dostaneme tak

$$\frac{d^2\bar{u}}{d\tau^2} + \bar{u} = -\mu \frac{d\bar{u}}{d\tau} \left[\bar{a} + 3\bar{b}\bar{u}^2 + \left(\frac{RC}{L} \right) \right] \sqrt{\frac{L}{C}} - \mu R(\bar{a}\bar{u} + \bar{b}\bar{u}^3). \quad (27)$$

Ukáže se dále, že μ nabývá v praxi hodnot dosti malých, neboť jsou malé i hodnoty a , b a $\frac{RC}{L}$. Je tedy (27) obdobou (7).

Hledejme prvou aproximaci řešení a tedy amplitudu základní harmonické M_0 . K tomu potřebujeme, jak víme z dřívějšího, diferenciální rovnici pro \bar{u}_1

$$\frac{d^2\bar{u}_1}{d\tau^2} + \bar{u}_1 = -2\bar{u}_0\bar{h}_1 - \sqrt{\frac{L}{C}} \left[\left(\frac{RC}{L} \right) + \bar{a} + 3\bar{b}\bar{u}_0^2 \right] \frac{d\bar{u}_0}{d\tau} - R(\bar{a}\bar{u}_0 + \bar{b}\bar{u}_0^3). \quad (28)$$

A tedy rovnice (20) bude znít

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{L}{C}} \int_0^{2\pi} (-M_0 \sin \tau) \left[\bar{a} + 3\bar{b}M_0^2 \cos^2 \tau + \left(\frac{RC}{L} \right) \right] \sin \tau \, d\tau + \\ + R \int_0^{2\pi} (\bar{a}M_0 \cos \tau + \bar{b}M_0^3 \cos^3 \tau) \sin \tau \, d\tau = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

²⁾ Nestabilní ohnisko nemusí samo o sobě zaručit existenci limitního cyklu oscilátoru. O podmínkách takové existence viz [4]. Tak na př. zkoumaný katodově vázaný oscilátor nebude kmitat se seriovým rezonančním okruhem, i když splní podmínky pro existenci nestabilního ohniska.

Z rovnice (29) vezmeme po integraci pouze kladný nenulový kořen

$$M_0 = \sqrt{-\frac{4}{3b} \left(\frac{RC}{L} + a \right)}. \quad (30)$$

Konstanta h_1 , která má význam jakési první opravy kmitočtu (periody), určí se z rovnice (21)

$$\mu h_1 = \frac{R^2 C}{2L}. \quad (31)$$

Orbitální stabilitu amplitudy M_0 určíme na základě nerovnice (22), která bude mít v našem případě tvar

$$\int_0^{2\pi} \left(a + 3bM_0^2 \cos^2 \tau + \frac{RC}{L} \right) d\tau < 0. \quad (32)$$

Po úpravě (32) dostaneme

$$\frac{RC}{L} + a < 0. \quad (33)$$

Podmínka (33) zaručuje také orbitální stabilitu $\bar{u}_0(\tau)$.

Kathodově vázaný oscilátor bude mít klidový stav vyjádřen nestabilním ohniskem, bude-li platit na základě (26)

$$\frac{RC}{L} + a < 0, \quad (34)$$

$$\frac{L}{C} \left(\frac{RC}{L} + a \right)^2 - 4(aR + 1) < 0. \quad (35)$$

Charakteristická rovnice bude totiž

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -(aR + 1) & -\lambda - \sqrt{\frac{L}{C}} \left(a + \frac{RC}{L} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (36)$$

Podle Ljapunovské teorie stability rozhoduje o stabilitě či nestabilitě klidového stavu linearisovaná soustava (24), jestliže kořeny λ_1, λ_2 determinantu (25) případně (26) mají reálné části různé od nuly [5]. Ověříme si nyní teorii na výpočtu M_0 pro konkrétní číselné hodnoty. Mimo to dokážeme na začátku zmíněnou vlastnost kathodově vázaného oscilátoru, že totiž jeho amplituda (rozumí se M_0) kolísá pouze nepatrně při ladění kondensátorem C . Vypočtené hodnoty porovnáme s naměřenými.

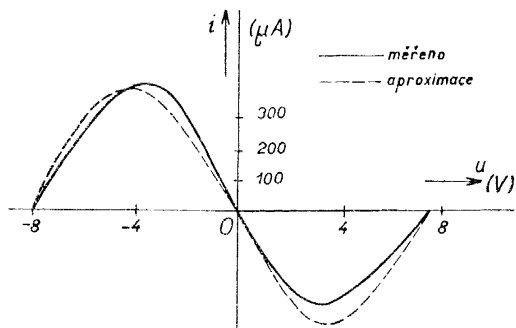
Zkoumaný oscilátor měl tyto hodnoty: $R_k = 2,5 \text{ k}\Omega$, $R_a = 10 \text{ k}\Omega$, $L = 200 \mu\text{H}$, $U_{a_0} = 100 \text{ V}$. Ztrátový odpor R se určí z výrazu pro činitel jakosti $Q = \frac{\omega L}{R}$, změřený pro různé kmitočty, které odpovídaly zkoumaným polohám ladícího kondensátoru C .

Naměřená závislost $i = g(u)$ byla aproximována parabolou

$$i = -u \cdot 10^{-4} + u^3 \cdot 1,74 \cdot 10^{-6}, \quad (37)$$

jak je vidět na obr. 5.

Z aproximace (37) plyne, že $a = -10^{-4}$, $b = 1,74 \cdot 10^{-6}$. Jednotlivé hodnoty M_0 pro pět poloh ladící kapacity určíme ze vzorce (30).



Obr. 5.

V připojené tabulce jsou uvedeny jednak naměřené, jednak vypočtené hodnoty. Je zřejmý nejen souhlas obou druhů hodnot, ale i malé kolísání amplitudy M_0 při ladění.

Prvá oprava kmitočtu bude na př. pro $f = 1100$ kHz, $\mu h_1 = 1,84 \cdot 10^{-5}$, což je nepatrná hodnota.

Poznamenejme ještě, že zkoumaný katodově vázaný oscilátor má také výbornou stabilitu kmitočtu vzhledem ke změnám napětí anodového zdroje.

Tabulka

$C_{(pF)}$	50	100	200	300	450	Měřeno
$f(\text{kHz})$	1500	1100	782	641	527	
Q	123	165	188	184	177	
$M_0(\text{V})$	8,80	8,80	8,75	8,62	8,55	Počítáno
$M_0(\text{V})$	8,57	8,57	8,53	8,55	8,58	

Tak na př. byla naměřena střední změna 1 Hz na 1 V změny U_{a0} při jmenovitém kmitočtu 500 kHz.

Orbitální stabilita vyplývá sama o sobě přímo z celého výpočtu, což dokazuje podmínka (33) i vzorec (30).

Na konec bude naznačen výpočet třetí harmonické. Druhá harmonická se nevyškyluje vzhledem ke tvaru funkce $g(u)$.

Vyjdeme z diferenciální rovnice (28), která byla již dříve uvedena. Určíme její obecný integrál, který obsahuje dvě neznámé amplitudy M_1 a N_1

$$u_1 = M_1 \cos \tau + N_1 \sin \tau - \frac{1}{32} \sqrt{\frac{\bar{L}}{C}} \bar{b} M_0^3 \sin 3\tau + \frac{1}{32} R \bar{b} M_0^3 \cos \tau. \quad (38)$$

Podle postupu, který byl dříve naznačen, můžeme psát diferenciální rovnici pro \bar{u}_2

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}_2}{d\tau^2} + \bar{u}_2 = & -\bar{u}_0(h_1^2 + 2h_2) - \bar{u}_1(2h_1 + \bar{a}R) - 2h_1 R(\bar{a}\bar{u}_0 + \bar{b}\bar{u}_0^3) - \\ & - 3\bar{b}R\bar{u}_0\bar{u}_1 - \sqrt{\frac{\bar{L}}{C}} \left[\left(\frac{\bar{R}C}{L} \right) + \bar{a} + 3\bar{b}\bar{u}_0^3 \right] \left(h_1 \frac{d\bar{u}_0}{d\tau} + \frac{d\bar{u}_1}{d\tau} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Dosadíme do (39) výrazy (17) a (38), použijeme podmínky (16), (18) a (19), z čehož určíme tři neznámé M_1 , N_1 , h_2 . Po dosazení a úpravě dostaneme

$$\begin{aligned} M_1 = & \frac{3}{32} \frac{b}{2-b} \left[\frac{3}{2} \bar{b} M_0^3 (R-1) + R - \frac{\bar{b}}{2} \right] - \\ & - \frac{3}{16} \frac{\bar{b}}{2-b} M_0 R \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \left[3 \left(\frac{\bar{R}C}{L} \right) - \bar{a} \right] - \frac{3}{2} \frac{b}{2-b} R \left(\frac{3}{32} M_0^2 \bar{b} + h_1 \right), \end{aligned} \quad (40)$$

$$N_1 = \frac{3}{32} \bar{b} M_0^3 \sqrt{\frac{\bar{L}}{C}}, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} h_2 = & \frac{M_1}{2} (2h_1 + \bar{a}R) - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\bar{L}}{C}} M_0^2 N_1 + \frac{9}{8} b R M_0 M_1 + \frac{3}{128} \frac{L}{C} \bar{b} M_0^5 + \\ & + \frac{3}{256} \bar{b}^2 R^2 M_0^5 + \frac{N_1}{2} \sqrt{\frac{\bar{L}}{C}} \left[\left(\frac{\bar{R}C}{L} \right) + \bar{a} \right] + \frac{9}{256} \sqrt{\frac{\bar{L}}{C}} \bar{b}^2 M_0^5 + \frac{9}{8} N_1 M_0^2 \bar{b} + \\ & + \bar{a} h_1 R M_0 + \frac{3}{4} h_1 \bar{b} R M_0^3. \end{aligned} \quad (42)$$

7. Závěr

Z uvedeného výpočtu vyplývají poznatky pro posouzení vlastností katodově vázaného oscilátoru. Ze vzorců pro M_0 , M_1 , N_1 , u_1 , h_1 a h_2 vidíme, které parametry oscilátoru ovlivňují změnu kmitočtu, po př. obsah třetí harmonické. Z celého postupu však vyplývá ta skutečnost, že i poměrně jednoduchý příklad působí značné obtíže při řešení, chceme-li určit vyšší aproximace. Velká část nelineárních úloh z technické praxe stává se pak často i neřešitelnou, chceme-li použít k jejich zvládnutí přesnějších matematických method. V takových případech nutno udělat kompromis mezi přesnými methodami a podklady, získanými experimentem.

LITERATURA

- [1] *Стокер*: Нелинейные колебания в механических и электрических системах, Москва 1952.
- [2] *Moulton*: Differential Equations, New York 1930.
- [3] *Малкин*: Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Москва 1949.
- [4] *Andronov-Chaikin*: Theory of Oscillations, New Jersey, Princeton 1935.
- [5] *Дубошин*: Основы теории устойчивости движения, Москва 1952.
- [6] *Lefschetz*: Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, New Jersey, Princeton University Press 1950.
- [7] *Айзерман*: Теория автоматического регулирования двигателей, Москва 1952.
- [8] *Lewis*: On the Perturbation of a Periodic Solution when the Variational System has Non-Trivial Periodic Solutions, Journal of Rational Mechanics and Analysis 1955, Vol. 4, № 5, s. 795-815.

Резюме

ОСЦИЛЛЯТОР С КАТОДНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ КАК КВАЗИЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА

СТАНИСЛАВ ВОЙТАШЕК (Stanislav Vojtášek)

(Поступило в редакцию 27/X 1955 г.)

В последнее время в электротехнике слабых токов часто употребляется осциллятор с катодной обратной связью. Причиной этого являются его выгодные свойства.

В специальной литературе авторы решают, в большинстве случаев, осциллятор с катодной обратной связью как линейную систему. Целью настоящей статьи является решение некоторых основных вопросов указанного осциллятора с точки зрения нелинейной системы.

Такие задачи приводят к решению нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, а это в технической практике весьма затруднительно. Кроме того, техник обыкновенно незнаком с соответствующими методами. Поэтому эти методы в статье подробно выведены и объяснены.

Цельный метод решения затруднителен не только из-за сложности математических выражений, но и ввиду конвергенции найденного решения, что само по себе является весьма сложным явлением. Если необходимо, кроме того, найти еще аппроксимации высшего порядка решения данного дифференциального уравнения, то получаются выражения, с которыми уже трудно справиться.

Удалось, однако, решить некоторые вопросы, связанные с осциллятором с катодной обратной связью, представляющие для техников самый большой интерес. В статье приведены результаты измерений, произведенных на одной практически выполненной схеме, которые подтверждают правильность всего метода решения.

Summary

THE CATHODE-COUPLED OSCILLATOR AS A QUASI-LINEAR SYSTEM

STANISLAV VOJTÁŠEK

(Received October 27, 1955.)

The cathode-coupled oscillator is frequently used in modern radio circuits, where it is used for its favourable properties.

In technical literature the cathode-coupled oscillator is usually approached from the linear-network point of view. The purpose of this paper is to solve some problems connected with this oscillator from the point of view of non-linearity.

Such problems lead to the solution of 2nd order differential equations, which is not an easy task in engineering practice. Moreover, engineers are not as a rule familiar with the adequate mathematical methods of solution. The latter are therefore derived and explained in greater detail in this paper.

The difficulty of these methods of solution is caused not only by complicated mathematical expressions, but also by the fact that the question of the convergence of the found solution is by no means an easy matter. If in addition higher-order approximations of the solution of the given differential equation are to be found, the resulting expressions become extremely involved.

Nevertheless the solution of several problems connected with the cathode-coupled oscillator proved possible; they are at the same time the problems the engineer is most interested in. The paper also contains experimental results as measured on a practical circuit. These measured values confirm that the theoretical solution is correct.